



MODELAGEM NUMÉRICA TRIDIMENSIONAL DA FISSURAÇÃO DO CONCRETO UTILIZANDO UMA ABORDAGEM PROBABILÍSTICA

Mariane Rodrigues Rita

Magno Teixeira Mota

Eduardo de Moraes Rego Fairbairn

Fernando Luiz Bastos Ribeiro

mariane_rita@coc.ufrj.br

magnomota@coc.ufrj.br

eduardo@coc.ufrj.br

fernando@ct.ufrj.br

Programa de Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia, Ilha do Fundão, CEP: 21941-909, Rio de Janeiro, Brasil

Jean-Louis Tailhan

Pierre Rossi

jean-louis.tailhan@ifsttar.fr

pierre.rossi@ifsttar.fr

Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR), Université Paris-Est.

Resumo. *Diversas pesquisas têm apontado que o comportamento de estruturas de concreto é intrinsecamente dependente de seu respectivo volume, fenômeno este conhecido como efeito escala. Tal efeito é uma consequência direta do elevado grau de heterogeneidade do material, que é resultante de fenômenos físicos e químicos que ocorrem durante sua produção e endurecimento. Dessa forma, é fundamental que modelos numéricos de fissuração que busquem representar de forma realística o comportamento do concreto sejam capazes de incorporar tal fenômeno, o que pode ser feito por meio de abordagens probabilísticas. Assim, neste traba-*

lho, foi desenvolvido um procedimento numérico adotando-se uma abordagem probabilística para considerar os efeitos da heterogeneidade, levando-se em conta a distribuição aleatória de propriedades mecânicas do material. Fazendo-se uso do Método de Monte Carlo, foram realizadas diversas análises tridimensionais de um caso de estudo, com o intuito de simular numericamente o comportamento do concreto no ensaio de tração direta.

Keywords: Modelagem Numérica, Fissuração do Concreto, Abordagem Probabilística, Método de Monte Carlo

1 INTRODUÇÃO

O comportamento de estruturas de concreto está amplamente relacionado com os efeitos denominados efeitos de escala, ou seja, relacionado ao fato de que a resposta de uma estrutura de concreto depende de seu tamanho ou volume. Sendo assim, é imprescindível que um modelo de fissuração tenha a capacidade de levar em conta estes efeitos que tem relação com a heterogeneidade do material, que é resultante de fenômenos físicos e químicos que ocorrem durante sua produção e endurecimento, da microfissuração decorrente da secagem e retração, e da porosidade resultante da presença de água (Rossi e Richer, 1987; Tailhan et al., 2010).

Na literatura existem diferentes modelos disponíveis que descrevem a fissuração do concreto, considerando desde o seu início até a propagação de fissuras. Dentre os quais, existem os modelos que utilizam uma abordagem probabilística, em que propriedades mecânicas do material são distribuídas aleatoriamente nos elementos da malha, de acordo com suas respectivas distribuições de probabilidade, cujos parâmetros são obtidos através de análise inversa de dados experimentais (Rossi et al., 1992; Rossi e Wu, 1992; Rossi et al., 1994; Tailhan et al., 2008; Tailhan et al., 2012; Tailhan et al., 2013).

Sendo assim, no presente trabalho, utiliza-se este princípio, onde considera-se que cada elemento finito pode ser caracterizado como representativo de um volume de material heterogêneo, cujo o comportamento é governado pelo seu grau de heterogeneidade, que é definido como a razão entre o volume do elemento finito (volume elementar) e o volume do maior agregado componente do concreto (representativo da heterogeneidade do material) (Rossi e Risser, 1987). No que tange à heterogeneidade do material, considera-se ainda que a resistência à tração pode ser distribuída de forma randômica segundo a lei de distribuição de probabilidade contínua de Weibull (Weibull, 1951).

De maneira geral, o objetivo desta pesquisa é a implementação de um modelo macroscópico contínuo 3D que seja adequado para a representação do processo de fissuração de elementos estruturais sob tração uniaxial, considerando a influência dos parâmetros da lei de distribuição de probabilística no comportamento mecânico estrutural. Em que para se obter o resultado estatístico do método proposto, é utilizado o método de Monte Carlo, que consiste na realização de várias simulações do mesmo problema, variando-se a distribuição aleatória da resistência à tração, a fim de fornecer um resultado médio dentre as análises realizadas.

