



ANÁLISE DE PROJETOS DE ARQUITETURA ALIADA A ESTRUTURA UTILIZANDO FERRAMENTAS NUMÉRICAS PARA A DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS E DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Rodrigo Marques Godoi

Leandro Vanalli

rodrigo.romer@hotmail.com

leovanalli@yahoo.com.br

Departamento de Tecnologia (DTC), Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Avenida Angelo Moreira da Fonseca, 1800, 87506-460, Paraná, Brasil

Sílvia Sônia da Silva

silvia_sonia@yahoo.com.br

Faculdade União das Américas (Uniamérica)

Avenida das Cataratas, 1118, 85853-000, Paraná, Brasil

Abstract. Nowadays the use of numeric models for analysis of problems in structural engineering is indispensable. As the computer and the modern analysis methods were created, overcome such obstacle in engineering was possible, thus, allowing us to make use of all the advantage of a structure with more links, such as material saving, bigger security coefficient, biggest stiffness of elements and structures aesthetically more alluring. The major part of the specialized engineers in structural projects use commercial softwares based in the Finite Element method, these that are still commercialized several times in packages, which demand a big investment from the designers. In such context, this article presents a numeric study destined to analyze hyperstatic structures. The study developed here, is also very interesting to be employed in the graduation teaching, taking into account its aspect of stiffness composition via isolated elements contribution, main method used in this stage. Can even be employed for analysis of composite elements, where the additional stiffness can be considered in the obtained stiffness matrix. Some results which confirm the validity of the built model in comparison with the consolidated software in the market are presented.

Keywords: Hyperstatic, Structures, Direct stiffness method

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento da engenharia, e também da necessidade de estruturas maiores e que suportem maiores cargas, faz-se necessário um cálculo estrutural cada vez mais preciso, de modo que se possa garantir a segurança da estrutura. Até o início do século passado, equipes de engenheiros precisavam de meses de estudo para realizar com precisão o dimensionamento de uma viga espacial altamente indeterminada (Leet; Uang; Gilbert, 2014). O surgimento do computador e de métodos modernos de análise quebrou essa barreira imposta pela extensão e complexidade dos cálculos das estruturas, tanto que, atualmente, o uso de modelos numéricos para análise de estruturas é imprescindível. Esses métodos modernos de análise também nos possibilitam o uso de estruturas com um maior número de vínculos, acompanhados de diversos benefícios como economia de material, elementos mais rígidos e estruturas esteticamente mais atraentes de acordo com (McCormac, 2009).

Para o desenvolvimento desse tipo de estruturas, os engenheiros especializados em projetos estruturais utilizam *softwares* que se baseiam no *método dos elementos finitos*. Tais *softwares* são comercializados em pacotes que demandam de grande investimento dos projetistas, mesmo porque faz-se necessário a utilização de cursos para lidar com esses *softwares*, já que possuem um certo grau de complexidade para os usuários.

Desse modo, este artigo apresenta um estudo numérico de *estruturas hiperestáticas*, que compõem a maioria dos projetos da construção civil, buscando ter à disposição uma ferramenta gratuita capaz de calcular as reações dos vínculos e os deslocamentos de *estruturas hiperestáticas* no plano e, ainda, será determinado algumas condições para tornar a ferramenta de fácil uso do usuário. Para tal, com o conhecimento dos métodos de análise e dispondo do *software* Microsoft Excel®, é possível desenvolver uma planilha eletrônica como uma ferramenta numérica para o cálculo de estruturas. Esse desenvolvimento será baseado a partir da análise matricial de estruturas, mais especificamente pelo método da Rigidez Direta, sendo este a transição dos métodos manuais de cálculo para os modelos atualmente desenvolvidos nos *softwares* de cálculo estrutural.

Tal conteúdo de análise de estruturas é essencial para o aprendizado dos métodos modernos de cálculo estrutural já que é através da análise matricial de estruturas que ganhamos base para o estudo do *método dos elementos finitos*.

2 DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA

No presente artigo será desenvolvida uma planilha eletrônica para a resolução de estruturas hiperestáticas, fazendo o uso do Método da Rigidez Direta. O método consiste na resolução da Eq. (1):

$$F_{1 \times n} = k_{n \times n} \times d_{n \times n} \quad (1)$$

onde F é a matriz dos esforços aplicados nos nós da estrutura, k é a matriz de rigidez da estrutura, d é a matriz dos deslocamentos da estrutura e n é o número de graus de liberdade não restringidos da estrutura.

A Equação 1, para sua resolução, é reduzida à ordem n , mas antes disso sua ordem é igual ao número de graus de liberdade totais, tanto restringidos quanto não restringidos. Essa redução é necessária pois as condições de contorno que restringem os graus de liberdade fazem com que existam linhas e colunas nulas na matriz, tornando-a um sistema possível e indeterminado. Com o sistema reduzido, não haverá linhas ou colunas nulas e assim, o sistema será possível e determinado. A resolução da equação 1 apresentará os deslocamentos dos nós não restringidos da estrutura, e com esses deslocamentos pode-se calcular as reações que impedem os deslocamentos dos nós que foram restringidos. Após todas as reações tornarem-se conhecidas, torna-se possível gerar os diagramas dos esforços internos, necessários para o futuro dimensionamento da nossa estrutura, no caso de estruturas isostáticas internamente.

