



ANÁLISE TRANSIENTE NÃO LINEAR DE VIGAS E ESTACAS DE AÇO EM CONTATO BILATERAL COM O MEIO GEOLÓGICO

Everton A. P. Batelo^{1, 2}

Ricardo A. M. Silveira¹

Andréa R. D. da Silva¹

everton.batelo@gmail.com

ricardo@em.ufop.br

andreadiassilva@yahoo.com.br

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Ouro Preto/MG, Brasil – CEP 35400-000

²Instituto de Ciências Agrárias e Ambientais, Departamento de Engenharia Agrícola e Ambiental, Universidade Federal de Mato Grosso. Sinop, MT, Brasil – CEP 78550-000

Resumo. Este artigo apresenta análises transientes não lineares de vigas e estacas em aço sob restrições bilaterais de contato impostas por um meio geológico (solo ou rocha). Os efeitos não lineares geométricos e do material aço são considerados no comportamento das estruturas. Para resolver este problema de contato, é proposta uma metodologia numérica baseada no método de elementos finitos (MEF). Elementos finitos planos não lineares de barra, baseados na hipótese de Euler-Bernoulli, são usados na modelagem da estrutura e elementos de fundação são usados para aproximar o comportamento do meio geológico. Esse meio pode ser considerado discreto ou contínuo, seguindo o modelo de Winkler. Assume-se aqui que esses elementos de fundação reagem às solicitações de tração e compressão, caracterizando assim um problema meio-estrutura com restrições bilaterais de contato. A resposta transiente não linear do problema de interação em questão é obtida através um processo incremental-iterativo, que é resolvido usando os métodos Newmark e Newton-Raphson.

Palavras-Chave: Contato bilateral, vigas e estacas de aço, análise transiente não linear, método da rótula plástica refinado.

1 INTRODUÇÃO

Nas edificações, a subestrutura, ou seja, os elementos estruturais utilizados com a função de transferir a carga de uma superestrutura para o meio geológico (solo ou rocha), normalmente são formados por elementos como vigas, estacas, placas e blocos e conchas. Na engenharia civil, situações onde esses elementos estruturais estão completamente unidos ao meio geológico caracterizam o chamado problemas de contato bilateral. Nesse contexto incluem-se as estacas e vigas embutidas nos solos, as tubulações enterradas e ainda alguns túneis. O estudo desses problemas levando em consideração as não linearidades física e geométrica presentes no sistema meio-estrutura é menos difundido, no entanto eles vêm sendo abordado nos últimos anos por alguns pesquisadores através de análises estáticas e dinâmicas (Fazelzadeh e Kazemi-Lari, 2013; Challamel, 2011; Sofiyev, 2011; Roy e Dutta, 2010; Dash *et al.*, 2010; Manna e Baidya, 2010).

Nos problemas estruturais e geotécnicos não lineares com restrições bilaterais, as propriedades e as características do meio geológico podem influenciar significativamente no equilíbrio do sistema estrutural. No entanto, o comportamento real do solo é de difícil descrição, e ao longo dos anos foram desenvolvidos diferentes modelos matemáticos na tentativa de representá-lo. Dutta e Roy (2002) e posteriormente Wang *et al.* (2005) realizaram uma revisão dos modelos mais comuns de meios elásticos com um, dois e três parâmetros comumente utilizados para descrever o comportamento do solo ao longo do processo de carregamento da estrutura. Ainda no trabalho de Wang *et al.* (2005) pode ser encontrada uma revisão sobre os métodos de solução aproximados para simulação do problema solo-estrutura, onde merecem destaque: o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MEF é mais comumente empregado nos softwares comerciais e no meio acadêmico. Contudo, são menos comuns os trabalhos disponíveis na literatura que fazem uso exclusivamente do MEF para análise de problemas em contato com meio geológico, uma vez que sua utilização na modelagem do solo como um meio tridimensional tende a inviabilizar a análise devido a grande manipulação de dados e o elevado custo de processamento. O MEC, por sua vez, está presente em uma ampla quantidade de trabalhos acadêmicos envolvendo problemas de contato bi e tridimensionais. No entanto, é pouco utilizado na prática de projetos de engenharia.

Outra maneira de se realizar a modelagem do solo em problemas que envolvem a interação solo-estrutura (ISE), que se destaca pela praticidade, é a utilização de molas dispostas ao longo da região de contato da estrutura com o solo. Embora seja alvo de crítica de alguns autores, esse modelo é de grande utilização e se justifica por seu fácil entendimento físico e implementação em um programa computacional de análise estrutural, e por isso será o modelo utilizado para o desenvolvimento das etapas futuras deste trabalho.

Dentre os modelos de molas, os mais simples são os que apresentam apenas um parâmetro para definição das propriedades do material da base elástica (solo). Como por exemplo, o modelo de molas que empregam as hipóteses de Winkler. Outros modelos com dois parâmetros para definição do comportamento do solo, como os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov, já consideram a interação entre as molas, apresentando resultados mais realistas (Silva, 1998). Na Figura 1 tem-se a ilustração desses modelos.

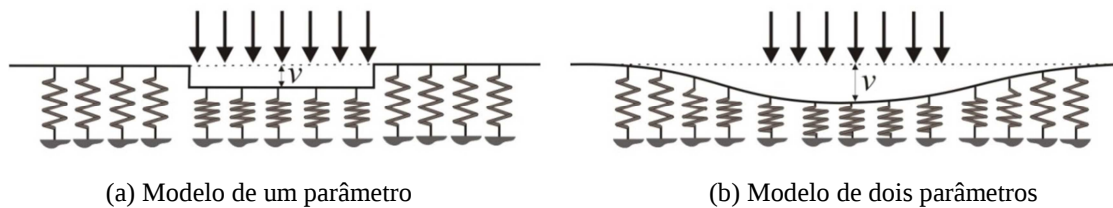


Figura 1. Deslocamento da base elástica

Quando submetido a um carregamento aplicado na estrutura, o solo também se deforma. Essa deformação provoca uma perturbação na estrutura, que pode alterar significativamente a distribuição dos esforços internos no sistema solo-estrutura. Portanto, pesquisas envolvendo análises não lineares de estruturas em contato com o solo merecem uma maior atenção da comunidade científica e também dos projetistas, uma vez que estes tendem a considerar a estrutura como apoiada sobre uma superfície rígida (indeformável).

Portanto, o objetivo principal deste trabalho é a obtenção de uma ferramenta computacional para uma análise numérica mais realista de subestruturas de edificações (vigas e estacas) estruturadas em aço considerando sua interação com o solo, sob ação de carregamentos dinâmicos. Esta pesquisa teve como ponto de partida a tese de doutorado de Silva (2009) e as dissertações de Maciel (2012), Batelo (2014) e, mais recentemente, Rosas (2016), que introduziram alterações no código computacional do CS-ASA (*Computational System – Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009). Como será explicitado nas seções seguintes, é proposta uma metodologia numérica para análise do problema de contato bilateral, mas considerando o acoplamento dos efeitos da não linearidade geométrica e inelasticidade do material (aço) da estrutura.