2 MODELO CONTÍNUO PROBABILÍSTICO DE FISSURAÇÃO DO CONCRETO

Na formulação deste modelo, baseado mais recentemente nos trabalhos desenvolvidos por Tailhan et al. (2010), Rastiello (2013) e Tailhan et al. (2013), considera-se um padrão de

fissuras semi-explicito no sentido de que uma visão discreta da fissuração é preservada, ou seja, as propriedades dos materiais são distribuídas de forma discreta na malha. A fissuração elementar é levada em conta a partir de uma relação constitutiva elasto-frágil associada com o processo de criação/propagação de fissuras. No caso de um comportamento local, quando no centro de gravidade de um elemento de volume atinge-se a tensão máxima de tração do concreto então a rigidez deste elemento é considerada como zero, o que fisicamente pode ser descrito como o aparecimento de um orifício na malha de elementos finitos.

No que se refere ao processo de fissuração, o modelo não trata de forma explícita a questão da propagação de fissuras, isto é, não utiliza-se uma lei de propagação de fissuras conforme a mecânica da fratura, porém lida-se com uma criação aleatória de fissuras elementares. Dessa forma, a propagação de macro-fissuras, em um nível macroscópico, é considerada como consequência da fissuração de sucessivos elementos (Tailhan et al., 2010).

De maneira geral, o modelo considera a influência da heterogeneidade e do efeito escala no comportamento global de uma estrutura de concreto, baseando-se em validações realizadas com resultados experimentais, obtidos por Rossi et al. (1994) e Tailhan et al. (2010).

A heterogeneidade do material é caracterizada pela razão entre o volume V do material e o volume do maior grão do agregado V_g . Dessa forma, assume-se que um elemento finito pode ser considerado como representativo de um volume de material heterogêneo e o seu grau de heterogeneidade elementar (r_e) passa a ser definido como a razão entre o volume do elemento finito V_e e o volume do maior agregado V_g (Eq. 1). Considera-se, portanto, que o comportamento mecânico de cada elemento finito depende do seu tamanho e está sujeito à variações aleatórias.

$$r_e = \frac{V_e}{V_g} \quad (1)$$

Com o intuito de descrever a heterogeneidade do material de forma probabilística, propriedades mecânicas do material são distribuídas de maneira aleatória sobre a malha de elementos finitos. Neste trabalho, a resistência à tração do material (f_t) foi distribuída randomicamente segundo a lei de Weibull, que é uma lei de distribuição de probabilidade contínua, com aplicação em diversas áreas da ciência. As demais propriedades mecânicas do concreto foram mantidas constantes para que fosse possível uma análise da influência da variabilidade estatística apenas da resistência à tração.

A lei de distribuição de Weibull vem sendo bastante utilizada para representar materiais com comportamento frágil, desde os trabalhos iniciais desenvolvidos por Weibull (Weibull, 1939; Weibull, 1951). Após isso, trabalhos posteriores foram sendo desenvolvidos relacionando também a resistência de materiais frágeis com o tamanho da amostra, ou seja, o efeito escala (Rossi et al., 1994).

É dito que uma variável aleatória x segue a distribuição de Weibull (com dois parâmetros) se sua função densidade de probabilidade é definida pela função $f(x, b, c) : x \in (0, \infty] \rightarrow \mathcal{R}$, tal como:

$$f(x, b, c) = \frac{b}{c} \left(\frac{x}{c} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^b} \quad (2)$$

onde $b > 0$ é chamado de parâmetro de forma que altera o comportamento da distribuição, por exemplo, para $b < 1$ o fator exponencial da distribuição é predominante, para $b = 1$ ela se reduz a distribuição exponencial e para $b > 1$ o fator polinomial da distribuição é predominante; e

$c > 0$ é chamado de parâmetro de escala da distribuição.

A função de distribuição acumulada $F(x, b, c)$ da distribuição de Weibull é dada pela Eq. 3 e sua função inversa $F^{-1}(x, b, c)$ é dada pela Eq. 4.

$$F(x, b, c) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^b} \quad (3)$$

$$F^{-1}(x, b, c) = c (\ln(1 - x))^{\frac{1}{b}} \quad (4)$$

A esperança matemática μ e a variância σ^2 da distribuição são dadas respectivamente pela Eq. 5 e Eq. 6.

$$\mu = c\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \quad (5)$$

$$\sigma^2 = c^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \mu^2 \quad (6)$$

onde Γ representa a função gama dada pela Eq. 7:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty x^{\eta-1} e^{-x} dx \quad (7)$$

e quando η é um inteiro positivo então $\Gamma(n + 1) = n!$ ou $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

