



ANÁLISE NUMÉRICA DE PÓRTICOS MISTOS AÇO-CONCRETO COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Ígor José Mendes Lemes

Jéssica Lorrany e Silva

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Andréa Regina Dias da Silva

Paulo Anderson Santana Rocha

igor@em.ufop.br

jessicalorrany05@hotmail.com

ricardo@em.ufop.br

andreadiassilva@yahoo.com.br

paulorocha@em.ufop.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo. Este artigo apresenta uma metodologia numérica baseada na teoria de Euler Bernoulli para a simulação do comportamento não linear 2D de estruturas mistas aço-concreto considerando as ligações semirrígidas. A formulação proposta utiliza os princípios do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) para simulação da plasticidade de forma concentrada nos pontos nodais do elemento finito. De modo a apresentar uma simulação mais realista da degradação das rigidezes axial e à flexão, o MRPR é acoplado ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), onde as relações constitutivas dos materiais são tratadas de forma explícita. O MCD também é aplicado na determinação da capacidade resistente das seções transversais dos elementos estruturais. As ligações semirrígidas são simuladas por meio da inclusão de pseudo-molas rotacionais nas extremidades dos elementos finitos, sendo o comportamento da ligação dada pela sua relação momento-rotação. Devido a sua generalidade, o modelo multilinear é empregado para a descrição das relações momento-rotação. Por fim, são apresentados resultados condizentes com a literatura e com baixo tempo de processamento.

Palavras-Chave: Estruturas mistas, plasticidade concentrada, ligações semirrígidas, pseudo-molas, MRPR/MCD

1 INTRODUÇÃO

No projeto de estruturas mistas de aço e concreto, as fontes de não linearidades são tidas como fatores essenciais na obtenção da capacidade do sistema estrutural. Essas fontes são: a geometria, o material e a ligação viga-pilar ou mesmo base-pilar. As duas primeiras fontes foram objetos de diversos estudos ao longo dos últimos anos (Bratina *et al.*, 2004; Chiorean, 2013; Lemes, 2015; Lemes *et al.*, 2017). No que diz respeito ao comportamento não linear da geometria e dos materiais, o trabalho de Lemes *et al.* (2017) trouxe uma abordagem eficiente, baseada no conceito da plasticidade concentrada, para a análise de estruturas de aço, de concreto armado e mistas aço-concreto. A proposta do referido trabalho é seguida nesta pesquisa, sendo o maior enfoque dado à questão do comportamento não linear das ligações viga-pilar.

As estruturas de aço e de concreto pré moldado são montadas no local da edificação, ou seja, os elementos estruturais devem ser conectados por meio de ligações para que juntos exerçam a função a eles destinada na etapa de projeto. Essas ligações são feitas por meio de parafusos e/ou solda nas estruturas metálicas, ou ainda considerando a contribuição do concreto e das armaduras nas ligações mistas. Por consequência, os elementos de ligação também apresentam rigidez e capacidade resistente, que devem ser estudados a fim de aferir, com precisão, a capacidade de carga da estrutura como um todo. Essa discussão se estende às estruturas mistas, já que na maioria dos casos, nesse tipo de estrutura, as ligações são feitas de forma semelhante às estruturas de aço apenas, considerando também a contribuição do concreto e sua respectiva armadura no comportamento da ligação.

No contexto numérico, as ligações são usualmente elementos estruturais pontuais, introduzidas na formulação através de seu comportamento, via curva momento-rotação $M \times \phi_c$, em pontos nodais específicos. Silva (2009) destacou que devido ao comportamento altamente não linear das ligações semirrígidas, é bastante complicado representá-lo matematicamente usando aproximações simples e adequadas. Existem vários modelos analíticos para essa finalidade. Muitos deles, embora possam reproduzir perfeitamente o comportamento da ligação, são bastante complexos e só adequados para certos tipos de ligações. Alguns dos modelos de destaque para a caracterização desse comportamento são: o modelo linear, exponencial, exponencial modificado e multilinear. Os modelos exponenciais (Lui e Chen, 1986) exigem um número elevado de parâmetros, que por sua vez, foram todos calibrados para ligações específicas de estruturas de aço. Assim, o modelo multilinear se torna uma solução interessante, pois pontos da curva $M \times \phi_c$ são retirados diretamente de ensaios experimentais e não fica preso ao comportamento singular de algumas ligações.

Quando se fala de ligações semirrígidas em estruturas de aço tem-se uma maior precisão na simulação numérica dessas estruturas. Isso se deve a grande quantidade de estudos realizados nesse contexto (Lui e Chen, 1986; Chen *et al.*, 1996; Chan e Chui, 2000; Silva, 2009). Alguns desses trabalhos, em especial o livro de Chan e Chui (2000), fez uso de molas rotacionais fictícias de comprimento nulo na extremidade de um elemento finito. Essas molas são responsáveis pela introdução da curva $M \times \phi_c$ na formulação numérica. Chen *et al.* (1996) destacaram que para a grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axial e cortante na deformação da ligação são pequenos se comparados aos causados pelo momento fletor. O que faz com que essas molas fictícias representem bem o comportamento da ligação.

Vale ressaltar que no contexto das estruturas mistas de aço e concreto, a maioria dos trabalhos focam na análise experimental de tipologias estruturais específicas. Esses estudos visam

fundamentalmente a obtenção de curvas momento-rotação para as ligações ensaiadas (Wang *et al.*, 2009; Dabaon *et al.*, 2009; Fu *et al.*, 2010.). No âmbito numérico, alguns trabalhos utilizaram *softwares* comerciais para a obtenção da curva $M \times \phi_c$ (Fu *et al.*, 2007; Vega e Xiao, 2014; Tineo, 2016).

O desenvolvimento de formulações numéricas para a simulação do comportamento de estruturas mistas com ligações semirrígidas segue, basicamente, as mesmas abordagens utilizadas nas estruturas de aço. Shi *et al.* (1996), Fang *et al.* (1999) e Landesmann (2011) fizeram a simulação pórticos mistos considerando o efeito das ligações semirrígidas por meio de molas rotacionais fictícias, de comprimento nulo, colocadas nas extremidades dos elementos finitos, tal como feito em estruturas metálicas (Chan e Chui, 2000; Silva, 2009).

O objetivo do presente trabalho é desenvolver uma formulação capaz de realizar análises não-lineares de estruturas mistas aço-concreto com ligações semirrígidas considerando a plasticidade concentrada. Para isso, o Método de Compatibilidade de Deformações (MCD) é acoplado ao MRPR, a fim de fornecer a avaliação do comportamento inelástico dos materiais com maior precisão, através das relações constitutivas. As conexões semirrígidas são explicitamente introduzidas no modelo por pseudo-molas rotacionais de comprimento nulo nas extremidades dos elementos finitos. Assim, o comportamento não-linear de conexão é abordado considerando a relação momento-curvatura, por pontos extraídos diretamente de resultados experimentais (modelo multilinear). Além disso, o arranjo numérico permite uma metodologia de fácil compreensão.