Como já comentado, o código computacional base utilizado no presente estudo para atender os objetivos desta pesquisa vem do sistema computacional CS-ASA (Silva, 2009), que é baseado no método dos elementos finitos (MEF). Esse sistema foi idealizado para análises numéricas estáticas e dinâmicas não lineares de estruturas metálicas e é todo estruturado em módulos, que permitem maior produtividade nas implementações. Sua linguagem de programação é o Fortran 90/95.

As pesquisas envolvendo análise transiente linear e não linear de estruturas que contribuíram para a atual base computacional do CS-ASA tiveram início com Galvão (2004) sendo consolidada e ampliada posteriormente por Silva (2009) e Batelo (2014). Já as pesquisas envolvendo análise dinâmica com ISE tiveram início com Munhoz (2015) e Rosas (2016). Nesse contexto, vale ainda destacar o trabalho realizado por Maciel (2012), que realizou análises estáticas geometricamente não lineares de estruturas com ISE, e que serviu de base para o trabalho de Rosas (2016).

A próxima seção, Seção 2, discute brevemente a metodologia para análise inelástica não linear de problemas de engenharia civil e apresenta o modelo cíclico de plasticidade utilizado que considera a abordagem da rótula plástica refinada. A Seção 3 descreve os modelos adotados para simular comportamento do solo. A Seção 4 apresenta a formulação do elemento finito usado na modelagem dos sistemas estruturais em contato bilateral e ainda detalha a metodologia utilizada para obter a resposta transiente não linear do sistema solo-estrutura. Finalmente, para validar a metodologia de análise proposta, a Seção 5 avalia a resposta

dinâmica de alguns sistemas estruturais em contato bilateral com meio geológico. Os resultados demonstram que o comportamento dinâmico estrutural pode ser grandemente influenciado pelas características do meio geológico, que podem conduzir ou não a formação de rótulas plásticas no sistema estrutural, além disso, ainda é possível observar o amortecimento histerético introduzidos pelos efeitos inelásticos.

2 NÃO LINEARIDADES DO SISTEMA ESTRUTURAL

Os seguintes efeitos não lineares podem ser destacados nas estruturas de aço: efeitos de segunda ordem (não linearidade geométrica) e inelástico (não linearidade física ou do material). Ainda pode-se ter a presença de outros efeitos não lineares que são provenientes de imperfeições geométricas oriundas da fabricação, armazenagem, transporte das peças e montagem da estrutura, das tensões residuais ocasionadas pelo processo de fabricação dos perfis e da distorção das seções transversais devido à atuação da força cortante.

Os efeitos geometricamente não lineares, ou efeitos segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$, estão relacionados com a deformação da estrutura à medida que esta é carregada. Eles são simulados neste trabalho a partir da formulação não linear proposta por Yang e Kuo (1994), que usaram o referencial Lagrangiano atualizado (RLA) para descrever o movimento da estrutura. Nesse referencial, a configuração de referência é a última configuração de equilíbrio calculada. Portanto, ao final de cada incremento de tempo, o referencial é transferido para a última configuração de equilíbrio obtida, t . De acordo com Bathe (1996), formulações baseadas no RLA, apresentam, em geral, boa eficiência numérica.

A não linearidade física está relacionada com a perda da resistência do material à medida que toda ou parte de uma seção transversal entra em escoamento. No presente estudo, nas análises envolvendo inelasticidade, a avaliação da plastificação é realizada através de um modelo de plasticidade concentrada (método da rótula plástica refinado). Isso significa que quando um ponto crítico de resistência plástica (momento plástico da seção) é alcançado, forma-se uma rótula plástica na seção transversal neste ponto, permanecendo o restante do membro em regime elástico.

2.1 Modelo Cíclico de Plasticidade

Em condições de carga/descarga, o aço pode ser idealizado como um material elastoplástico perfeito e a sua relação de tensão-deformação constitutiva, neste caso, é ilustrada graficamente na Figura 2a. Esse modelo tem representação matemática simples e requer apenas dois parâmetros, o módulo de Young E a tensão de escoamento σ_y . Supõe-se que a plastificação ocorre quando a tensão atinge a tensão de escoamento σ_y . Com a tensão de escoamento atingida, um aumento da carga provoca aumento de deformação, sem, no entanto, o aumento da tensão. Quando ocorre um alívio de carga suficiente, o material retorna para o regime elástico, mantendo-se, contudo, uma deformação residual. Esse nível de plastificação da seção transversal dos membros estruturais, na mesma situação, pode ser controlado por um modelo elastoplástico refinado, como mostrado na Figura 2b. Com esse modelo, o processo gradual de escoamento pode ser monitorado desde o início até a plastificação total da seção transversal, ou seja, até a formação de uma rótula plástica (Chan e Chui, 2000).

Na Figura 2b tem-se o comportamento da seção durante o processo de carga e descarga representado pela sua relação momento-curvatura para um modelo elástico perfeitamente plástico e para o comportamento elastoplástico refinado.

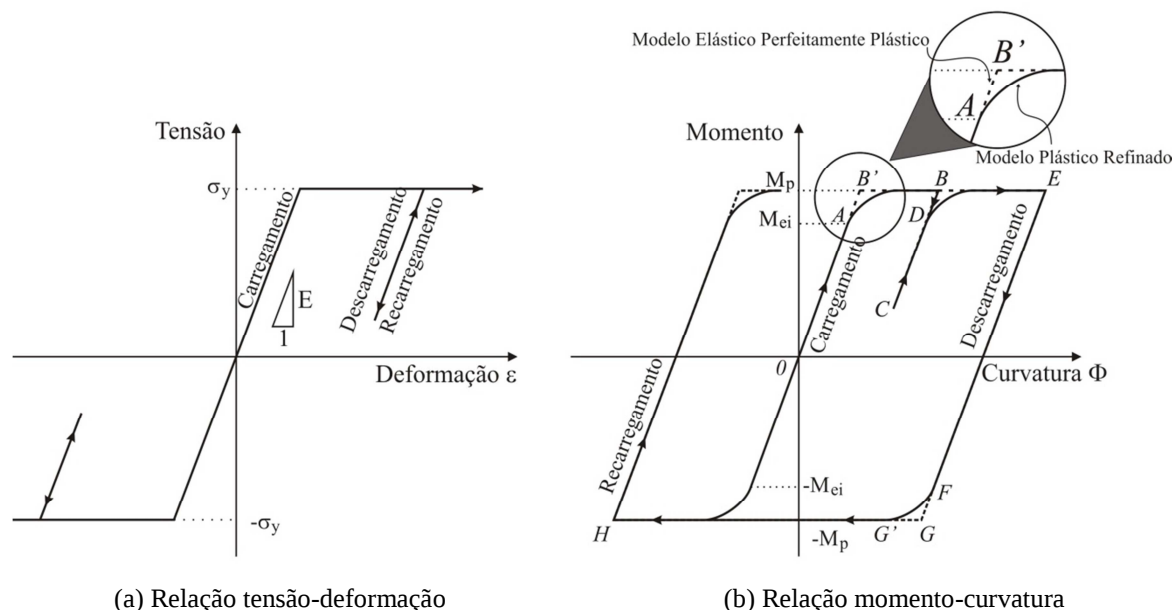


Figura 2. Modelo histerético elástico perfeitamente plástico constitutivo do material