A montagem da equação 1 se inicia com a discretização de uma estrutura em nós e elementos, como mostra a Fig. (1):

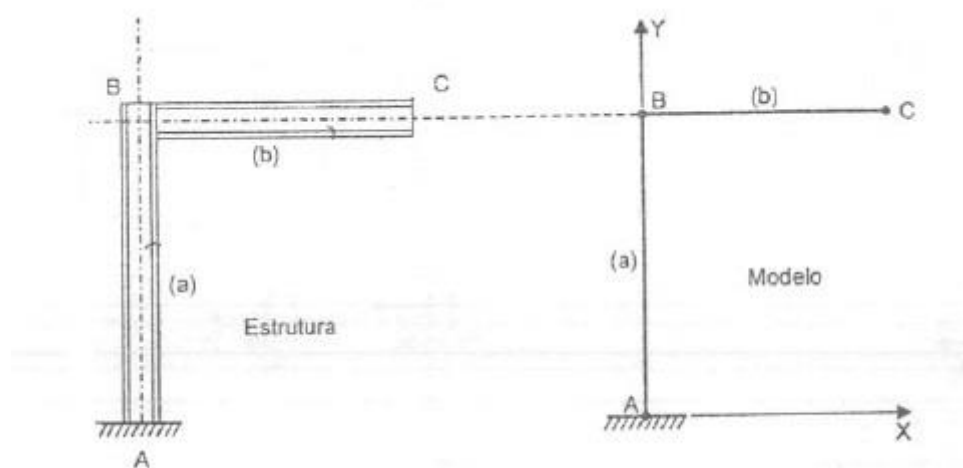


Figura 1. Discretização de estrutura para desenvolvimento do método da rigidez direta.

Com a discretização da estrutura, deve-se numerar os nós, os elementos e arbitrar a direção dos elementos, sendo cada um deles ligado por um nó inicial e um nó final, como mostrado nas Fig. (2) e Fig. (3).

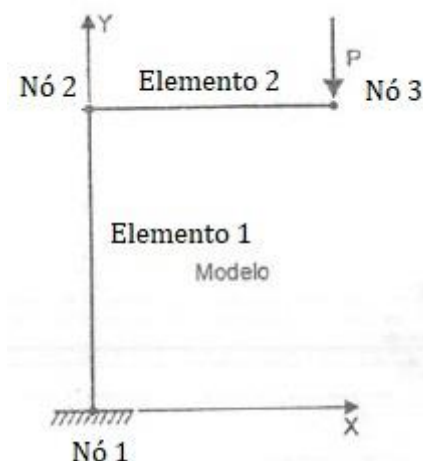


Figura 2. Numeração dos nós e dos elementos.

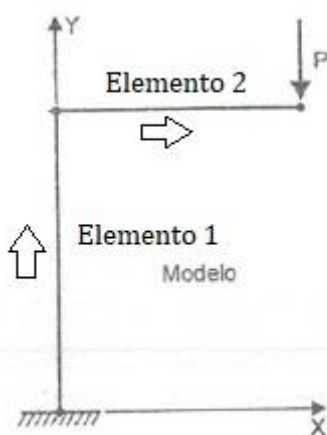


Figura 3. Direção dos elementos.

Observando-se a Figura 3, as direções apresentadas para os elementos 1 e 2 implicam que: para o elemento 1, o nó inicial é o nó 1 e o nó final é representado pelo nó 2, enquanto que para o elemento 2, o nó 2 se torna o inicial e, conseqüentemente, o nó 3 se torna o nó final. Além disso, pode-se observar o eixo de coordenadas XY, que será chamado de eixo global da estrutura. Deve-se lembrar que cada elemento também possui um eixo de coordenadas próprio, chamado de eixo local. O eixo local x do elemento é paralelo ao elemento, enquanto o eixo local y é perpendicular ao elemento. Adota-se em letra maiúscula os eixos globais, e em letra minúscula, seguido do número do elemento como referência (em subscrito), os eixos locais.

Dando continuidade ao desenvolvimento do método, deve-se em seguida calcular a matriz de rigidez local de cada elemento. Os termos dessa matriz variam de acordo com os tipos de nós da estrutura. Para o desenvolvimento da planilha, será considerado que todos os elementos possuem seus nós como ligações rígidas, até porque é extremamente difícil reproduzir um elemento com extremidades rotuladas, quando até o atrito entre dois elementos pode gerar esforços que caracterizam uma ligação rígida (McCormac, 2009). Portanto, a

matriz de rigidez local de cada elemento (matriz $[re]$), terá sua disposição de acordo com a Fig. (4).

$$[re] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 4. Matriz de rigidez local de cada elemento.

Cada elemento da estrutura terá uma matriz correspondente a essa, onde: E = módulo de elasticidade do material do elemento; A = área da seção transversal do elemento; I = momento de inércia da direção do eixo z de cada elemento e L = comprimento do elemento.

Os termos das matrizes de rigidez $[re]$ devem ser ainda rotacionados para que todos os elementos estejam na direção global da estrutura, nos dando a matriz $[rg]$. A rotação dessa matriz é realizada através da Eq. (2):

$$[rg]_{6 \times 6} = [\beta e]_{6 \times 6}^T \times [re]_{6 \times 6} \times [\beta e]_{6 \times 6} \quad (2)$$

Na Eq. (2), pode-se observar o termo $[\beta e]$. Este termo representa a matriz de Rotação de cada elemento na ordem 6, responsável pela rotação dos termos da matriz de rigidez. Na Fig. (5), pode-se ver a matriz de rotação $[\beta e]$:

$$[\beta e] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 5. Matriz de rotação de cada elemento.