2.1 Geração de Variáveis Aleatórias

Para a geração aleatória da resistência à tração, foi utilizado um método que parte da geração de números aleatórios com distribuição uniforme em $[0,1]$ como base para construir variáveis aleatórias de outras distribuições. Para tal, utilizou-se o chamado Método de Inversão, que se baseia no denominado Teorema Fundamental da Transformação de Probabilidades:

Teorema: Sejam U uma variável aleatória uniforme com distribuição entre $[0,1]$ e X uma variável aleatória com densidade f e função de distribuição F contínua e invertível, então sendo F^{-1} a função inversa da função de distribuição acumulada F , tem-se que $X = F^{-1}(U)$ possui densidade f .

Dessa forma, segundo o teorema sugere, tem-se o seguinte algoritmo geral de inversão:

Algoritmo 1: WEIBULL

```

1 início
2   Gere  $U \sim U(0, 1)$ ;
3   Faça  $X = F^{-1}(U)$ ;
4 fim
5 retorna  $X$ 

```

2.2 Simulação de Monte Carlo

Tendo em vista que a proposta deste trabalho é simular o comportamento de um dado elemento de concreto sob um ensaio de tração uniaxial, de acordo com uma perspectiva probabilística, faz-se necessária a realização de diversas simulações do problema em questão com o intuito de obter um resultado médio com significância estatística. Para isso, é utilizado o método de Monte Carlo, em que são realizadas n simulações do exemplo em estudo, com distribuição aleatória da resistência à tração segundo a distribuição de Weibull.

Cada simulação pode ser vista como uma amostra independente. Dessa forma, o número n de amostras a serem realizadas pelo método pode ser definido a priori, por empirismo, ou o procedimento pode chegar ao fim quando uma determinada tolerância for atingida. No caso deste trabalho, para cada amostra analisada obtém-se como resposta um diagrama carga-deslocamento (P - δ) que é utilizado para controlar a tolerância do método. O valor médio de carga $P_i^{med,n}$ para n amostras no incremento de deslocamento i é calculado conforme a Eq. (8).

$$P_i^{med,n} = \frac{\sum_{j=1}^n P_i^j}{n} \quad (8)$$

onde, j representa o índice correspondente à amostra.

O procedimento de Monte Carlo é encerrado quando a condição descrita pela Eq. (9) for atingida, o que significa dizer que o número n de amostras realizadas até então é suficiente para a convergência do método. Uma esquematização deste procedimento pode ser vista de forma resumida através do Algoritmo 2.

$$\frac{1}{i_{max}} \sum_{i=1}^{i_{max}} |P_i^{med,n} - P_i^{med,n-1}| < tol \quad (9)$$

onde, i_{max} é o número total de incrementos de deslocamento e tol é uma tolerância prescrita.

Algoritmo 2: MONTE CARLO

- 1 inicialização das variáveis;
 - 2 **enquanto** critério de parada não for atingido **faça**
 - 3 calcule a curva (P, δ) para o respectivo exemplo;
 - 4 avale o critério de parada;
 - 5 **fim**
 - 6 **retorna** curva (P, δ) média
-

3 ESTUDO DE CASO

A metodologia abordada neste trabalho é apresentada por meio da simulação de um ensaio de tração direta em um corpo de prova cúbico com dimensões $100 \times 100 \times 100 \text{ cm}$, módulo de Young $E = 20000 \text{ N/mm}^2$, Poisson $\nu = 0.2$ e com resistência à tração distribuída de forma aleatória na malha de elementos finitos segundo a lei de Weibull.

A malha de elementos finitos utilizada (Fig.1) é composta por 10373 elementos tetraédricos e 2315 nós, aproximados por funções de interpolação lineares. A partir desta discretização da malha, que, com base na experiência dos autores, fornece resultados convergentes, obteve-se o volume médio dos elementos $V_e = 0.964d^{-4}m^3$, o volume do maior agregado foi considerado como $V_g = 3.014d^{-4}m^3$ (Rastiello G., (2013)), resultando num grau de heterogeneidade do material de aproximadamente $r_e = 3.187d^{-1}$.

Como condições de contorno tem-se: imposição de deslocamentos nos nós da face superior, restrição de deslocamentos na direção perpendicular nos nós da face inferior e restrição de deslocamento nas duas direções paralelas no nó central da inferior.