No modelo elástico-perfeitamente plástico, o material da seção permanece em regime elástico ao longo das linhas OAB' sob carregamento. Quando o momento plástico é atingido, $M_p = Z\sigma_y$, onde Z é o módulo plástico, é formada uma rótula plástica, de modo que nenhum momento adicional pode ser absorvido. Desse modo, o percurso continua ao longo da linha horizontal $B'B$. Quando ocorre um descarregamento no ponto B , o sentido da rotação é invertido e a seção retorna ao regime elástico, mas com uma deformação residual. Nesse caso, como ilustrado na Figura 2, a linha BC segue paralela à linha virgem OA . Se recarregado no ponto C , o caminho vai se mover ao longo de CB até atingir o momento plástico M_p , e continuar ao longo da linha BE . Com uma descarga no ponto E , o caminho $EFGG'H$ vai ser seguido, sendo que a linha $GG'H$ indica que se atingiu o momento plástico negativo ($-M_p$).

Quando ocorre a atuação simultânea do momento fletor M e da força axial P , a capacidade plástica da seção é reduzida. Para esse caso, o estado limite último da seção transversal é definido por uma curva de interação momento-força axial.

Através da curva de interação momento-força axial ($M-P$), ou superfície de resistência na análise inelástica, é possível identificar quando ocorre a formação de uma rótula plástica, de modo a permitir a utilização de toda a capacidade resistente do membro antes do limite de resistência ser atingido.

A curva exata da superfície de resistência depende da forma da seção transversal do membro estrutural. Existem na literatura algumas expressões fechadas para a superfície de resistência, no entanto, essas se aplicam somente a seções axialmente simétricas.

Como este trabalho está restrito a estruturas planas e o efeito cisalhante é desprezado, as superfícies de resistências são constituídas apenas pela combinação de um momento e fletor e da força axial. São adotadas para as superfícies de resistência as expressões fornecidas pela

norma britânica BS-5950 (2000) para se definir a variação do momento de plastificação com o esforço normal, M_{pr} , de perfis I ou H compactos e com mesas iguais.

Para o eixo de maior inércia, são definidas as seguintes expressões para o momento plástico reduzido (BS-5950, 2000):

$$M_{pr} = \sigma_y \left[Z - \frac{A^2}{4t_w} \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 \right], \text{ para } \frac{P}{P_y} \leq t_w(D - 2t_f) / A \quad (1a)$$

$$M_{pr} = \sigma_y \left[\left(\frac{A^2}{4B_f} \right) \left(\frac{2B_f D}{A} - 1 \right) + \frac{P}{P_y} \right] \left(1 - \frac{P}{P_y} \right), \text{ para } \frac{P}{P_y} > t_w(D - 2t_f) / A \quad (1b)$$

nas equações anteriores, σ_y é a tensão de escoamento, A é a área da seção do perfil, t_w é a espessura da alma, t_f é a espessura da mesa, B_f é a largura da mesa, D é a altura da seção do perfil e Z é o módulo plástico da seção.

O momento que define a superfície de início de escoamento reduzido, M_{er} varia com o esforço normal P , e é definido como (Chan e Chui, 2000):

$$M_{er} = (\sigma_y - \sigma_r - P / A) W \quad (2)$$

em que, σ_r é a tensão residual e W é o módulo elástico.

As Equações (1a-b) definem a superfície de interação entre força axial e momento fletor usada para avaliar a capacidade resistente da seção.

3 MEIO GEOLÓGICO (MODELOS DE MOLAS)

Uma maneira de se realizar a simulação do solo em problemas que envolvem ISE, que se destaca pela praticidade, é a utilização de molas dispostas ao longo da região de contato da estrutura com o solo. Embora seja alvo de crítica de alguns autores, esse modelo é de grande utilização e se justifica por seu fácil entendimento físico e implementação em um programa computacional de análise estrutural, e por isso será o modelo abordado neste trabalho. A seguir são apresentados os modelos de molas que serão empregados para simular o comportamento do meio geológico.

3.1 Modelo de Molas Discretas

Neste modelo, o solo é representado por molas discretas dispostas ao longo da região de contato (Figura 3), sendo a mola adicionada nos pontos nodais dos elementos finitos. Nesse tipo de representação, a malha de elementos finitos é de fundamental importância. A reação da base em um dado ponto de contato é assumida como proporcional ao deslocamento vertical da estrutura nesse mesmo ponto, independente dos deslocamentos em outros pontos da estrutura que estão em contato com a base, ou seja:

$$r_b = k_d v_b |_{(x_i, y_i)} \quad (3)$$

em que r_b é a reação do solo, k_d é o parâmetro de rigidez da mola (unidade de força por comprimento), v_b é o deslocamento do solo e (x_i, y_i) representa a posição dos nós da estrutura e a base que estão em contato.

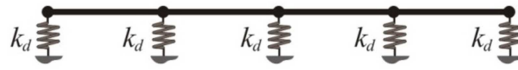


Figura 3. Modelo de molas discretas

3.2 Modelo Contínuo de Winkler

O modelo contínuo de Winkler também representa o meio através de um sistema de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si (Figura 4), no entanto, as molas são conectadas ao corpo do elemento finito, não necessitando que a discretização (nós) coincidam com a posição das molas.

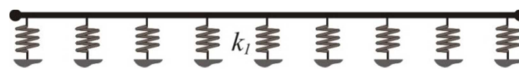


Figura 4. Modelo de molas contínuo

O parâmetro de rigidez do solo para esse modelo (k_l) pode ser determinado através de ensaios de placas, onde é aplicado um carregamento perpendicular à placa e seu deslocamento é medido. Como no modelo anterior, considera-se que a reação da base é proporcional ao deslocamento da placa em um determinado ponto, admitindo o solo como um material elástico, ou seja, que obedece à Lei de Hooke. O valor obtido no ensaio precisará ser corrigido considerando a dimensão e forma da fundação real da estrutura. De posse de k_l , pode-se também obter o valor do parâmetro de rigidez para o modelo discreto, k_d .

Para esse modelo, a reação da base em contato com a estrutura é dada pela expressão:

$$r_b = k_l v_b \quad (4)$$

sendo r_b a reação do solo, k_l o parâmetro de rigidez do solo e v_b o deslocamento.

4 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Para discretização da estrutura em contato com o meio é utilizado o elemento finito reticulado plano de pórtico, limitado pelos nós i e j , com molas fictícias ligadas nas suas extremidades, que se deforma no plano da estrutura, como mostrado na Figura 5.