2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

2.1 Relação força-deslocamento

No presente trabalho, optou-se pela utilização do MRPR, considerando assim a plasticidade de forma concentrada. Nesse sentido, a degradação das rigidezes axial e à flexão ocorre exclusivamente nos pontos nodais. Nesta seção apresenta-se o método de forma geral, introduzindo o efeito das não linearidades geométrica, do material e da ligação.

É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste trabalho, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos, e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- são desprezados os efeitos de instabilidade locais, como a flambagem nas chapas componentes dos perfis de aço; assim a seção pode desenvolver sua capacidade total de rotação plástica;
- os efeitos de instabilidade globais que podem acontecer em problemas tridimensionais, como a flambagem lateral ou torcional, são ignorados pois considera-se um sistema de travamento no eixo z ;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos;
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas;
- considera-se a interação total entre os elementos de aço e concreto.

Nesta modelagem de sistemas estruturais via MEF, é usado o elemento finito de viga-pilar híbrido, de comprimento L , delimitado pelos pontos nodais i e j , ilustrado na Fig. 1. Esse elemento apresenta em suas extremidades molas rotacionais fictícias, de comprimento nulo ($L_{mola} \rightarrow 0$), que são responsáveis pela simulação comportamento não linear das ligações viga-pilar por meio do parâmetro S_c , que será abordado na Seção 4. O elemento finito é referenciado ao sistema corrotacional, onde os graus de liberdade são as rotações nos nós i e j , dadas por θ_i e θ_j e o deslocamento axial no nó j , δ . Já os termos M_i , M_j e P representam os momentos fletores e a força axial nos respectivos graus de liberdade.

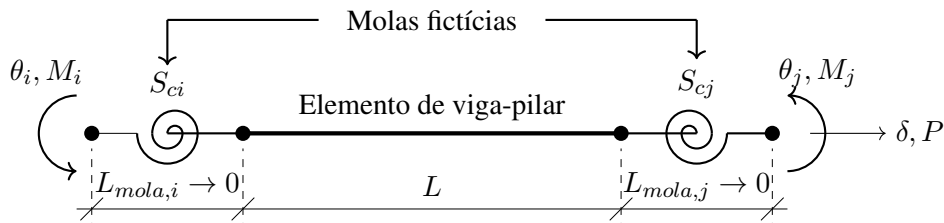


Figura 1: Elemento finito híbrido referenciado ao sistema corrotacional

Como já relatado, segundo Chen *et al.* (1996), na grande maioria das estruturas de aço, os efeitos das forças axial e cisalhante na deformação da ligação são pequenos se comparados àqueles causados pelo momento fletor. Tal informação também pode ser aplicada às estruturas mistas, já que as ligações são feitas por elementos de aço, porém deve-se levar em conta a contribuição do concreto e das armaduras na rigidez rotacional. Em se tratando de análises bidimensionais, a torção também é desprezada, ou seja, as ligações semirrígidas serão simuladas considerando apenas a rotação no eixo de flexão.

Segundo Chan e Chui (2000), a rotação relativa da ligação, ϕ_c , é definida entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global do elemento, θ_c , e daquele conectado ao elemento de viga-pilar. Com base na configuração deformada do elemento finito, por meio da ação de momentos fletores ilustrada na Fig. 2, escreve-se, na forma incremental, as relações cinemática, constitutiva e de equilíbrio, respectivamente como:

$$\Delta\phi_{ci} = \Delta\theta_{ci} - \Delta\theta_{bi} \quad (1)$$

$$\Delta\phi_{cj} = \Delta\theta_{cj} - \Delta\theta_{bj}$$

$$\Delta M_{ci} = S_{ci} \Delta\phi_{ci} \quad (2)$$

$$\Delta M_{cj} = S_{cj} \Delta\phi_{cj}$$

$$\Delta M_{ci} + \Delta M_{bi} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta M_{cj} + \Delta M_{bj} = 0$$

em que $\Delta\phi_{ci}$ e $\Delta\phi_{cj}$ descrevem as rotações relativas incrementais referentes à flexibilidade das ligações, ΔM_{ci} e ΔM_{cj} são, respectivamente, os momentos fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades i e j , e ΔM_{bi} e ΔM_{bj} os momentos atuantes na extremidade do elemento de viga.

A devida manipulação algébrica das Eqs. (1), (2) e (3) gera três sistemas de equações que representam o equilíbrio das molas nos nós i e j e ainda o equilíbrio no elemento de viga. Esses

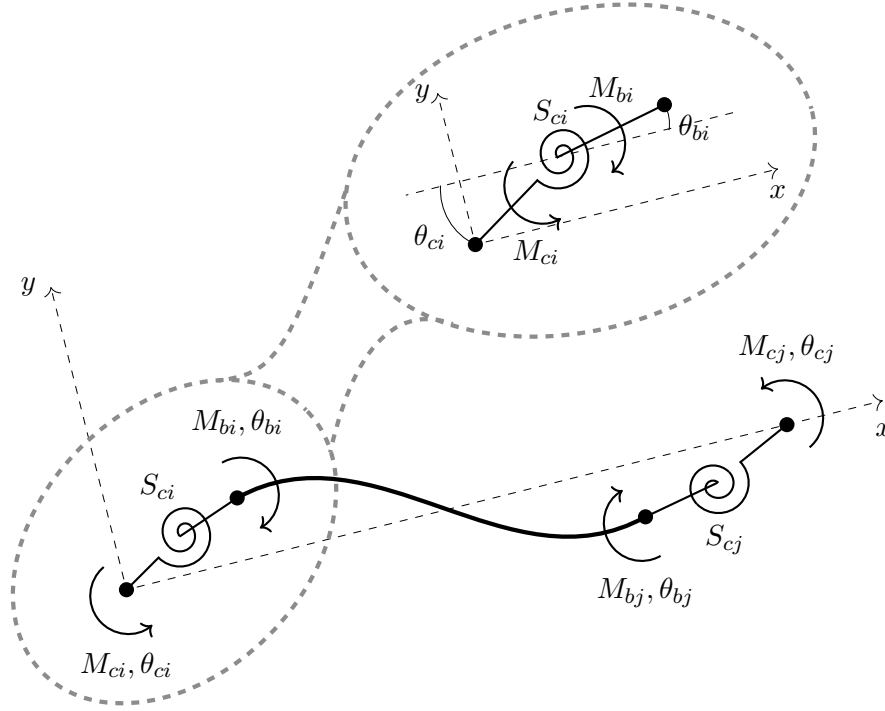


Figura 2: Elemento finito híbrido deformado

sistemas são respectivamente escritos na forma matricial como segue:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{ci} & -S_{ci} \\ -S_{ci} & S_{ci} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{cj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{cj} & -S_{cj} \\ -S_{cj} & S_{cj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{cj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Por fim, a condensação dessas três relações matriciais em uma única relação força-deslocamento para o elemento finito híbrido, considerando todos os graus de liberdade, é definida por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{ci} \\ \Delta M_{cj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{ci} - \frac{S_{ci}^2(S_{cj}+k_{33})}{\beta} & \frac{S_{ci}k_{23}S_{cj}}{\beta} \\ 0 & \frac{S_{cj}k_{32}S_{ci}}{\beta} & S_{cj} - \frac{S_{cj}^2(S_{ci}+k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{ci} \\ \Delta \theta_{cj} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

na qual $\beta = (S_{ci} + k_{22})(S_{cj} + k_{33}) - k_{32}k_{23}$.