Buscando-se avaliar a influência dos parâmetros b e c da lei de Weibull no comportamento da função de distribuição $f(x, b, c)$, utilizada para representar as características do material

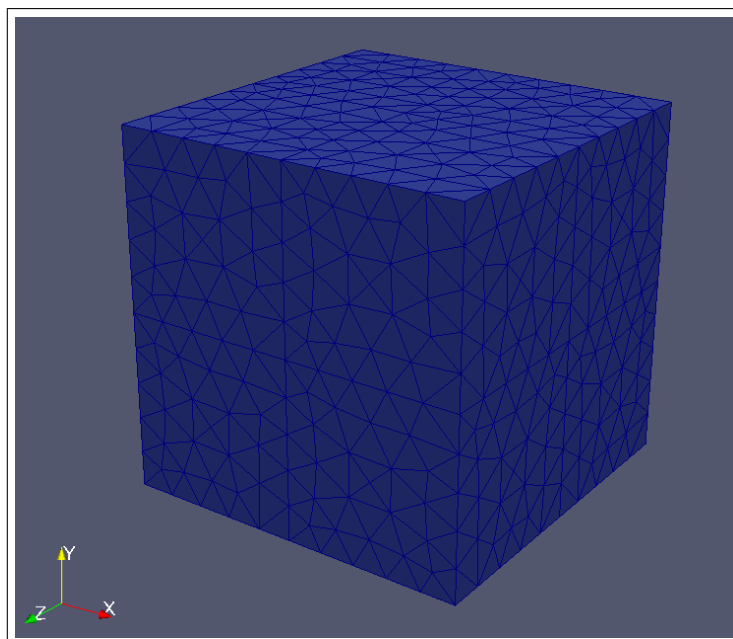


Figura 1: Geometria e discretização da malha de elementos finitos do problema analisado.

a nível elementar (do volume representado por cada elemento finito) e, conseqüentemente, na resposta da curva $P-\delta$, foram realizadas simulações para três pares de parâmetros (b, c) . Verificou-se, também, a eficácia da rotina de distribuição aleatória de resistência à tração através da comparação gráfica da função de densidade de probabilidade de Weibull analítica com os dados obtidos pela sub-rotina de distribuição aleatória.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Avaliação da distribuição aleatória da resistência à tração nos elementos da malha

Nos gráficos abaixo (Figuras 2-4), são comparadas as curvas de densidade de probabilidade de Weibull analítica com as curvas obtidas a partir da distribuição aleatória da propriedade de resistência à tração nos elementos da malha. Esta última denominada aqui como curva do modelo numérico, foi obtida a partir da distribuição de frequência relativa do conjunto de dados aleatórios, distribuídos nos elementos da malha antes da resolução do problema de elementos finitos, dividida pelo intervalo de classe utilizado, cujo valor foi 0.1MPa.

Por meio desta comparação gráfica é possível constatar que o procedimento numérico de distribuição aleatória da resistência à tração do concreto está em conformidade com a distribuição de Weibull, independentemente da variação dos parâmetros b e c , evidenciando boa eficácia da sub-rotina de distribuição aleatória.

Para caracterizar a dispersão ou variabilidade dos dados foi calculada uma medida de dispersão relativa, denominada como coeficiente de variação de Pearson c_{vp} , definido pela Eq. 10, onde a média μ e o desvio padrão σ são calculados de acordo com a Eq. 5 e Eq. 6, respectivamente.

A média, o desvio padrão e coeficiente de variação de Pearson correspondente às três simulações realizadas podem ser vistos na Tabela 1 e mostram que a dispersão dos dados foi crescente, tendo a terceira simulação a maior variabilidade dos dados em relação à média da distribuição.

$$c_{vp} = \frac{\sigma}{\mu} \quad (10)$$

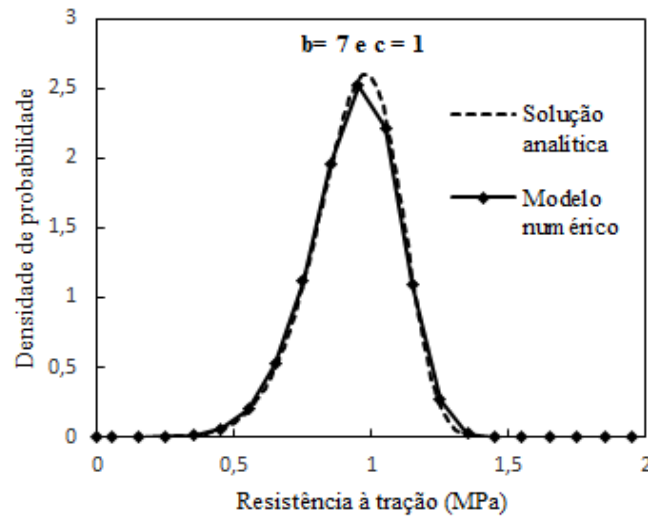


Figura 2: Comparação da curva de distribuição de probabilidade de Weibull analítica e numérica, com parâmetros $b = 7$ e $c = 1$.