Onde α é o ângulo formado entre o eixo local x de cada elemento para o eixo global x.

Após calculadas as matrizes de rigidez globais de cada elemento, deve-se somar as mesmas afim de obter a matriz de rigidez global da estrutura, chamada matriz $[R]$. Para somar as matrizes de cada elemento, é necessário que todas possuam a ordem da estrutura. Segue, nas figuras de 6 a 9, o “espalhamento” das matrizes de cada elemento para a ordem da estrutura.

$$[rg]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{11} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{12} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{21} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{22} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figura 6. Matriz de rigidez global do elemento 1.

Após a rotação das matrizes locais, tem-se as matrizes globais de cada elemento. Cada um dos colchetes, apresentados na Fig. (6), são matrizes menores de ordem 3. Na figura seguinte, observa-se a mesma matriz do elemento 1, porém na ordem da estrutura. Utilizando-se como exemplo a estrutura da Fig. (1), verifica-se que a estrutura possui 3 nós e, portanto, 9 graus de liberdade (duas translações e 1 rotação para cada nó). Dessa forma, a matriz de rigidez da estrutura deverá ter ordem 9.

$$[rg]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{11} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{12} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{21} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A1_{22} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figura 7. Matriz de rigidez global do elemento 1 na ordem da estrutura.

O colchete com apenas o número zero representa uma matriz nula de ordem 3. Ao repetir o processo para o elemento 2, tem-se nas Fig. (8) e Fig. (9) as matrizes de rigidez global do elemento 2 e de rigidez global do elemento 2 na ordem da estrutura.

$$[rg]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A2_{11} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A2_{12} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A2_{21} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A2_{22} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figura 8. Matriz de rigidez global do elemento 2.

$$[rg]_{2 \times 9} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & A_{211} & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & A_{212} & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{221} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & A_{222} & \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figura 9. Matriz de rigidez global do elemento 2 na ordem da estrutura.

Observa-se na Fig. (9) que a matriz teve uma disposição diferente da apresentada na Fig. (7). Isso se dá porque o elemento 2 está entre os nós 2 e 3.

Dessa forma, ao somar as matrizes apresentadas nas Fig. (7) e Fig. (9), teremos a matriz de rigidez da estrutura, apresentada na Fig. (10).

$$[R]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{111} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{112} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{121} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{122} + A_{211} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{122} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & A_{221} & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & A_{222} & \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Figura 10. Matriz de rigidez da estrutura.

Em seguida, deve-se montar a matriz dos esforços. Existem dois tipos de esforços a serem considerados: aqueles aplicados diretamente nos nós e os que são aplicados ao longo do comprimento do elemento. Os esforços que são aplicados diretamente nos nós formam uma matriz coluna onde cada linha representa um grau de liberdade da estrutura. Pode-se observar na Fig. (11) como seria a matriz dos esforços aplicados nos nós da estrutura da Fig. (1).

$$\{Fnós\} = \begin{bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ M_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ M_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

Figura 12. Matriz dos esforços aplicados nos nós da estrutura.

Onde: Fx_1 = esforço aplicado no nó 1 com a direção global X; Fy_1 = esforço aplicado no nó 1 com a direção global Y; M_1 = momento aplicado no nó 1; para os elementos seguintes, pode-se observar que apenas o número subscrito se altera, esse número é referente ao nó da

estrutura. Portanto, na sequência, tem-se os esforços da direção X, da direção Y e o momento aplicados nos nós 2 e 3.

No método da rigidez direta, a discretização da estrutura transforma a análise de um elemento contínuo em uma análise de parâmetros nodais (Soriano, 2005). Dessa forma, deve-se considerar os carregamentos ao longo de um comprimento como se estivessem aplicados somente nos nós. Esse processo é denominado “cálculo do vetor de engastamento perfeito”. Existem diversos tipos de carregamentos aplicados no elemento, porém, para o presente artigo, serão definidos apenas carregamentos distribuídos constantes e perpendiculares em cada elemento. O vetor de engastamento perfeito, denominado por $\{poe\}$ é dado pela Fig. (13).

$$\{poe\} = \begin{bmatrix} 0 \\ wL/2 \\ wL^2/12 \\ 0 \\ wL/2 \\ -wL^2/12 \end{bmatrix}$$

Figura 13. Vetor de engastamento perfeito local.

Onde: w = carregamento distribuído ao longo do elemento; L = comprimento do elemento.

Cada linha da matriz $\{poe\}$ representa a direção de um grau de liberdade do elemento local. Esse vetor ainda deve ser rotacionado para o eixo global da estrutura. O cálculo desta rotação se dá pela Eq. (3).

$$\{pog\} = [\beta e]^T \times \{poe\} \quad (3)$$

Logo em seguida, as matrizes $\{pog\}$ de cada elemento devem ser “espalhadas” para o vetor com a ordem da estrutura, e posteriormente somadas, assim como foi realizado para as matrizes de rigidez globais de cada elemento. Somando-se todos os vetores de engastamento perfeito, já com a ordem da estrutura, teremos a matriz $\{Fbarras\}$. Na sequência, somando-se as matrizes $\{Fnós\}$ e $\{Fbarras\}$, teremos a matriz dos esforços da estrutura. Como mostra a Eq. (4).

$$\{F\} = \{Fnós\} + \{Fbarras\} \quad (4)$$

Agora, com a matriz de rigidez da estrutura e a matriz dos esforços prontas, deve-se aplicar as condições de contorno para a resolução do sistema, gerando-se a matriz dos deslocamentos $\{U\}$. A aplicação das condições de contorno, consiste em excluir as linhas e colunas referentes aos graus de liberdade estringidos. Segue na Fig. (14) um exemplo da aplicação das condições de contorno.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix}$$

Figura 14. Exemplo de aplicação das condições de contorno.