O comportamento inelástico é restrito às extremidades do elemento finito (pontos nodais) que simulam as rótulas plásticas. O comprimento dessas rótulas plásticas é considerado nulo e a sua deformação é constituída apenas por rotação inelástica. Uma vez formada a rótula plástica, as forças internas na seção transversal devem respeitar a superfície de resistência plástica (superfície de plastificação da seção). O elemento de pórtico plano simula os efeitos da não linearidade geométrica e ainda os efeitos oriundos da base elástica para modelos contínuos. Quando a modelagem do solo se der através do modelo de molas discreto, cada extremidade do elemento finito ainda contará com duas molas de rigidez translacional e uma rotacional.

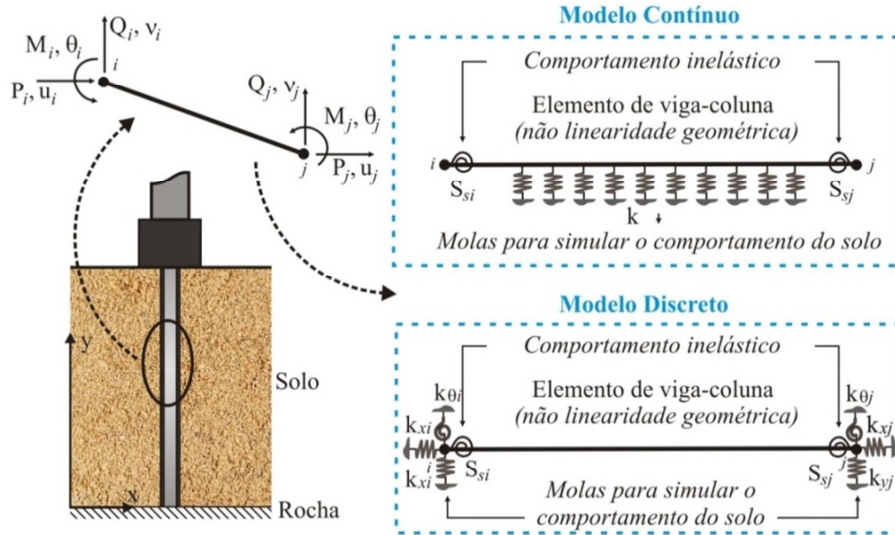


Figura 5. Elemento de pórtico plano em contato com o solo

A formulação generalizada adota o referencial corrotacional, que se refere a um sistema de eixos ortogonais, ligado aos extremos do elemento finito, que se movimenta simultaneamente com a medida que o elemento se deforma. Dessa forma, o cálculo da matriz de rigidez e do vetor de forças internas são obtidos no campo dos deslocamentos naturais, ou seja, daqueles que realmente causam deformação no elemento.

No sistema corrotacional local, a relação força-deslocamento do elemento finito, com os efeitos não lineares geométrico e do material, pode ser escrita na forma incremental (Silva, 2009):

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & S_{si} - S_{si}^2 (k_{jj} + S_{sj})/\beta & S_{si} S_{sj} k_{ij}/\beta \\ 0 & S_{si} S_{sj} k_{ji}/\beta & S_{sj} - S_{sj}^2 (k_{ii} + S_{si})/\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix}, \text{ ou } \Delta \mathbf{f}_c = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u}_c \quad (5)$$

$$\text{com: } \beta = (S_{si} + k_{ii})(S_{sj} + k_{jj}) - k_{ij}k_{ji}$$

em que os subscritos i e j , na Eq. (5), estão relacionados às extremidades do elemento, e o subscrito c indica o sistema de coordenadas utilizado, no caso, o corrotacional. Ainda na equação anterior, E é o módulo de Young, A é a área da seção transversal, L é o comprimento do elemento, ΔP e ΔM são os incrementos, respectivamente, da força axial e do momento fletor, e $\Delta \delta$ e $\Delta \theta$ são os incrementos de deformação axial e rotação nodais.

Os termos da matriz de rigidez para as ações de flexão k_{ii} , k_{ij} , k_{ji} e k_{jj} , são responsáveis por simular os efeitos de segunda ordem. Como já mencionado, optou-se aqui pela formulação geometricamente não linear proposta por Yang e Kuo (1994), onde esses termos são definidos como:

$$k_{ii} = k_{jj} = 4EI/L + 2PL/15 + 4PI/(AL), \text{ e } k_{ij} = k_{ji} = 2EI/L - PL/30 + 2PI/(AL) \quad (6)$$

sendo I o momento de inércia da seção transversal.

No elemento de pórtico plano considerado, como ilustrado na Fig. 5, a rigidez S_s é definida com base em um parâmetro de estado ψ , utilizado para acompanhar a perda de rigidez da seção transversal durante o processo de carga/descarga, isto é (Chan e Chui, 2000):

$$S_s = \frac{6EI}{L} \frac{\psi}{1-\psi} \quad (7)$$

em que E é o módulo de Young, I é o momento de inércia da seção e L é o comprimento do elemento. Já o parâmetro de estado ψ é dado por:

$$\psi = \frac{|M_{pr} - M|}{|M_{pr} - M| + |M - M_{er}|}, \text{ para } M_{er} < M < M_{pr} \quad (8)$$

sendo M o momento fletor atuante na seção, M_{er} o momento de início de escoamento e M_{pr} o momento plástico reduzido.

O desenvolvimento da plasticidade nos membros da seção transversal da estrutura se reflete nas rigidezes das molas mais internas. Considera-se que ψ seja igual a “1” enquanto o momento na seção não atingir o momento de início de escoamento M_{er} , ou seja, quando o material ainda está no regime elástico. Nesse caso, usando a Eq. (7), a seção permanece rígida ($S_s \rightarrow \infty$), com rotação plástica nula. Ao contrário, quando a seção plastifica ($M = M_{pr}$), ψ se reduz a “0” e a rigidez da seção torna-se nula ($S_s \rightarrow 0$), simulando a formação de uma rótula plástica. Para valores de ψ entre 0 e 1 tem-se o comportamento elastoplástico da seção.

Quando a avaliação da interação entre o solo e a estrutura é realizada pelo modelo contínuo, a matriz de rigidez do elemento deve ser somada à matriz de rigidez do meio geológico (solo), $\mathbf{K}_b$, e o mesmo também deve ser feito com o incremento do vetor de forças internas. Assim:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_b \quad (9a)$$

$$\Delta \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_c \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{u} \quad (9b)$$

A matriz de rigidez, $\mathbf{K}$, e o vetor de forças internas, $\mathbf{F}_i$, do sistema estrutural, considerando a interação da estrutura com uma base elástica, são obtidos somando-se a contribuição de cada um dos m elementos finitos utilizados na discretização, ou seja:

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}_{eg} \quad (10a)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i = \sum_m {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{f}_{ieg} \quad (10b)$$

com $\mathbf{K}_{eg}$ e $\mathbf{f}_{ieg}$ sendo, respectivamente, a matriz e o vetor de forças internas de cada elemento no sistema global de coordenadas.