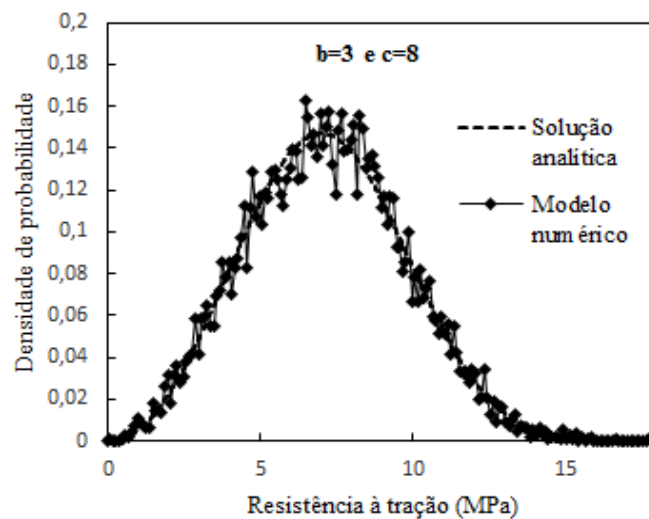


Figura 3: Comparação da curva de distribuição de probabilidade de Weibull analítica e numérica, com parâmetros $b = 3$ e $c = 8$.

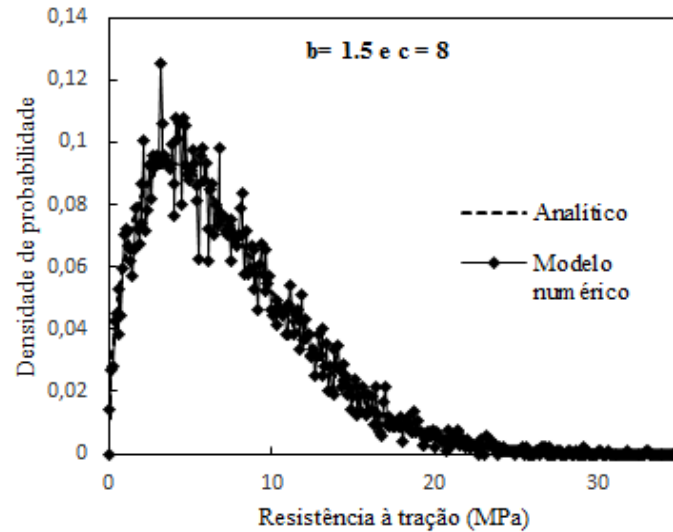


Figura 4: Comparação da curva de distribuição de probabilidade de Weibull analítica e numérica, com parâmetros $b = 1.5$ e $c = 8$.

Tabela 1: Medidas estatísticas da distribuição de Weibull conforme a variação de parâmetros.

Parameters	μ (MPa)	σ (MPa)	c_{vp}
$(b = 7, c = 1)$	0.9354	0.1571	0.1680
$(b = 3, c = 8)$	7.1438	2.5964	0.3634
$(b = 1.5, c = 8)$	7.2219	4.9035	0.6790

4.2 Discussão dos resultados em relação ao comportamento global do problema

Considera-se que, para um dado volume de concreto representado pelo volume do elemento finito, a distribuição de Weibull representa a heterogeneidade do material de maneira equivalente ao material real. Dessa forma, é de suma importância conhecer a influência que uma dada distribuição terá na resposta global do problema. Resposta esta que é considerada, neste trabalho, a partir da avaliação da curva de carga x deslocamento P - δ que caracteriza o comportamento mecânico do problema.

Sendo assim, para cada par de parâmetros (b, c) descritos na seção 4.1 foi realizada uma simulação de Monte Carlo para estudar a resposta global do sistema, buscando associá-la com a respectiva distribuição de Weibull que caracteriza o material. Para cada simulação do método foram realizadas análises de 50 amostras (50 exemplos com diferentes valores aleatórios de f_t), obtendo-se a curva P - δ média para cada uma delas, atendendo-se a uma tolerância de 10^{-5} MN conforme a Eq. (9).