Na Fig. (14), tem-se a aplicação das condições de contorno, supondo-se que o nó seja um engaste e que no nó 3 haja um apoio móvel no eixo X. Isso faz com que as linhas e colunas de numeração 1,2,3 e 8 sejam excluídas do nosso sistema, resultando em um novo sistema como na Fig. (15).

$$\begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{49} \\ k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{59} \\ k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{69} \\ k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{79} \\ k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{99} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_9 \end{bmatrix}$$

Figura 15. Sistema após a aplicação das condições de contorno.

Dessa forma pode-se calcular os deslocamentos não restringidos dos nós. Sabe-se que os graus de liberdade restringidos têm deslocamentos iguais a zero. Assim, pode-se montar novamente a matriz contendo os deslocamentos de todos os graus de liberdade.

Para calcular as reações nos vínculos da estrutura, deve-se verificar quais foram os deslocamentos restringidos e, na linha desse deslocamento, realizar a Eq. (5):

$$R_n = (k_n \times u) - f_n \quad (5)$$

Onde: R_n = reação do grau de liberdade de número n ; k_n = linha n da matriz de rigidez da estrutura; u = matriz dos deslocamentos e f_n = esforço no grau de liberdade n .

3 DESENVOLVIMENTO DA PLANILHA

Realizado o desenvolvimento do método, será apresentado nesta etapa a formulação para o desenvolvimento da planilha. Grande parte dos *softwares* são baseados em um input (insumo ou entrada), um procedimento (que neste caso envolve um método numérico) e um output (saída ou produto) como mostra a Fig. (16).

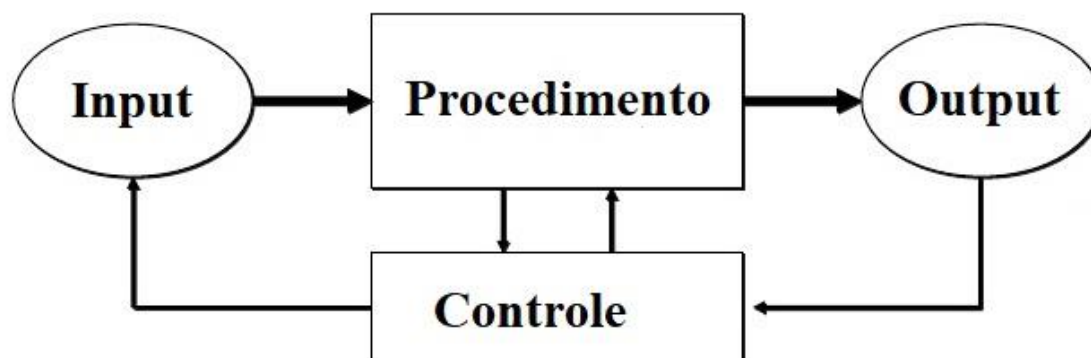


Figura 16. Fluxograma do sistema input/output.

Para o desenvolvimento da planilha, os inputs (dados de entrada) serão os números de nós, suas respectivas posições no plano, números de elementos, nós inicial e final de cada elemento, as propriedades físicas e geométricas dos elementos, os esforços aplicados na estrutura e os tipos de vínculos nos nós. Com base nestes dados de entrada, o procedimento desenvolvido calcula outras informações necessárias, como comprimento e inclinação dos elementos, além de calcular as matrizes necessárias para os cálculos. O primeiro output gerado é a matriz dos deslocamentos, que passa novamente pelo procedimento e traz o segundo output, que é o vetor contendo os valores das reações da nossa estrutura.

Em decorrência de algumas limitações encontradas pelos autores na formulação do procedimento no Excel, tornou-se necessário impor alguns limites iniciais para a ferramenta. Para implementação computacional, o espalhamento da matriz de rigidez global dos elementos para a ordem da estrutura, segundo Martha (2010), pode ser feito através de um vetor de espalhamento e que, juntamente com outras técnicas, otimizam o sistema com o objetivo de melhor funcionamento do próprio método numérico e também para otimização da memória. No entanto, as condições das funções envolvendo matrizes no Excel dificultaram esta etapa, sendo necessária outra maneira para o desenvolvimento do espalhamento dos vetores.

Nesta abordagem, foi necessário determinar um número máximo de nós e de elementos da estrutura, já que a montagem das matrizes e os respectivos espalhamentos tiveram de ser pré-configurados através de condições SE em uma aba exclusiva da planilha denominada “Vetores Espalhados”. Não só esta etapa se tornou dependente de um número máximo de nós e de elementos, até porque, devido a esta limitação, todo o procedimento foi pré-configurado para mostrar os resultados a partir de condições SE.