Os termos k_{11} , k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33} são componentes da matriz de rigidez do elemento de viga-pilar, sendo os termos referentes à flexão obtidos por meio de uma abordagem semelhante à proposta por Ziemian e McGuire (2002). Como o momento é avaliado nas extremidades i e j do elemento finito (Fig. 1), tais coeficientes são calculados considerando que a rigidez

tangente à relação momento-curvatura (discutido na Seção 3) varia linearmente ao longo do comprimento do elemento finito, ou seja:

$$EI(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) EI_{T,i} + \frac{x}{L} EI_{T,j} \right] \quad (8)$$

em que $EI_{T,i}$ e $EI_{T,j}$ são as rigidezes à flexão, obtidas conforme será descrito na Seção 3, nos pontos nodais i e j , respectivamente, e L é o comprimento do elemento finito.

Usando funções de interpolação apropriadas, os coeficientes da matriz de rigidez, desconsiderando as parcelas que introduzem o efeito da não linearidade geométrica, são definidos através das relações:

$$k_{22}^* = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \left(2 - 3\frac{x}{L}\right) \right]^2 EI_T(x) dx \quad (9)$$

$$k_{23}^* = k_{32}^* = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \left(2 - 3\frac{x}{L}\right) \right] \left[\frac{2}{L} \left(1 - 3\frac{x}{L}\right) \right] EI_T(x) dx \quad (10)$$

$$k_{33}^* = \int_0^L \left[\frac{2}{L} \left(1 - 3\frac{x}{L}\right) \right]^2 EI_T(x) dx \quad (11)$$

Resolvendo-se as integrais das Eqs. (9), (10) e (11) e considerando que a rigidez axial no elemento é dada pela média das rigidezes nos pontos nodais i e j , tem-se as seguintes expressões para os coeficientes da matriz de rigidez do elemento:

$$k_{11} = \frac{EA_{T,i} + EA_{T,j}}{2L} \quad (12)$$

$$k_{22} = \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (13)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} - \frac{PL}{30} \quad (14)$$

$$k_{33} = \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (15)$$

Pode-se notar que há uma parcela adicional nos termos referentes à flexão. Essa parcela se refere à consideração da não linearidade geométrica, que é introduzida nesta metodologia por meio de uma formulação simplificada proposta por Yang e Kuo (1994).

A transformação do sistema corrotacional para os sistemas local e global pode ser vista em Lemes (2015).

2.2 Return mapping

Uma vez que a capacidade resistente das seções transversais é definida pela curva de interação entre o esforço normal e o momento-fletor, deve-se ter atenção para que esse limite não seja excedido.

Nas seções plastificadas, a combinação NM se encontra exatamente sobre um ponto da curva de interação. Assim, variações nas cargas externas atuantes na estrutura podem gerar alterações nas forças internas de modo a violar o limite resistente da seção. Trata-se de um problema numérico que é corrigido utilizando a estratégia denominada *return mapping*, onde maiores detalhes podem ser encontrados em Lemes *et al.* (2017).

2.3 Solução do problema estrutural não linear

Para a solução do problema estático não linear global, estratégias eficientes de incrementos de carga e iteração são utilizadas. Isso é feito com o propósito de produzir resultados mais satisfatórios, passando por pontos limites que possam vir a aparecer nas trajetórias de equilíbrio.

O incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, é determinado automaticamente pela técnica do deslocamento generalizado (Yang e Kuo, 1994). Assim, $\Delta\lambda^0$ é calculado como:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\left| \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)(\delta\mathbf{U}_r)} \right|} = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (16)$$

em que o índice 1 indica os valores de $\Delta\lambda^0$ e $\delta\mathbf{U}_r$ obtidos no primeiro passo de carga e GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) representa o parâmetro de rigidez generalizado do sistema. O sinal da equação anterior depende apenas dos vetores ${}^t\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga corrente). Segundo Yang e Kuo (1994), o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson, o parâmetro de carga λ é mantido constante ao longo de todo o processo iterativo. Dessa forma, a trajetória de equilíbrio pode ser obtida até que um ponto limite de carga e/ou de bifurcação seja atingido. A liberdade de variação de λ possibilita que toda a trajetória de equilíbrio seja traçada. Neste trabalho, foi utilizada a estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais proposta por Chan (1988), em que a correção do parâmetro de carga $\delta\lambda^k$ é dada por meio da equação:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (17)$$

sendo $\delta\mathbf{U}_g^k$ a correção obtida da aplicação do método de *Newton-Raphson*, resultante da aplicação das forças desequilibradas e $\delta\mathbf{U}_r^k$ o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de $\mathbf{F}_r$, que é um vetor de cargas de referência.

Maiores detalhes do processo de solução não linear podem ser vistos em Silva (2009), Lemes (2015) e em Lemes *et al.* (2017).

3 ANÁLISE DA SEÇÃO TRANSVERSAL

3.1 Discretização da seção

Para fazer a análise da condição deformada da seção transversal e obter a sua capacidade resistente e sua rigidez, uma discretização da seção é feita. No estudo de estruturas planas, a discretização em fatias é bastante satisfatória (Lemes, 2015). Porém, no presente trabalho, as tensões residuais serão introduzidas explicitamente no perfil metálico. Assim, será feita a discretização em fibras, como ilustrado na Fig. 3(b).

Aplica-se então o conceito de sub-regiões. Através de um gerador de malha estruturada a seção transversal é dividida em regiões menores. Embora na Fig. 3(b) seja ilustrada apenas uma

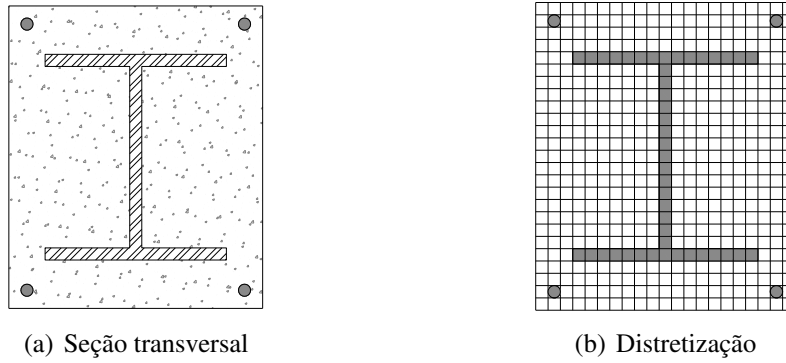


Figura 3: Discretização da seção transversal em fibras

seção mista totalmente revestida, o algoritmo é aplicado a diversas tipologias de seções mistas, metálicas e de concreto armado.

A discretização tem como parâmetro inicial o número de divisões nas duas direções, fornecidos como dados de entrada. Após a obtenção das sub-regiões, é feita uma busca visando encontrar trechos que apresentam áreas maiores. O objetivo principal dessa metodologia é gerar uma malha de fibras com tamanhos aproximadamente iguais em toda a seção transversal, e assim minimizar o erro para a obtenção da rigidez à flexão da seção.