Para formulação com o modelo de molas discretas, a contribuição da base é acrescida diretamente na matriz de rigidez do sistema estrutural $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_b \quad (11)$$

Já o vetor de forças internas nodais incrementais da base elástica é obtido da seguinte forma:

$$\Delta^t \mathbf{F}_{ib} = \mathbf{K}_b \Delta \mathbf{U} \quad (12)$$

4.1 Modelo de molas discretas

Para esse modelo, a intensidade da reação da mola é diretamente proporcional ao seu deslocamento, ou rotação, no ponto nodal i do sistema discreto (Figura 5). Assim, pode-se escrever:

$$r_{xi} = k_{xi} u_i, \quad r_{yi} = k_{yi} v_i \text{ e } M_{\theta i} = k_{\theta i} \theta_i \quad (13)$$

em que r_{xi} , r_{yi} e $M_{\theta i}$ são as reações da base, u_i , v_i e θ_i são os deslocamentos nodais, e k_{xi} , k_{yi} e $k_{\theta i}$ são os parâmetros de rigidez das molas conectadas na estrutura no ponto i .

Considera-se aqui apenas o comportamento linear das molas, e assim o parâmetro de rigidez do solo é constante durante toda análise.

A partir das Equações (13) é possível escrever a energia interna de deformação armazenada pelo trabalho das molas, a qual pode ser utilizado para se obter diretamente as componentes da matriz de rigidez da base elástica, ou seja:

$$\mathbf{K}_{bi} = \begin{bmatrix} k_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\theta i} \end{bmatrix} \quad (14)$$

com, $\mathbf{K}_{bi}$ sendo a matriz de rigidez da base elástica associada ao ponto nodal i . A matriz de rigidez global da base elástica deve considerar a contribuição de todos os m pontos nodais em contato da estrutura com a base, portanto:

$$\mathbf{K}_b = \sum_m \mathbf{K}_{bi} \quad (15)$$

4.2 Modelo contínuo de Winkler

Nesse modelo, a reação incremental do meio geológico é dada pela Eq. (4). Já a energia de deformação para o elemento finito (modelo contínuo) apresentado na Figura 6 é dada por:

$$U_b = \frac{k_1}{2} \int_0^L \Delta u_b^2 dx \quad (16)$$

sendo L o comprimento do elemento.

Para esse elemento ainda é possível relacionar o incremento de deslocamento com os valores de deslocamento nodais desse elemento $\Delta \hat{\mathbf{u}}_b$:

$$\Delta u_b = \mathbf{B}_b \Delta \hat{\mathbf{u}}_b \quad (17)$$

em que a matriz $\mathbf{B}_b$ contém as funções de interpolação de Hermite.

Substituindo (17) em (16), chega-se na expressão da energia de deformação de forma discreta:

$$U_b = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_b^T \mathbf{K}_b^e \hat{\mathbf{u}}_b \quad (18)$$

com a matriz $\mathbf{K}_b^e$ sendo definida a matriz de rigidez da base elástica (solo) do elemento:

$$\mathbf{K}_b^e = \mathbf{C}_b \int_0^L \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_b dx \quad (19)$$

em que L é o comprimento do elemento finito e $\mathbf{C}_b$ é a matriz constitutiva do solo (para o modelo de Winkler linear, $\mathbf{C}_b = k_1$). Da equação anterior é possível obter as componentes da matriz de rigidez, ou seja:

$$\begin{aligned} k_{b(2,2)} = k_{b(5,5)} &= \frac{13C_b L}{35}; k_{b(2,3)} = -k_{b(5,6)} = \frac{11C_b L^2}{210}; k_{b(2,5)} = \frac{9C_b L}{70}; \\ k_{b(2,6)} &= -k_{b(3,5)} = -\frac{13C_b L^2}{420}; k_{b(3,3)} = k_{b(6,6)} = \frac{C_b L^3}{105}; e k_{b(3,6)} = -\frac{C_b L^3}{140} \end{aligned} \quad (20)$$

4.3 Matrizes de massa e amortecimento

A matriz de massa consistente para o elemento de pórtico plano convencional, ou seja, com a hipótese de ligações perfeitamente rígidas, é simétrica e definida como:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

em que A é a área da seção transversal, L é o comprimento do elemento, e ρ é a massa volumétrica (massa por unidade de volume).

De acordo com Kuhl e Crisfield (1999), a ausência de informações relacionadas aos mecanismos de amortecimento das estruturas se reflete na dificuldade da avaliação e geração de parâmetros associados à matriz de amortecimento, quando não se dispõe de um estudo experimental para determinada estrutura. O amortecimento considerado aqui para análise transiente é conhecido como amortecimento proporcional de Rayleigh, que é comumente usado em análises dinâmicas não lineares. Assim, a matriz de amortecimento é definida como sendo uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, isto é:

$$\mathbf{C}_e = \mu_1 \mathbf{M}_e + \mu_2 \mathbf{K}_e \quad (22)$$

sendo μ_1 e μ_2 os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh.

4.4 Solução do problema transiente não linear

Através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) pode-se obter a equação de equilíbrio que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural. Para se determinar a configuração de equilíbrio do sistema solo-estrutura em $t + \Delta t$, como é utilizado o referencial Lagrangeano atualizado, a configuração no instante t é usada como referência para a análise. Adotando-se os procedimentos usuais do MEF, tem-se o campo de deformações e os deslocamentos dos elementos em função dos deslocamentos nodais, sendo possível obter, de uma forma discretizada a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}_{ext}, \text{ ou ainda, } \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i = \lambda(t)\mathbf{F}_r \quad (23)$$

na qual $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$ e $\mathbf{U}$ são, respectivamente, os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais, $\mathbf{F}_{ext}$ representa o vetor de cargas externas, $\mathbf{F}_i$ é o vetor de forças internas, e $\mathbf{F}_r$ é o vetor de forças externas de referência (apenas sua direção é importante) e λ é o parâmetro de carga que estabelece a intensidade desse vetor no instante considerado. Os termos $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema estrutural já com a contribuição do contato com o meio geológico.

Segundo Chopra (1995), as ações geradas durante um abalo sísmico podem ser consideradas como forças de inércia resultantes dos movimentos da própria estrutura. Desse modo, a aceleração de base ou aceleração do solo aparece do lado direito da equação que governa a resposta estrutural dinâmica da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i = \ddot{\mathbf{U}}_g(t)\mathbf{M} \quad (24)$$

em que $\ddot{\mathbf{U}}_g(t)$ é a aceleração do solo, dada por um escalar em um determinado instante t .

De um modo geral, as estruturas se comportam de forma não linear antes de atingirem seus limites de resistência. Assim, a busca por uma melhor representação do comportamento estrutural requer que as fontes de não linearidade sejam consideradas. Como neste trabalho são considerados os efeitos não lineares geométricos e físicos, reescreve-se a Eq. (23) como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \Psi) = \lambda(t)\mathbf{F}_r \quad (26)$$

sendo o vetor $\mathbf{F}_i$ obtido de forma incremental através de formulações que consideram os efeitos de segunda ordem (representados aqui pelos deslocamentos $\mathbf{U}$ e forças internas $\mathbf{P}$) e a inelasticidade do aço (representada pelo parâmetro de plastificação da seção Ψ).