Montadas as matrizes dos esforços e de rigidez da estrutura, a fase de aplicação das condições de contorno foi realizada através de uma rotina, onde os elementos que devessem

ser excluídos do sistema, tivessem sua respectiva célula com valor “FALSO”, e para realizar a limpeza desses dados, a rotina gravada com o uso de VBA copia as células com valor diferente de “FALSO” para um novo espaço da planilha. A partir desses dados, que são somente os necessários para o cálculo dos deslocamentos, o procedimento faz o cálculo do inverso da matriz de rigidez da estrutura. Novamente foram encontradas dificuldades para os autores, já que era necessário selecionar as células que iriam receber a matriz inversa do sistema. Nesta etapa do procedimento, foi necessário que se calculasse todas as probabilidades de matrizes inversas separadamente, gerando múltiplos resultados, onde o procedimento selecionaria somente os corretos e os separaria dos demais para apresentá-los posteriormente, sendo este o primeiro output, citado anteriormente. Na sequência, na própria apresentação dos resultados, calculam-se as reações baseadas na matriz de rigidez da estrutura, na matriz dos esforços e na matriz dos deslocamentos.

Devido as dificuldades já citadas e também por ser a primeira versão da planilha, a mesma ficou limitada a trabalhar com, no máximo, 10 nós e 20 elementos, considerando apenas ligações rígidas, como já citado, e também que os carregamentos aplicados ao longo dos elementos fossem apenas distribuídos, de forma constantes e perpendiculares ao elemento. Mesmo que, por enquanto, seja possível somente para estruturas pequenas, é possível expandir a planilha para que a mesma funcione com mais nós, com mais elementos, com outros tipos de ligações e, inclusive, novos tipos de carregamentos ao longo dos elementos. Essa expansão se trata apenas de adaptações, já que a metodologia para a resolução das estruturas já foi implementada.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM A PLANILHA

Buscando verificar a funcionalidade da planilha, foram comparados os resultados gerados com o *software* Ftool®. O problema desenvolvido é apresentado na Fig (17).

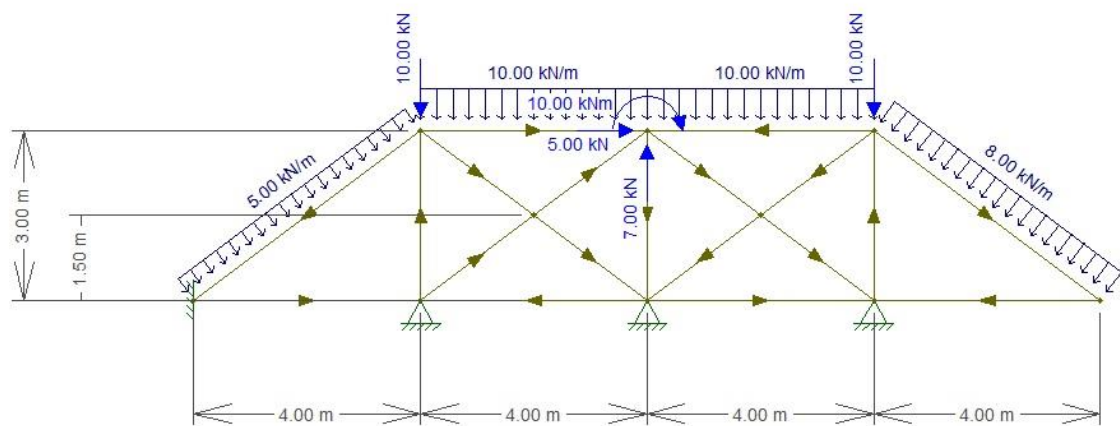


Figura 17. Estrutura gerada pelo *software* Ftool® para comparação dos resultados.

O procedimento se inicia na aba “Dados de Entrada”, inserindo-se informações como: número de nós, posição dos nós, número de elementos, nós inicial e final de cada elemento, além das propriedades físicas e geométricas dos elementos. Para tal, deve-se numerar os nós e os elementos da estrutura da Fig. (17), como pode-se observar na Fig. (18).

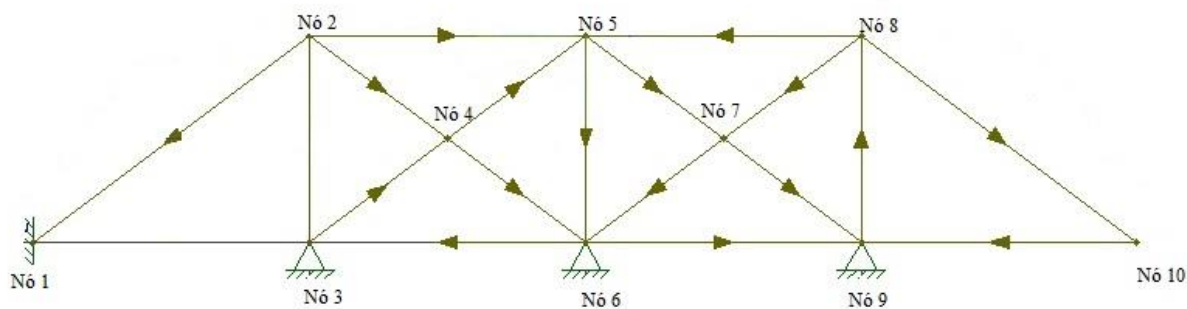


Figura 18. Estrutura com os nós numerados.