Após a discretização, alguns dados são substanciais para a construção da relação momento-curvatura. Os mais importantes são as áreas das fibras e suas respectivas posições. As coordenadas x e y de cada fibra é referenciada ao centroide plástico (CP) da seção, minimizando assim problemas de convergência (Chen *et al.*, 2001; Sfakianakis, 2002).

Segundo Roik e Bergmann (1990), a posição do CP da seção é obtida da seguinte forma:

$$x_{CP} = \frac{x_c A_c \gamma f_{cd} + x_a A_a f_{yd} + x_b A_b f_{ybd}}{A_c \gamma f_{cd} + A_a f_{yd} + A_b f_{ybd}} \quad (18)$$

$$y_{CP} = \frac{y_c A_c \gamma f_{cd} + y_a A_a f_{yd} + y_b A_b f_{ybd}}{A_c \gamma f_{cd} + A_a f_{yd} + A_b f_{ybd}} \quad (19)$$

com A_c , A_a e A_b sendo as áreas de concreto, do perfil metálico e da armadura longitudinal; γ é um coeficiente que indica se o concreto está confinado ($\gamma = 1,0$) ou não ($\gamma = 0,85$); x_c , x_a , x_b , y_c , y_a e y_b são as coordenadas do centroide, das respectivas áreas, no eixo das ordenadas, em relação a um sistema de referência; e f_{cd} , f_{yd} e f_{ybd} são a resistência de cálculo do concreto, as resistências de escoamento de cálculo do perfil e das armaduras, respectivamente.

3.2 Relação momento-curvatura

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson* para a obtenção da relação momento-curvatura. Para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incrementos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. Foi então utilizada uma estratégia de incrementos mista, relacionando diretamente o momento como função da curvatura, tal como (Zubydan, 2013):

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI \quad (20)$$

em que o índice j refere-se ao incremento anterior, Φ é um valor constante de incremento para curvatura e EI a rigidez à flexão da seção transversal.

Pela teoria de Euler-Bernoulli, considerando o campo linear de deformações na seção transversal, tem-se como deformação axial da i -ésima fibra:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ri} + \phi y_i \quad (21)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção, ε_r é a deformação devido às tensões residuais (se houver aço na fibra), e ϕ a respectiva curvatura.

Para a notação matricial adotada a seguir, as variáveis ε_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \phi]^T$. Chiorean (2013) ressalta que, adotando-se $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ na primeira iteração, a convergência é atingida rapidamente. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (22)$$

em que o vetor de forças externas $\mathbf{f}_{ext}$ é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M . Na forma matricial, a equação anterior é descrita como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_A \sigma dA \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] A_i \\ \int_A \sigma y dA \cong \sum_{i=1}^{n_{fib}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] y_i A_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

na qual, n_{fib} é o número de fibras geradas pela discretização da seção.

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_i , e posições, y_i , de cada fibra, a integral passa a ser o somatório descrito na Eq. (23).

Embora seja eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte, $k + 1$, o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (24)$$

com $\mathbf{F}'$ sendo a matriz Jacobiana do problema não linear (Eq. 22), ou matriz constitutiva da seção transversal, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i & f_{12} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i & f_{22} = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

em que $E_{T,i}$ é o módulo de elasticidade tangente retirado diretamente da relação constitutiva do material componente da i -ésima fibra.

O critério de convergência adotado neste trabalho é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}$, e do vetor de forças externas, $\mathbf{f}_{ext}$. Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (26)$$

com Tol sendo uma dada tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

O procedimento não linear descrito nesta seção é ilustrado na Fig. 4.

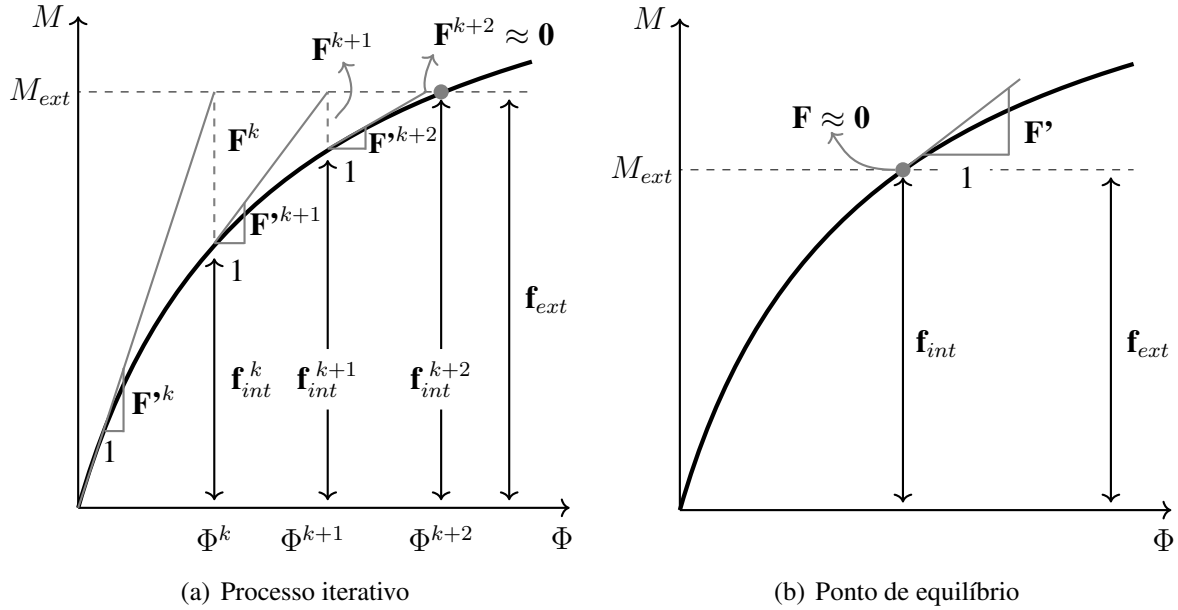


Figura 4: Construção da relação $M \times \Phi$

3.3 Rigidezes generalizadas

Uma vez atendido o critério de convergência de forças, que visa o equilíbrio entre forças externas e internas na seção transversal, buscam-se os parâmetros de rigidezes generalizadas. Nesse ponto pode-se obter a configuração deformada da seção transversal. Para isso, a tangente a relação momento-curvatura é utilizada, na forma incremental, dada por:

$$\begin{aligned} \Delta N &= f_{11}\Delta\varepsilon_0 + f_{12}\Delta\Phi \\ \Delta M &= f_{21}\Delta\varepsilon_0 + f_{22}\Delta\Phi \end{aligned} \quad (27)$$

Assim, as rigidezes axial, EA_T , e à flexão, EI_T , são dadas por relações diretas entre os esforço e as deformações, retiradas diretamente da Eq. (27), como segue (Chiorean, 2013):

$$EA_T = \left. \frac{\Delta N}{\Delta\varepsilon_0} \right|_{\Delta M=0} = f_{11} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{22}} \quad (28)$$

$$EI_T = \left. \frac{\Delta M}{\Delta\Phi} \right|_{\Delta N=0} = f_{22} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{11}} \quad (29)$$

sendo os termos f_{ij} os parâmetros componentes da matriz constitutiva da seção transversal, Eq. (25).