A solução do problema transiente não linear é alcançada por meio de um procedimento incremental e iterativo que combina o método de integração implícito de Newmark com a técnica iterativa de Newton-Raphson.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nessa seção são apresentados resultados numéricos obtidos da solução do problema transiente não linear envolvendo a interação de estruturas com o meio geológico, mais precisamente de vigas e coluna em contato bilateral com o solo ou rocha. Situações práticas envolvendo cargas de impactos e sismos são exploradas.

5.1 Viga engastada e apoiada sobre base elástica

Uma viga engastada-simplesmente apoiada constituída por um perfil HEB 300 e em contato com o solo é ilustrada na Figura 6. Suas propriedades geométricas e físicas são: comprimento $L = 8$ m, módulo de elasticidade $E = 2.134 \times 10^{11}$ N/m², tensão de escoamento $\sigma_y = 285$ Mpa e densidade $\rho = 7849.1$ kg/m³. A viga está apoiada, ao longo do seu comprimento, em uma fundação elástica com rigidez $k_1 = 5 \times 10^5$ N/m². Para a solução numérica deste problema, utilizou-se para a estrutura 20 elementos e o solo foi representado através dos modelos de molas discretas e contínuos de Winkler. A viga foi submetida ao carregamento do tipo impacto também ilustrado na Fig. 6. A Tabela 1 apresenta os resultados para a análise de vibração livre do sistema estrutural em estudo considerando os modelos de molas discretas (MD) e o modelo contínuo de Winkler.

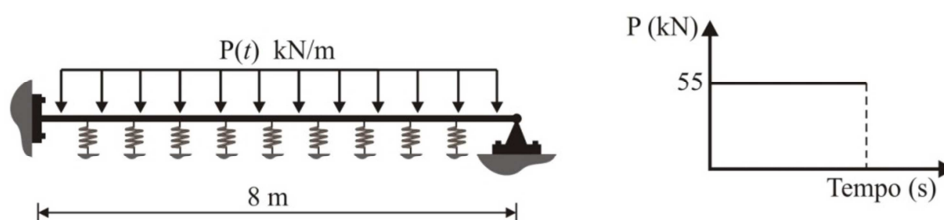


Figura 6. Viga engastada-simplesmente apoiada sobre fundação linear: geometria e carregamento

Tabela 1. Dois primeiros períodos de vibração (s) para a viga sobre base elástica

Modos	SAP 2000	CS-ASA (MD)	CS-ASA (Winkler)
1	0.0368	0.0355	0.3722
2	0.0130	0.0117	0.0123

As análises transientes são apresentadas na Figura 7.

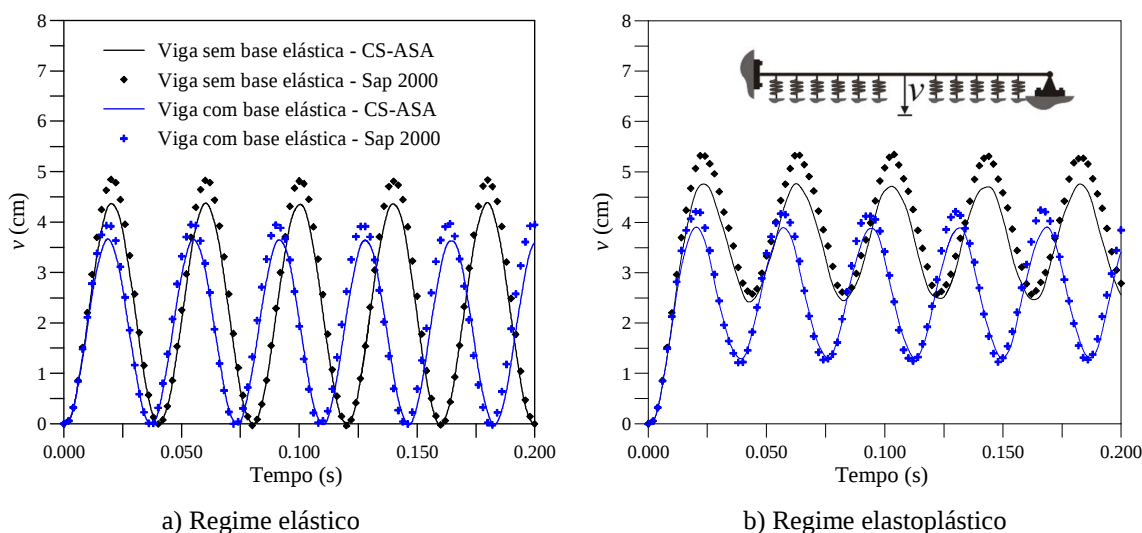


Figura 7. Variação do deslocamento vertical (v) no centro da viga engastada-simplesmente apoiada

As análises foram realizadas considerando o sistema estrutural com comportamento elástico, sem a contribuição da base, e posteriormente com a contribuição da mesma (Fig. 7a).

Já as respostas transientes inelásticas estão na Fig. 7b (estrutura com comportamento elastoplástico). Os resultados apresentados mostram a boa concordância entre as respostas obtidas com o CS-ASA e aquelas do SAP 2000. A base elástica interfere, como esperado, reduzindo as amplitudes dos deslocamentos da viga. As discrepâncias nos picos podem ser justificadas pelas diferentes formulações utilizadas pelo SAP 2000 e o CS-ASA.

Outras análises transientes foram realizadas considerando a variação da rigidez da fundação elástica, (Fig. 8). Através dessa figura, observa-se, como esperado, que as fundações mais rígidas ocasionaram menores deslocamentos e menores períodos de vibração e, a partir de uma determinada rigidez da base, não foi mais possível verificar a formação de rótulas plásticas. Desse modo, verifica-se a influência que o solo exerce sobre a resposta do sistema, e que sua consideração na modelagem estrutural é de grande importância para o comportamento dinâmico do sistema global. Por fim tem-se na Fig. 9 a comparação entre as respostas transientes não lineares para o modelo de molas discretas e para o modelo contínuo de Winkler.