Com base na numeração destes nós e arbitrando-se os nós inicial e final de cada elemento, preenchemos a aba “Dados de Entrada”, de acordo com a Fig. (19).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Dados de Entrada																				
2																					
3																					
4																					
5																					
6	Nó	Pos. X	Pos. Y	Tipo de Apoio	Forças X	Forças Y	Momentos														
7	Nó 1	0 m	0 m	Engaste																	
8	Nó 2	4 m	3 m	Livre																	
9	Nó 3	4 m	0 m	Fixo																	
10	Nó 4	6 m	1,5 m	Livre																	
11	Nó 5	8 m	3 m	Livre	5 kN	7 kN	-10 kNm														
12	Nó 6	8 m	0 m	Fixo																	
13	Nó 7	10 m	1,5 m	Livre																	
14	Nó 8	12 m	3 m	Livre																	
15	Nó 9	12 m	0 m	Fixo																	
16	Nó 10	16 m	0 m	Livre																	
17																					
18																					
19																					
20																					
21																					
22																					
23																					
24																					

Barras	Nó Inicial	Nó Final	L	A	Ix	E	θ (Rad)	w
Barra 1	1	2	5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0,6435 rad	-5,00 kN/m
Barra 2	1	3	4 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0 rad	
Barra 3	2	3	3 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-1,5708 rad	
Barra 4	2	5	4 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0 rad	-10,00 kN/m
Barra 5	2	4	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-0,6435 rad	
Barra 6	3	4	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0,6435 rad	
Barra 7	3	6	4 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0 rad	
Barra 8	4	5	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0,6435 rad	
Barra 9	4	6	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-0,6435 rad	
Barra 10	5	8	4 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0 rad	-10,00 kN/m
Barra 11	5	6	3 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-1,5708 rad	
Barra 12	5	7	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-0,6435 rad	
Barra 13	6	7	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0,6435 rad	
Barra 14	6	9	4 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0 rad	
Barra 15	7	8	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0,6435 rad	
Barra 16	7	9	2,5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-0,6435 rad	
Barra 17	8	9	3 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-1,5708 rad	
Barra 18	9	10	4 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	0 rad	
Barra 19	8	10	5 m	0,005 m ²	0,00006 m ⁴	2E+05 MPa	-0,6435 rad	-8,00 kN/m

Figura 19. Aba “Dados de Entrada” da planilha.

As colunas que indicam o comprimento (L) dos elementos e suas respectivas inclinações (θ (Rad)) são preenchidas automaticamente, com base nos nós inicial e final de cada elemento.

Na sequência, o procedimento desenvolvido faz os cálculos das matrizes de rigidez dos elementos (tanto os locais como os globais), faz o espalhamento das mesmas e, em seguida, faz a soma dessas matrizes para nos dar a matriz de rigidez da estrutura. Como mostra a Fig. (20).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI			
1	Forças Nodais			Matriz de Rigidez Global da Estrutura																																		Deslocamentos
2	F1x	7,5		388	97,8	-1,77	-131,6	-97,8	-1,8	-256	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
3	F1y	-10		97,8	76,9	6,974	-97,83	-74,6	2,36	0	-2,3	4,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	M1	-10,42		-1,77	6,97	22,14	1,7712	-2,36	4,92	0	-4,6	6,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	F2x	7,5		-132	-97,8	1,771	659,14	-94,4	17,1	-5,47	0	8,2	-266	192	7,08	###	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
6	F2y	-40		-97,8	-74,6	-2,36	-94,43	572,2	11,7	0	-342	0	192	-154	9,45	0	-2,3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
7	M2	-2,917		-1,77	2,36	4,92	17,056	11,7	58,2	-8,2	-0	8,2	-7,1	-9,4	9,84	0	-4,6	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
8	F3x	0		-256	0	0	-5,467	2E-14	-8,2	784	192	-15	-266	-192	-7,1	0	0	0	-256,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
9	F3y	0		0	-2,31	-4,61	2E-14	-342	-0	192	500	9,4	-192	-154	9,45	0	0	0	0	-2,3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
10	M3	0		0	4,61	6,15	8,2	5E-16	8,2	-15,3	9,4	61	7,1	-9,4	9,84	0	0	0	0	-4,6	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
11	F4x	0		0	0	0	-265,8	192,3	-7,1	-266	-192	7,1	####	0	0	###	-192	-7	-265,8	192	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	F4y	0		0	0	0	192,27	-154	-9,4	-192	-154	-9,4	0	615	0	###	-154	9	192,27	-154	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
13	M4	0		0	0	0	7,0848	9,446	9,84	-7,08	9,4	9,8	0	0	0	78,7	7	-9,4	10	-7,085	-9,4	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	F5x	5		0	0	0	-256,3	0	0	0	0	0	-266	-192	7,08	###	0	22	-5,467	0	8	###	7	###	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	F5y	-33		0	0	0	0	-2,31	-4,6	0	0	0	-192	-154	-9,4	-0	654	0	2E-14	-342	0	###	###	9	0	-2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16	M5	-10		0	0	0	0	4,613	6,15	0	0	0	-7,1	9,4	9,84	22	0	80	-8,2	-0	8	-7	-9	10	0	-5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
17	F6x	0		0	0	0	0	0	0	0	-256	0	-266	192	-7,1	-5	0	-8	1049,6	-0	-22	###	###	-7	0	0	0	###	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18	F6y	0		0	0	0	0	0	0	0	-2,3	-4,6	192	-154	-9,4	0	-342	-0	-3E-14	654	-0	###	###	9	0	0	0	0	-2	5	0	0	0	0	0	0		
19	M6	0		0	0	0	0	0	0	0	0	4,6	6,2	7,1	9,4	9,84	8	0	8	-22,37	-0	80	7	-9	10	0	0	0	0	0	-5	6	0	0	0	0		
20	F7x	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	###	192	-7	-265,8	-192	7	###	0	0	###	###	-7	###	###	7	0	0	0	0	0	0	0	
21	F7y	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	###	-154	-9	-192,3	-154	-9	0	###	0	###	###	9	###	###	9	0	0	0	0	0	0	0	
22	M7	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	9,45	10	-7,085	9,45	10	0	0	79	7	-9	10	-7	-9	10	0	0	0	0		
⏪ Dados de Entrada Planilha Auxiliar MRB3F Pog Vetores Espalhados Matriz de Rigidez Global Limpeza de Dados Resultados ⊕ ⋮ ⏩																																						