Nas curvas mostradas na Fig. 5, Fig. 6 e Fig. 7, verifica-se que quanto maior a dispersão dos dados da distribuição, definida pelo coeficiente de variação de Pearson (Tabela 1), mais suave é a diminuição da carga no ramo pós-pico da curva P - δ . Tal resultado indica que o c_{vp} pode ser associado com o grau de heterogeneidade do material, uma vez que o processo de fissuração é significativamente influenciado pela variabilidade das propriedades do material.

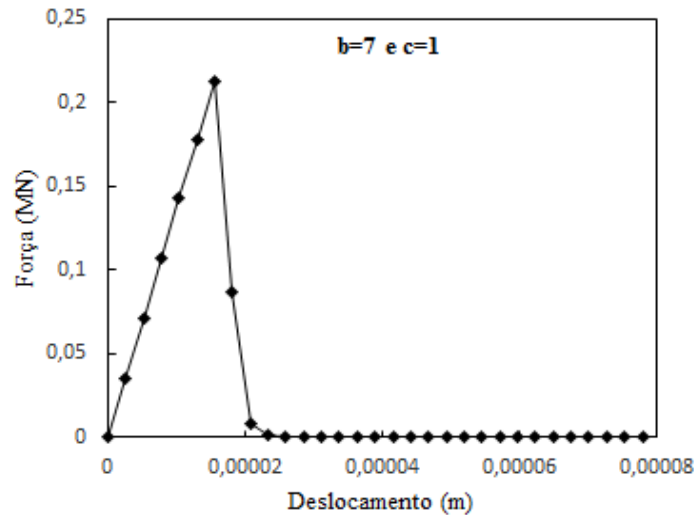


Figura 5: Curva P - δ média correspondente à distribuição de Weibull com parâmetros $b = 7$ e $c = 1$.

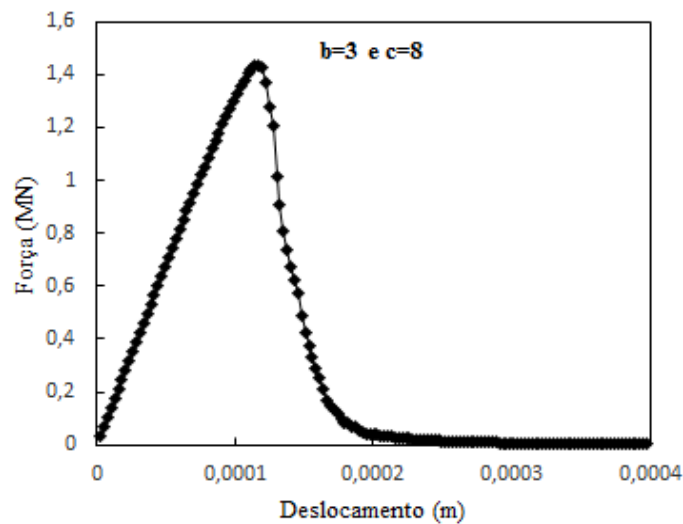


Figura 6: Curva P - δ média correspondente à distribuição de Weibull com parâmetros $b = 3$ e $c = 8$.

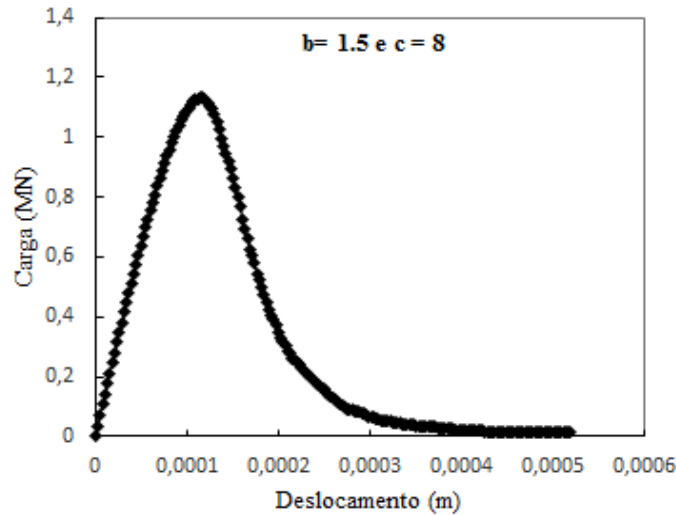


Figura 7: Curva $P-\delta$ média correspondente à distribuição de Weibull com parâmetros $b = 1.5$ e $c = 8$.