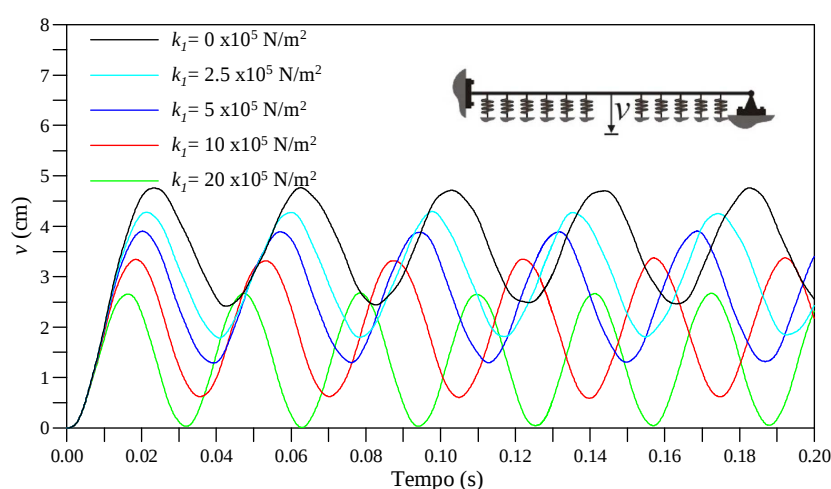


Figura 8. Variação do deslocamento vertical (v) da viga para diferentes valores de k da base

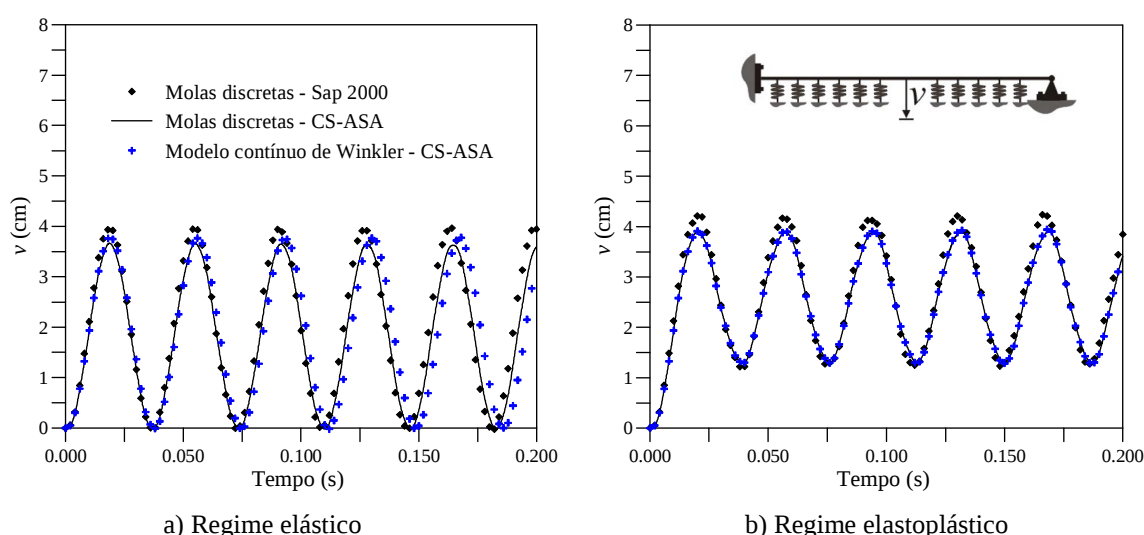


Figura 9. Variação deslocamento vertical (v) da viga para diferentes modelos de base elástica

5.2 Estaca cravada em meio geológico

Este exemplo traz uma estaca de aço cravada em um meio geológico com características distintas (Fig. 10). A estaca de aço é constituída pelo perfil W152x22.5 e suas propriedades geométricas e físicas são: comprimento $L = 6$ m, módulo de elasticidade $E = 1.999 \times 10^{11}$ N/m², tensão de escoamento $\sigma_y = 235$ MPa e densidade $\rho = 7849.1$ kg/m³. A estaca está em contato um solo do Tipo 1 até a profundidade de 2 m e com um solo do Tipo 2 a partir dessa profundidade, sendo as respectivas rigidezes adotadas $k_1 = 1.25 \times 10^3$ N/m² e de $k_2 = 5 \times 10^3$ N/m². Para as análises numéricas realizadas, a estaca foi discretizada em 15 elementos finitos; a base elástica foi modelada através de molas discretas (MD) e usando o modelo contínuo de Winkler. A estrutura foi submetida à ação dos primeiros 15 s da componente (N-S) do sismo El Centro com pico de aceleração escalonado para $\ddot{u}_g = 0.56g$.

A Tabela 2 apresenta os resultados para dois primeiros períodos de vibração da estrutura.

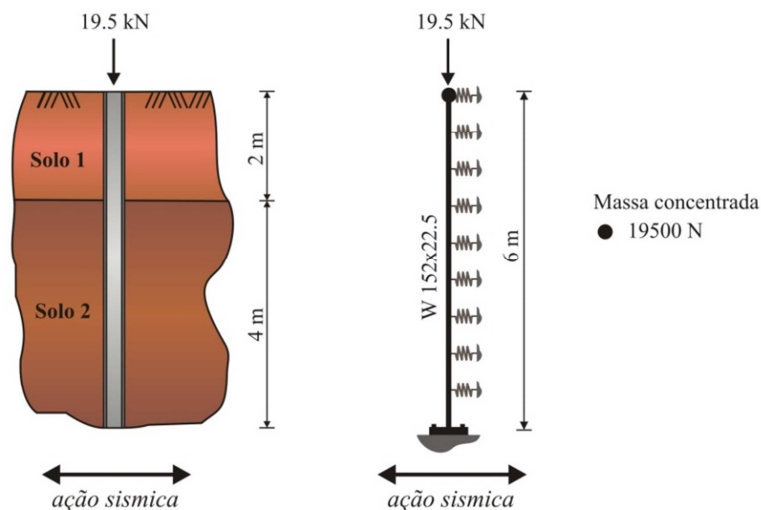


Figura 10. Estaca de aço cravada em meio geológico: modelo e geometria

Tabela 2. Dois primeiros períodos de vibração (s) para a viga sobre base elástica

Modos	SAP 2000	CS-ASA (MD)	CS-ASA (Winkler)
1	1.5064	1.4934	1.4952
2	0.0632	0.0444	0.4491

A análise transiente, como no estudo anterior, foi inicialmente realizada considerando a estrutura (estaca) com comportamento elástico não linear (Fig. 11a). Os resultados apresentados na Fig. 11b foram obtidos para a estrutura com comportamento elastoplástico. Mais uma vez, verifica-se a boa concordância entre as respostas do CS-ASA e aquelas do SAP 2000. Pode-se observar ainda o amortecimento histerético ocasionado pela degradação

da resistência da seção da estaca e redistribuição dos esforços, que proporciona uma diminuição das amplitudes de deslocamento da estaca a partir do tempo de 10s. A Figura 12 fornece os resultados alcançados usando o modelo contínuo de Winkler.