3.4 Curva de interação

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então, que esse par de esforços é um ponto da curva de interação NM . Nas análises globais com o uso das rigidezes generalizadas,

abordadas a seguir, usa-se apenas essa curva, sem a necessidade de uma curva de início de plastificação.

Para reduzir o esforço computacional, as curvas de interação esforço normal-momento fletor são construídas antes do início da análise estrutural. Defini-se então os máximos valores de esforço normal na seção e esse domínio é subdividido em vários valores de N . Para cada valor de N a relação momento-curvatura é feita até que a matriz constitutiva da seção, dada na Eq. (25), fique singular.

Em contrapartida, torna-se necessário simplificar a curva de interação. Assim, a curva é construída através de uma série de pares ordenados NM . Uma vez iniciada a análise estrutural é necessário saber o valor do momento de plastificação reduzido, M_{pre} , para um dado valor de esforço normal, N . Assim, qualquer ponto na curva de interação, mostrada na Fig. 5, pode ser obtido por interpolação linear, tal como dado a seguir:

$$M_{pre} = \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{N_{j+1} - N_j} \right) (N - N_j) + M_j \quad (30)$$

sendo j e $j + 1$ os pontos que apresentam esforço normal N_j e N_{j+1} imediatamente menor e maior, respectivamente, que o valor de N .

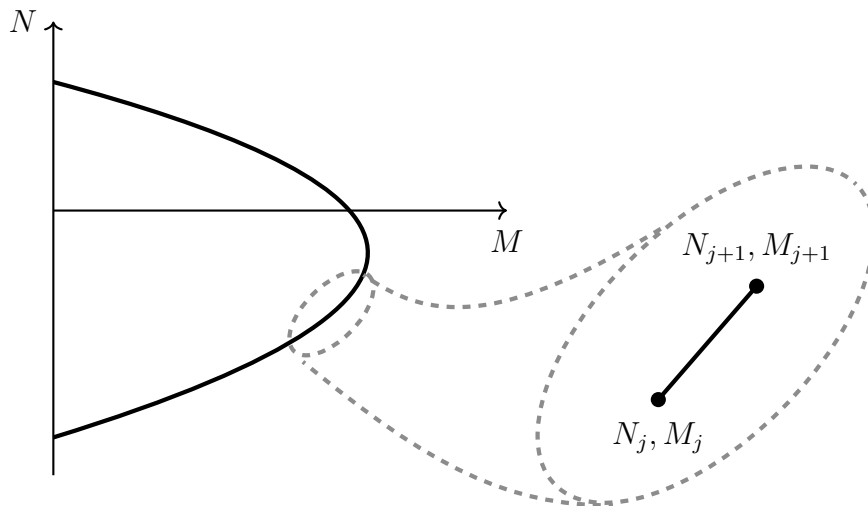


Figura 5: Curva de interação NM

4 COMPORTAMENTO DA LIGAÇÃO VIGA-PILAR

Os modelos matemáticos descritos na literatura (Lui e Chen, 1986; Lui e Chen, 1988) nem sempre são capazes de descrever precisamente o comportamento de alguns tipos de ligação, além disso, são exclusivos para ligações entre elementos estruturais puramente de aço. Uma alternativa para contornar esse problema está no fornecimento explícito de pontos da curva momento-rotação e a rigidez da mesma é obtida por meio de interpolação linear. Para isso, deve ser fornecido um número m de pares ordenados (ϕ_c, M) , como mostra a Fig. 6, que seja capaz de retratar fielmente o comportamento real da ligação.

Nesse caso, a rigidez da ligação (molas fictícias) é dada por:

$$S_c = \frac{\Delta M}{\Delta \phi_c} = \frac{M_{(i+1)} - M_{(i)}}{\phi_{c(i+1)} - \phi_{c(i)}} \quad (31)$$

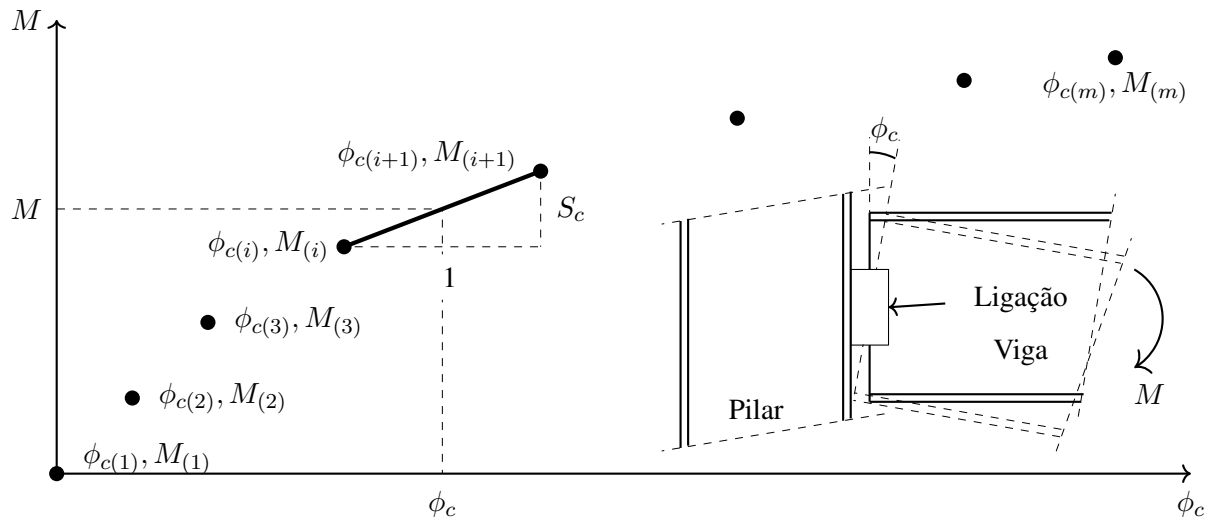


Figura 6: Modelo multilinear

em que M_i e M_{i+1} são os limites inferior e superior do intervalo no qual o momento M , que atua na ligação, se encontra. Esse intervalo é estabelecido em função do nível de carregamento aplicado.

5 EXEMPLO NUMÉRICO

O pórtico misto de dois andares e dois vãos, ilustrado na Fig. 7, foi ensaiado experimentalmente por Krauss (2002) na Universidade de Bochum, Alemanha. Para aferir os resultados de forma mais realista, partes isoladas da estrutura, como por exemplo as ligações viga-pilar, foram testadas em outros locais, tais como: Universidade de Liège (Bélgica), Universidade de Aachen (Alemanha) e Labein (Espanha). Trata-se de um pórtico de altura total 4.99 m e 9.76 m de comprimento, constituído por pilares de aço e vigas mistas de aço e concreto (Fig. 7).