Figura 20. Matriz de rigidez global da estrutura.

Vale lembrar que a Fig. (20) não mostra a matriz de rigidez da estrutura em sua totalidade. A matriz de rigidez da estrutura é uma matriz quadrada de ordem 30, e tentar mostrá-la em sua totalidade por meio de figuras a torna praticamente ilegível.

Após a aplicação das condições de contorno, a planilha nos devolve os valores dos deslocamentos nos nós e também os valores das reações nos vínculos, como pode-se observar na Fig. (21).

Deslocamentos		Reações			
		H1	-4,76033 kN	$\delta x8$	0,080136 mm
		R1	11,98308 kN	$\delta y8$	-0,162157 mm
		M1	10,40530 kNm	$\theta8$	-1,555E-04 rad
$\delta x2$	0,038027 mm				
$\delta y2$	-0,078433 mm				
$\theta2$	-4,045E-05 rad				
		H3	0,34803 kN	$\theta9$	-9,576E-05 rad
$\theta3$	-1,056E-05 rad	R3	27,47205 kN	$\delta x10$	-0,097780 mm
$\delta x4$	0,022506 mm			$\delta y10$	-0,543853 mm
$\delta y4$	-0,032020 mm			$\theta10$	6,457E-04 rad
$\theta4$	1,570E-05 rad				
$\delta x5$	0,047485 mm				
$\delta y5$	-0,065983 mm				
$\theta5$	-1,314E-04 rad				
		H6	-6,64186 kN		
$\theta6$	7,194E-06 rad	R6	35,83298 kN		
$\delta x7$	0,013192 mm				
$\delta y7$	-0,044868 mm				
$\theta7$	2,390E-05 rad				

Figura 21. Resultados apresentados pela planilha.

Onde: δx_n = deslocamento na direção global X do nó “n”; δy_n = deslocamento na direção global Y do nó “n”; θ_n = rotação do nó “n”; H_n = reação horizontal do nó “n”; R_n = reação vertical do nó “n” e M_n = reação ao momento do nó “n”.

Na figura, verifica-se que há células não preenchidas tanto na coluna dos deslocamentos quanto na coluna das reações. Isso ocorre porque a planilha já reconhece, baseado nas condições de contorno, se os deslocamentos e reações existem ou não.

Para comparar os resultados da Fig. (21) temos em seguida, nas Fig. (22) e Fig. (23) os resultados obtidos através do *software* Ftool®.

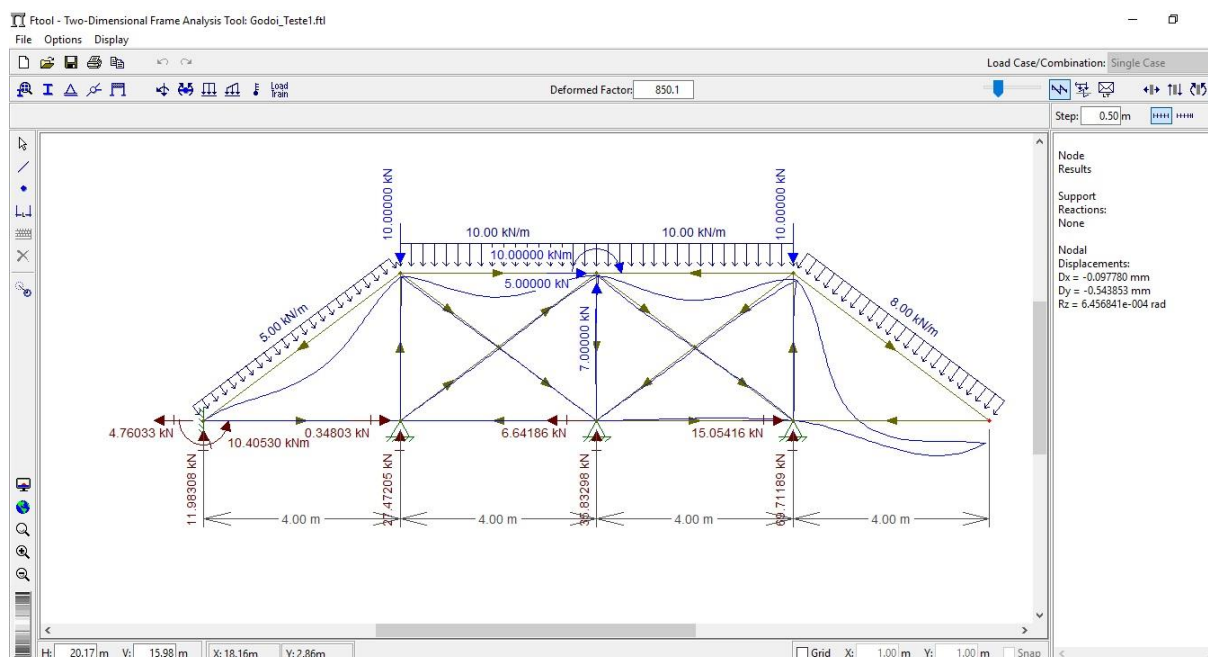


Figura 22. Exemplo de resultado dado pelo Ftool®.