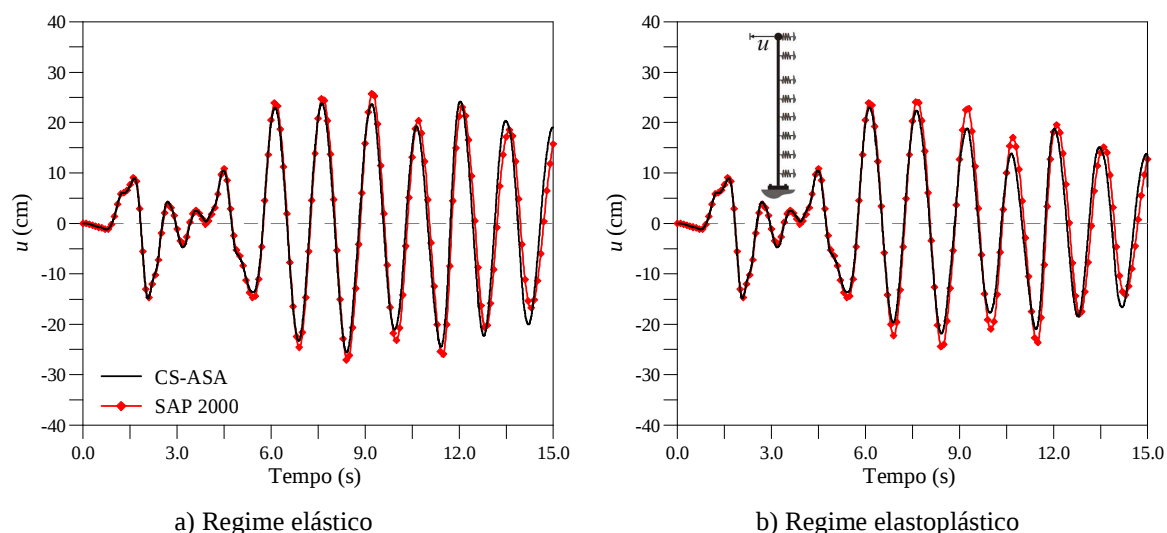


Figura 11. Resposta transiente não linear da estaca em meio geológico (molas discretas)

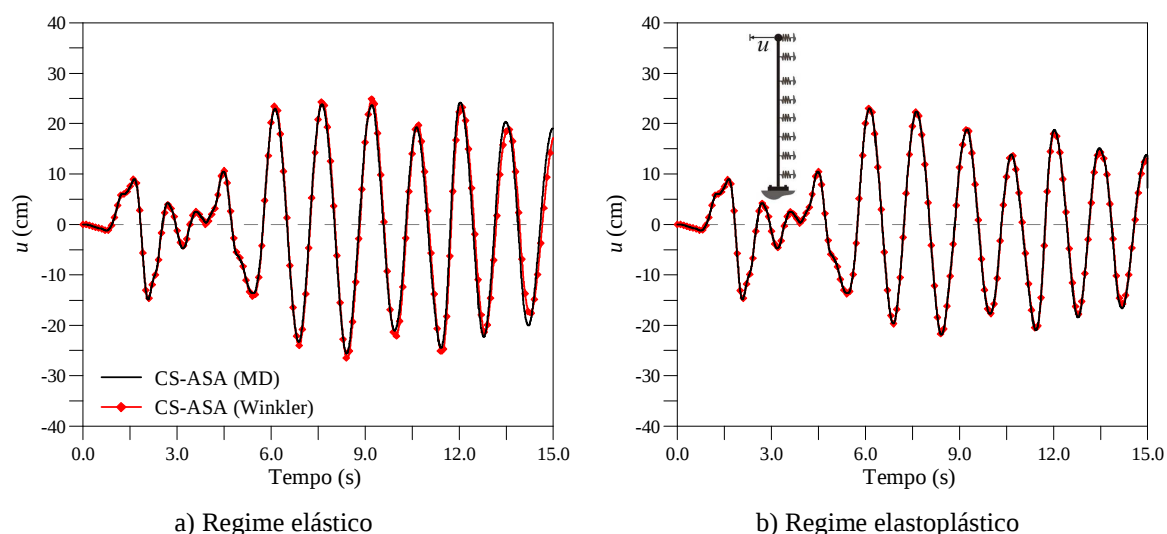


Figura 12. Resposta transiente não linear da estaca em meio geológico (molas discretas x modelo de Winkler)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De um modo geral, os resultados extraídos do programa computacional CS-ASA apresentaram boa concordância com os do software SAP 2000. Através das análises realizadas na seção anterior, verificou-se a eficiência da metodologia numérica proposta para resolver o problema transiente não linear envolvendo estrutura e meio geológico. A estratégia

de solução incremental-iterativa (métodos de Newmark e Newton-Raphson) adotada mostrou-se eficiente.

Os resultados obtidos mostraram que o comportamento dinâmico estrutural foi fortemente influenciado pelo meio geológico, além disso, foi possível observar o amortecimento histerético introduzido pelos efeitos inelásticos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, CNPq, FAPEMIG, Fundação Gorceix, PROPEC e PROPP/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Batelo, E. A. P., 2014. Análise Dinâmica Avançada de Estruturas de Aço Sob Cargas Extremas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Bathe, K.J., 1996. Finite Element Procedures. New Jersey, Prentice-Hall.
- BS 5950, 2000. Structural Use of Steelwork in Buildings — Part 1: Code of practice for design — Rolled and welded sections. British Standards Institution, London, England.
- Challamel, N., 2011. On the post-buckling of elastic beams on gradient foundation. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(6), pp. 396-405.
- Chan, S.L., e Chui, P.P.T., 2000. Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections. Elsevier, Oxford.
- Chopra, A. K., 1995. Dynamics of Structures. Prentice-Hall, New Jersey.
- Dash, S.R., Bhattacharya, S., Blakeborough, A., 2010. Bending–buckling interaction as a failure mechanism of piles in liquefiable soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30(1-2), pp. 32-39.
- Dutta, S.C.; Roy, R., 2002. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system. *Computer and Structures*, v.80, pp. 1579-1584.
- Fazelzadeh, S.A., Kazemi-Lari, M.A., 2013. Stability analysis of partially loaded Leipholz column carrying a lumped mass and resting on elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*; 332, pp. 595-607.
- Galvão, A.S., 2004. Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil.
- Kuhl, D. e Crisfield, M.A., 1999. Energy-conserving and decaying algorithm in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods and Engineering*, vol. 45, pp. 569-599.
- Maciel, F.P., 2012. Equilíbrio e Estabilidade de Elementos Estruturais com Restrições Bilaterais Impostas por Bases Elásticas. Dissertação de Mestrado, PROPEC/Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.

Manna, B. and Baidya, D.K., 2010. Dynamic nonlinear response of pile foundations under vertical vibration - Theory versus experiment. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*; 30(6), pp. 456-469.

Munõz, L.F.P., 2015. Análise dinâmica não linear de pórticos sob excitação de base considerando interação solo-estrutura. Tese de Doutorado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Rosas, L. R. B., 2016. Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados Com Restrições de Contato. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Roy, R., Dutta, S.C., 2010. Inelastic seismic demand of low-rise buildings with soil-flexibility. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 2010, 45(4), pp. 419-432.

Silva, A.R.D., 2009. Sistema Computacional para a Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Sofiyev, A.H., 2011. Influences of elastic foundations and boundary conditions on the buckling of laminated shell structures subjected to combined loads. *Composite Structures*; 93(8), pp. 2126-2134.

Wang, Y.H.; Tham, L.G.; Cheung, Y.K., 2005. Beams and plates on elastic foundations: a review. *Progress in Structural Engineering and Materials*, v.7, pp. 174-182.

Yang, Y.B. e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.