Para exemplificar o comportamento das respostas obtidas pelo método de Monte Carlo, são apresentadas na Fig. 8, para $b = 1.5$ e $c = 8$, a curva média (em negrito) juntamente com as respostas obtidas para cada amostra (em cinza). Nota-se que para cada amostra tem-se um processo de fissuração distinto, em conformidade com as dispersões geralmente constatadas em ensaios experimentais.

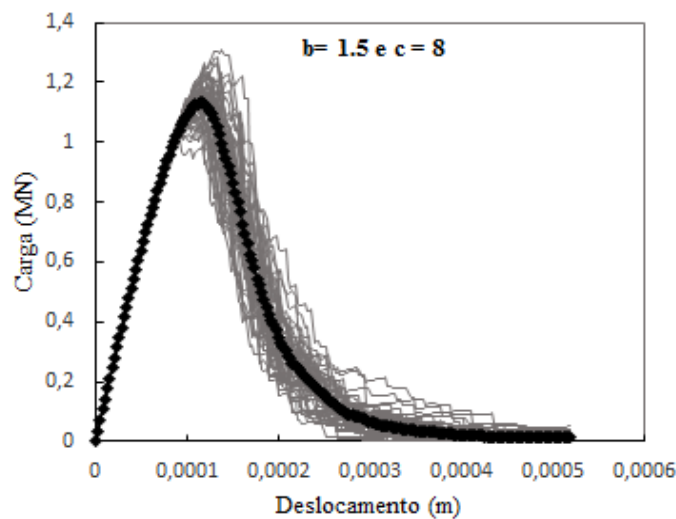


Figura 8: Comportamento global: resposta numérica das amostras realizadas (em cinza) e curva (P, δ) média (em negrito) correspondente à distribuição de Weibull com parâmetros $b = 1.5$ e $c = 8$.

A fim de se observar uma relação entre o valor médio da resistência à tração associada a uma dada distribuição de Weibull (μ) e aquela possivelmente determinada via ensaios experimentais, na Tabela 2 são mostrados os valores de resistência à tração média $f_{t,med}$ calculados a partir da carga máxima da curva $P-\delta$ média obtida para cada par de parâmetros (b, c) , considerando-se que área da seção transversal da peça é 1 m^2 , juntamente com a variação percentual em relação a μ . Nota-se que, para os três casos analisados, quanto maior a dispersão

(Tabela 1), maior a variação entre $f_{t,med}$ e μ , o que pode ser explicado pelo fato de que quanto maior a dispersão nos valores de resistência à tração do material, menor é o nível de carga no qual parte considerável dos elementos estarão danificados, ocasionando a ruptura da peça.

Tabela 2: Comparação entre a resistência à tração média obtida a partir do diagrama $P-\delta$ ($f_{t,med}$) e μ .

Parameters	μ (MPa)	$f_{t,med}$ (MPa)	Variation (%)
$(b = 7, c = 1)$	0.9354	0.2122	-77.3
$(b = 3, c = 8)$	7.1438	1.4337	-79.9
$(b = 1.5, c = 8)$	7.2219	1.1331	-84.3

Na Fig. 9 tem-se, como ilustração do processo de ruptura na malha de elementos finitos, a resposta de uma análise do problema com corte de um quarto da geometria para visualização no interior da peça, onde os elementos em vermelho são considerados como danificados, isto é, nestes elementos a máxima tensão principal de tração σ_1 atingiu a resistência à tração f_t distribuída aleatoriamente ($\sigma_1 > f_t$). Pode-se notar claramente um plano de fissuração aproximadamente no centro da peça, formado pela união de diversos elementos danificados em regiões próximas.