Na Fig. (22), pode-se ver que o Ftool® nos apresenta os resultados graficamente, através das representações dos deslocamentos por linhas e das reações através de vetores com seus respectivos valores, e também, na lateral, os valores dos nós. Para verificarmos os valores nodais, é necessário conferir cada nó separadamente. Para otimizar essa conferência dos resultados foi feito um resumo dos resultados na Fig. (23).

Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5
Node Results Support Reactions: $F_x = -4.76033 \text{ kN}$ $F_y = 11.98308 \text{ kN}$ $M_z = 10.40530 \text{ kNm}$ Nodal Displacements: $D_x = 0.000000 \text{ mm}$ $D_y = 0.000000 \text{ mm}$ $R_z = 0.000000\text{e}+000 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: None Nodal Displacements: $D_x = 0.038027 \text{ mm}$ $D_y = -0.078433 \text{ mm}$ $R_z = -4.044759\text{e}-005 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: $F_x = 0.34803 \text{ kN}$ $F_y = 27.47205 \text{ kN}$ $M_z = 0.00000 \text{ kNm}$ Nodal Displacements: $D_x = 0.000000 \text{ mm}$ $D_y = 0.000000 \text{ mm}$ $R_z = -1.056073\text{e}-005 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: None Nodal Displacements: $D_x = 0.022506 \text{ mm}$ $D_y = -0.032020 \text{ mm}$ $R_z = 1.570187\text{e}-005 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: None Nodal Displacements: $D_x = 0.047485 \text{ mm}$ $D_y = -0.065983 \text{ mm}$ $R_z = -1.314172\text{e}-004 \text{ rad}$
Nó 6	Nó 7	Nó 8	Nó 9	Nó 10
Node Results Support Reactions: $F_x = -6.64186 \text{ kN}$ $F_y = 35.83298 \text{ kN}$ $M_z = 0.00000 \text{ kNm}$ Nodal Displacements: $D_x = 0.000000 \text{ mm}$ $D_y = 0.000000 \text{ mm}$ $R_z = 7.194061\text{e}-006 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: None Nodal Displacements: $D_x = 0.013192 \text{ mm}$ $D_y = -0.044868 \text{ mm}$ $R_z = 2.390490\text{e}-005 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: None Nodal Displacements: $D_x = 0.080136 \text{ mm}$ $D_y = -0.162157 \text{ mm}$ $R_z = -1.554683\text{e}-004 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: $F_x = 15.05416 \text{ kN}$ $F_y = 69.71189 \text{ kN}$ $M_z = 0.00000 \text{ kNm}$ Nodal Displacements: $D_x = 0.000000 \text{ mm}$ $D_y = 0.000000 \text{ mm}$ $R_z = -9.576213\text{e}-005 \text{ rad}$	Node Results Support Reactions: None Nodal Displacements: $D_x = -0.097780 \text{ mm}$ $D_y = -0.543853 \text{ mm}$ $R_z = 6.456841\text{e}-004 \text{ rad}$

Figura 23. Resultados dos nós da estrutura.

Podemos verificar que não há erros na comparação dos resultados gerado pela planilha com os resultados gerados pelo Ftool®, garantindo que a planilha está funcionando corretamente.

5 CONCLUSÃO

Pode-se verificar que a planilha é de fácil manuseio, já que ela consiste apenas em preencher os dados de entrada e utilizar as rotinas de cálculo. Também é possível observar que a mesma está funcionando corretamente, com base no problema desenvolvido. Ainda, com a planilha funcionando corretamente, podemos expandi-la e até fazer adaptações, desde o aumento do limite do número de nós e de elementos, desenvolver carregamentos de deslocamentos prescritos, variações de temperatura e até para resoluções de estruturas espaciais. Outro ponto importante que pode ser observado pelos autores, é que todos os passos para a resolução da estrutura podem ser facilmente observados nas abas do procedimento numérico da planilha, sem a necessidade de imprimir relatórios, tornando-a também uma ótima ferramenta para estudantes.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Universidade Estadual de Maringá (UEM) pela concessão da bolsa

de Iniciação Científica ao acadêmico Rodrigo Marques Godoi para a realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Leet, M., Uang, C., & Gilbert, A., 2014. *Fundamentos da Análise Estrutural*. Bookman.
- Martha, L., 2010. *Análise de Estruturas: Conceitos e métodos básicos*. 1. Elsevier Editora Ltda.
- Mccormac, J., 2009. *Análise Estrutural Usando Métodos Clássicos e Métodos Matriciais*. LTC.
- Soriano, H., 2005. *Análise de Estruturas: Formulação Matricial e Implementação Computacional*. Editora Ciência Moderna Ltda.