Bitar *et al.* (2006) destacaram que, nos ensaios experimentais, cada perfil metálico utilizado apresentava diferentes valores de tensões de escoamento e última nas chapas componentes da seção (alma e mesas). Porém, Demonceau (2008) ressaltou que, embora alguns trechos das vigas e das ligações tenham apresentado início de escoamento, não houve aparecimento de mecanismos plásticos. Assim sendo, neste trabalho optou-se que para os perfis utilizados, a tensão de escoamento utilizada na modelagem foi a tensão $f_{y,mesa}$ dada na Tab. 1. Além disso, foi considerado o módulo de elasticidade de 210 GPa para todos os componentes de aço (perfis e armaduras), sendo as relações constitutivas trilineares (Demonceau, 2008). Os perfis metálicos foram modelados considerando o modelo de tensões residuais do ECCS (1993). Já o concreto utilizado na laje componente da viga mista foi aferido com resistência à compressão característica igual a 4.47 kN/cm². Sob compressão, optou-se por utilizar a relação constitutiva da NBR 6118 (2014), e sob tração, o comportamento descrito por Bratina *et al.* (2004).

Demonceau (2008) destacou que todas as ligações entre as vigas e os pilares são classificadas como semirrígidas. O comportamento de cada ligação presente na estrutura é fornecido na Fig. 8. Uma vez que os resultados experimentais são dados, usou-se, no presente trabalho, o modelo multilinear para a entrada de dados da curva $M \times \phi$ no programa CS-ASA. Para todos os casos, foram utilizados 6 pontos.

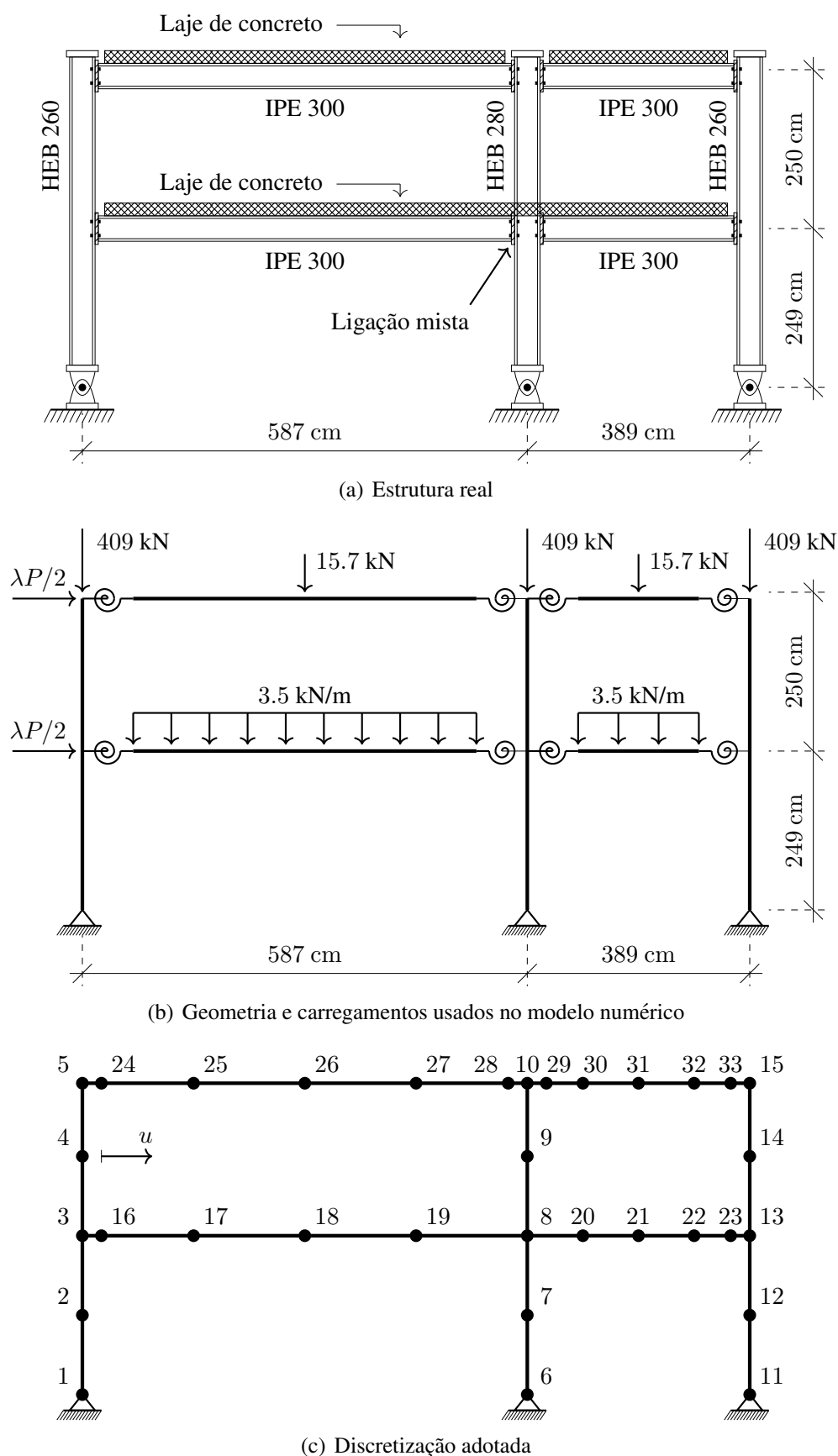
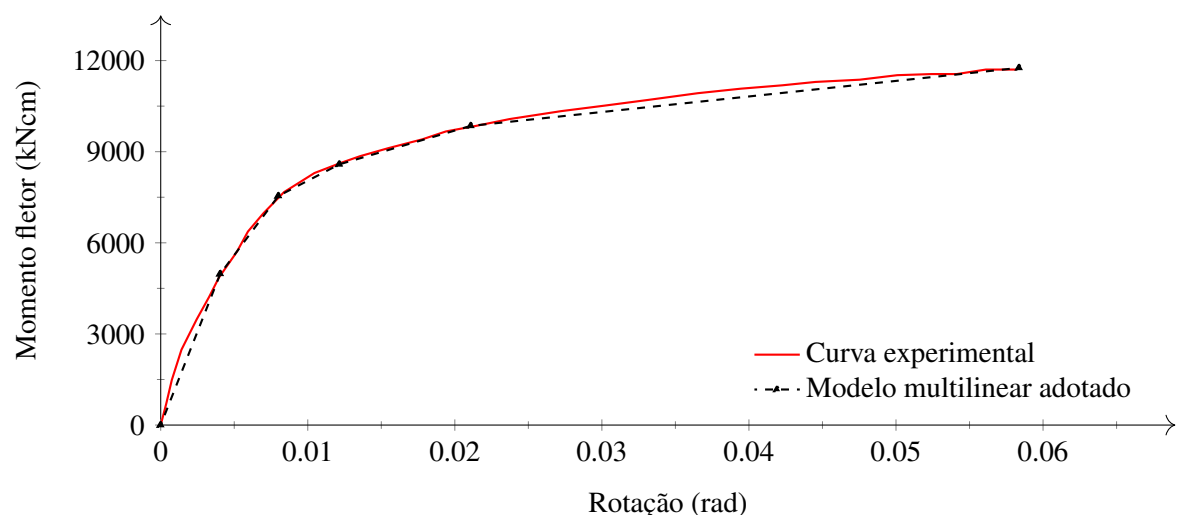
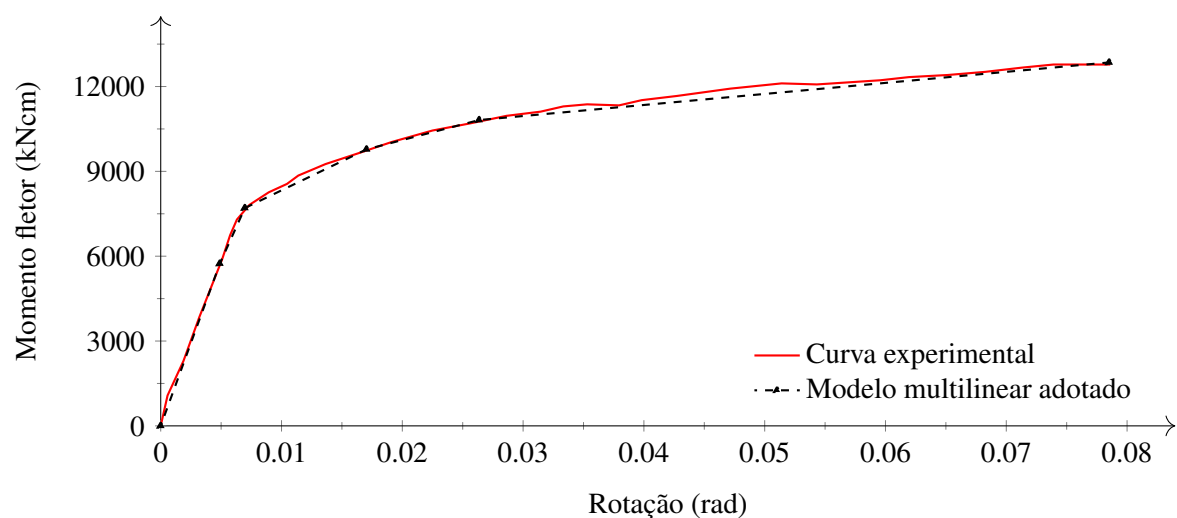