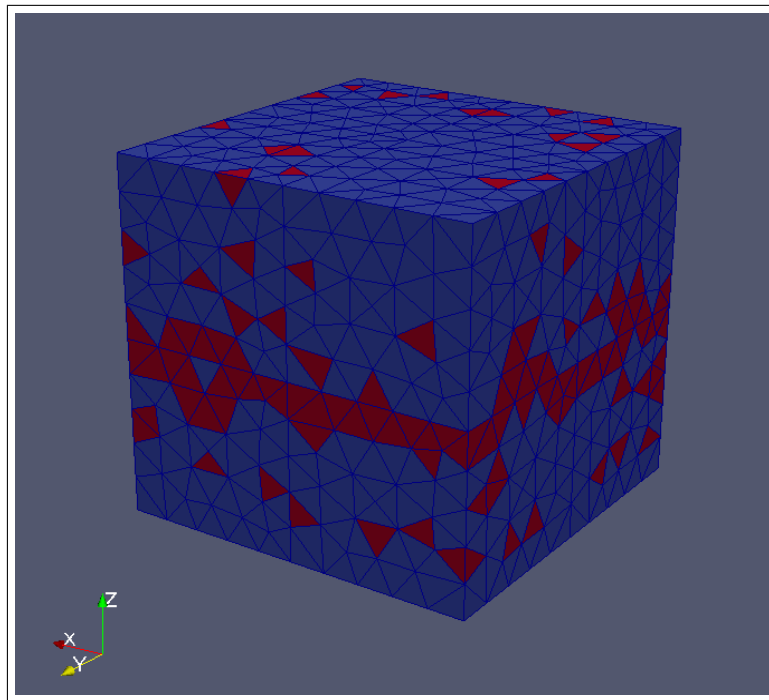


Figura 9: Visualização de um das amostras do exemplo analisado mostrando os elementos danificados.

5 CONCLUSÃO

Utilizando uma abordagem probabilística na modelagem numérica de um cubo de concreto sob tração direta, foi possível observar que a resposta carga-deslocamento do modelo pode ou não apresentar um nítido ramo de amolecimento pós-pico, dependendo da dispersão dos valores

de resistência à tração distribuídos nos elementos da malha, de modo que na medida em que se aumenta o coeficiente de variação da resistência à tração, diminui-se a probabilidade de ruptura frágil da peça, mesmo com o aparecimento de um plano de fissuração bem definido.

De acordo com os estudos realizados, deve-se considerar de forma cautelosa os valores de b e c que melhor descrevem o comportamento do material, caracterizando assim uma distribuição de Weibull apropriada para o problema em questão. Pois, como foi mostrado, diante das variações dos parâmetros, obtém-se resultados significativamente diferentes, não apenas no que se refere à forma da função de distribuição de probabilidade, mas também na resposta global do problema. Dessa forma, estes parâmetros devem ser capazes de representar corretamente o tipo do material utilizado para que se obtenha uma resposta mecânica pertinente.

Além disso, também foi possível constatar uma significativa diferença entre o valor médio da resistência à tração associado à distribuição de Weibull e aquele calculado convencionalmente por meio de ensaios experimentais, de maneira que tal diferença aumenta com o aumento da dispersão da distribuição estatística.

REFERÊNCIAS

- Fairbairn E., Guedes Q., & Ulm J., 1999. An inverse problem analysis for the determination of probabilistic parameters of concrete behavior modeled by a statistical approach. *Materials and Structures*, 32:9–13.
- Rastiello G., 2013. *Influence de la fissuration sur le transfert de fluides dans les structures en béton. Stratégies de modélisation probabiliste et étude expérimentale*. Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Est, IFSTTAR.
- Rossi P., & Richer S., 1987. Numerical modelling of concrete based on a stochastic approach. *Material and Structures*, 20:334-337.
- Rossi P., Wu X., Le Maou F., & Belloc A., 1992. Effet d'échelle sur le comportement du béton en traction. *BLPC*, 182:11–20.
- Rossi P., & Wu X., 1992. Probabilistic model for material behavior analysis and appraisalment of concrete structures. *Magazine of Concrete Research*, 44:271–280.
- Rossi, P., Wu, X., Le Maou, F. & Belloc, A., 1994. Scale effect on concrete in tension. *Materials and Structures*, 27(8):437–444.
- Tailhan J.-L., Rossi P., & Dal Pont S., 2008. Macroscopic probabilistic modelling of cracking processes in concrete structures. *WCCM-ECCOMAS*.
- Tailhan J.-L., Dal Pont S., & Rossi P., 2010. From local to global probabilistic modeling of concrete cracking. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 1:103-115.
- Tailhan, J.-L., Rossi, P., Phan, T. & Foulliaron, J., 2012. Probabilistic modelling of crack creation and propagation in concrete structures: some numerical and mechanical considerations. *In SSCS-2012*.
- Tailhan, J.-L., Rossi, P., Phan, T., Rastiello, G. & Foulliaron, J., 2013. Multiscale probabilistic approaches and strategies for the modelling of concrete. *In FRAMCOS-8*.
- Weibull, W., 1939. A statistical theory of the strength of materials. *Proceedings of The Royal Swedish Institute for Engineering Research*, n.151.

Weibull, W., 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 18(3):293–297.