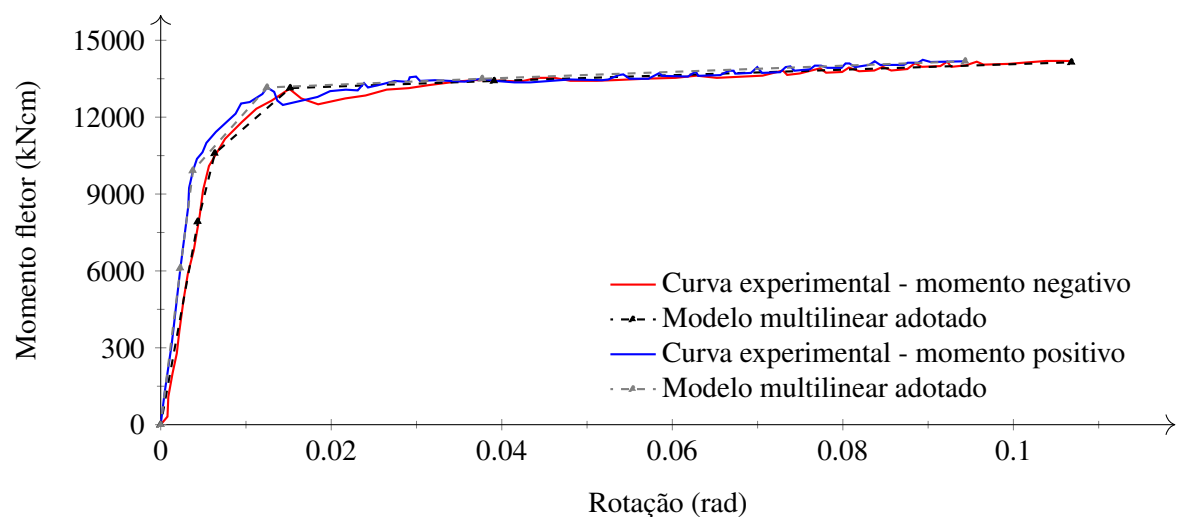
Figura 7: Pórtico de Bochum: geometria, carregamentos e discretização adotada (Demonceau, 2008)



(a) Ligação com os pilares externos no primeiro pavimento



(b) Ligação com os pilares externos e interno no segundo pavimento



(c) Ligação com o pilar interno

Figura 8: Curvas $M \times \phi$ para as ligações do pórtico de Bochum (Demonceau, 2008)

Tabela 1: Tensões de escoamento e última dos perfis de aço

Perfil	Alma	Mesa
HEB 260	$f_y = 32.7 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 28.5 \text{ kN/cm}^2$
	$f_u = 48 \text{ kN/cm}^2$	$f_u = 46.5 \text{ kN/cm}^2$
HEB 280	$f_y = 34.1 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 29.9 \text{ kN/cm}^2$
	$f_u = 45 \text{ kN/cm}^2$	$f_u = 42.9 \text{ kN/cm}^2$
IPE 300	$f_y = 35.7 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 32.7 \text{ kN/cm}^2$
	$f_u = 48 \text{ kN/cm}^2$	$f_u = 46.5 \text{ kN/cm}^2$

Foram encontrados na literatura resultados experimentais para avaliação dos deslocamentos em diversos pontos da estrutura (Bitar *et al.*, 2006). Numericamente, apenas Demonceau (2008) apresenta uma trajetória de equilíbrio no ponto de aplicação da carga incremental, ponto próximo ao nó 4. Na Figura 9 são comparadas as trajetórias de equilíbrio do presente trabalho e as dadas na literatura referentes ao deslocamento u . Percebe-se uma boa aproximação com as curvas da literatura (Krauss, 2002; Demonceau, 2008), principalmente na comparação com a curva numérica obtida por Demonceau (2008) que usou o *software* FINELG. Em termos comparativos, o presente trabalho encontrou uma fator de carga limite $\lambda P_{lim} = 185 \text{ kN}$ e a análise no FINELG resultou em um valor limite de 182 kN, ou seja, uma diferença de apenas 1.6%.

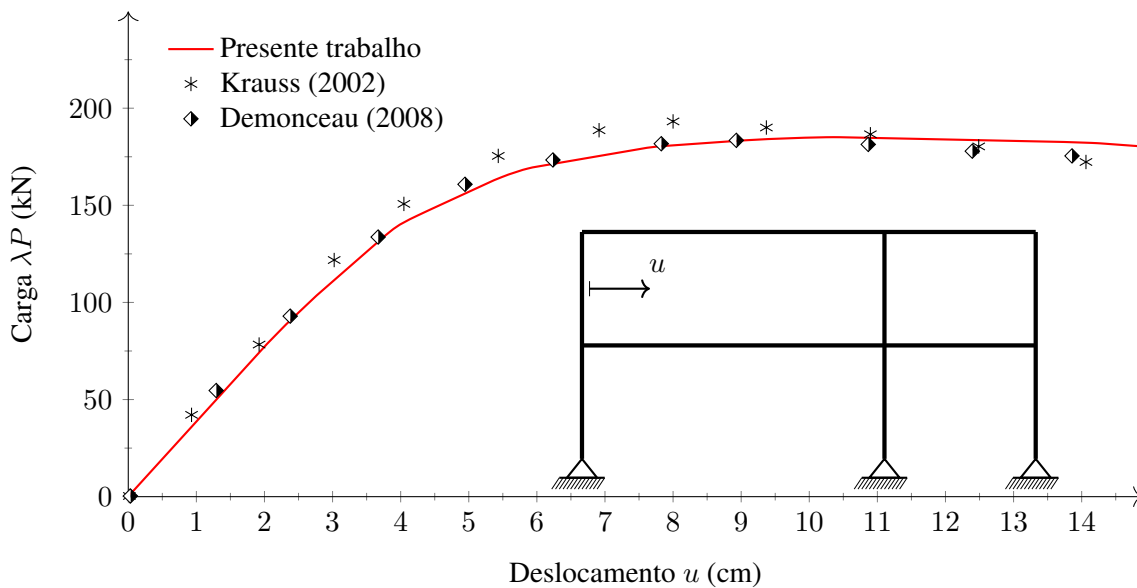


Figura 9: Pórtico de Bochum - Carga $\times$ deslocamento u

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma proposta de formulação numérica para a consideração das não linearidades geométrica, do material e das ligações. Nessa abordagem, a plasticidade

foi considerada de forma concentrada e o comportamento das ligações viga-pilar foi introduzido no elemento finito por meio de molas fictícias de comprimento nulo.

Um pórtico misto de dois pavimentos e dois vãos foi simulado numericamente por meio da formulação apresentada. Verificou-se uma boa aproximação entre os resultados obtidos aqui com aqueles presentes na literatura, principalmente com o resultado numérico de Demonceau (2008), validando assim a proposta de união de diversos efeitos não lineares em uma formulação apenas. O modelo multilinear para a descrição da curva momento-rotação pode ser utilizado no contexto das estruturas mistas, uma vez que sua generalidade permitiu a adequação simples entre a resposta experimental da ligação e o modelo numérico. Assim, conclui-se que a formulação usualmente aplicada às estruturas puramente de aço, com modificações pontuais (curva $M \times \phi_c$) fornece resultados satisfatórios para a análise de estruturas mistas de aço-concreto com ligações semirrígidas.

Futuramente, pretende-se inserir o comportamento não linear das ligações entre a laje de concreto e o perfil metálico para então se estudar o efeito da interação parcial na capacidade de carga de sistemas estruturais mistos. Além disso, análises no contexto dinâmico também serão consideradas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e CNPq (agências federais), Fapemig (fundação estadual), Fundação Gorceix, PROPEC e PROPP/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Bitar, D., Ryan, Y., Caramelli, S., Salvatore, W., Taucer, F., Jaspart, J.-P., Demonceau, J.-F., Haller, M., Grijalvo, J., Heise, F., Kindmann, R., Krauss, M., Hoffmeister, B., Oppe, M. & Stangenberg, H., 2006. *Steel products and applications for buildings, construction and industry: Applicability of composite structures to sway frames*. Bruxélas, Bélgica, 2006.
- Bratina, S., Saje, M. & Planinc, I., 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 7181-7207.
- Chan, S.L., (1988) Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L. & Chui, P., 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford, Elsevier.
- Chen, S., Teng, J.G. & Chan, S.L., 2001. Design of Biaxially Loaded Short Composite Columns of Arbitrary Section. *Journal of Structural Engineering*, vol. 127, n. 6, pp. 678-685.
- Chen, W., Goto, Y. & Liew, J., 1996. *Stability Design of Semi-rigid Frames*. John Wiley & Sons Inc.
- Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.

- Dabaon, M.A., El-Boghdadi, M.H. & Kharoob, O.F., 2009. Experimental and numerical model for space steel and composite semi-rigid joints. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 65, pp. 1864-1875.
- Demonceau, J.-F., 2008. Steel and composite building frames: sway response under conventional loading and development of membrane effect in beams further to an exceptional action. Tese de Doutorado, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, Liège, Bélgica.
- ECCS, 1983. Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints. European Convention for Constructional Steelwork, Pub. no. 33.
- Fang, L., Chan, S. & Wong, Y., 1999. Strength analysis of semi-rigid steel-concrete composite frames. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 52, pp. 269-291.
- Fu, F., Lam, D. & Ye, J., 2007. Parametric study of semi-rigid composite connections with 3D finite element approach. *Engineering Structures*, vol. 29, pp. 888-898.
- Fu, F., Lam, D. & Ye, J., 2010. Moment resistance and rotation capacity of semi-rigid composite connections with precast hollow slabs. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 66, pp. 452-461.
- Krauss, M., 2002. *Applicability of composite structures to sway frames*.
- Landesmann, A., 2011. Inelastic analysis of semi-rigid composite structures under fire conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 33, n. 4.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Lemes Í.J.M., Silveira, R.A.M, Silva, A.R.D. & Rocha P.A.S., 2017. Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, vol. 147, pp. 12-26.
- Lui, E. & Chen, W., 1986. Analysis and behavior of flexible-jointed frames. *Engineering Structures*, vol. 8, n. 2, pp. 107-118.
- Lui, E.M. & Chen, W.F., 1988. Behavior of braced and unbraced semi-rigid frame. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 24, n. 9, pp. 893-913.
- NBR6118, 2014. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*.
- Roik, B. & Bergmann, R. 1990. Design method for composite columns with unsymmetrical cross-section *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 33, pp. 227-242.
- Sfakianakis, M.G., 2002. Biaxial Bending with Axial Force of Reinforced, Composite and Repaired Concrete Section of Arbitrary Shape by Fiber Model and Computer Graphics. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 227-242.
- Shi, Y.J., Chan, S.L. & Wong, Y.L., 1996. Ultimate strength analysis of composite plane frames. In: *Proceedings of International Conference on Advances in Steel Structures*. Hong Kong.
- Silva, A.R.D, 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil,

Universidade Federal de Ouro Preto.

Tineo, R.P., 2016. Ligação mista viga-pilar preenchido com chapa passante: modelagem numérica e análise paramétrica. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de São Carlos.

Vega, G. & Xiao, R., 2014. Advanced study of non-linear semi-continuous beam-column end plate connection and metal-decking floor modelling. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 95, pp. 191-197.

Wang, J.-F., Han, L.H. & Uy, B., 2009. Behavior of flush end plate joints to concrete-filled steel tubular columns. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 65, pp. 925-939.

Yang, Y.B. & Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Ziemian, R.D. & McGuire, W., 2002. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, n. 10, pp. 1301-1307.

Zubydan, A.H., 2013. Inelastic Large Deflection Analysis of Space Steel Frames Including H-shaped Cross Sectional Members. *Engineering Structures*, vol. 48, pp. 155-165.