



FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA A SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Ígor José Mendes Lemes

Rafael Cesário Barros

Jéssica Lorrany e Silva

Everton André Pimentel Batelo

Ricardo Azoubel da Mota Silveira

igor@em.ufop.com

rafaelcesario@hotmail.com

jessicalorrany05@hotmail.com

everton.batelo@gmail.com

ricardo@em.ufop.com

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo. *A análise numérica não linear de estruturas de concreto armado via Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) clássico apresenta simplificações que acarretam na perda de precisão na resposta. Recentemente, alguns trabalhos eliminaram tais simplificações através do emprego do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). A presente pesquisa visa a análise dessas estruturas, via MRPR clássico, com pseudo-molas nas extremidades do elemento finito. Assim, a perda gradual da rigidez no MRPR é determinada através da combinação de esforços normal e momento fletor (NM) na seção transversal. A limitação dos regimes não fissurado, elástico e plástico é feita no diagrama NM. Para cada regime é necessária a definição das equações que descrevem a degradação da rigidez da seção. O objetivo é manter a simplicidade do MRPR, eliminando o procedimento não linear local, usual no MCD, para a avaliação da rigidez à flexão e consequentemente reduzir o tempo de execução das análises. Para validação das simulações numéricas, as respostas encontradas com a formulação proposta são confrontadas com resultados experimentais e numéricos presentes na literatura.*

Palavras-Chave: *Estruturas de concreto armado, plasticidade concentrada, curvas de interação, pseudo-molas, fissuração*

1 INTRODUÇÃO

No cenário atual da construção civil, o concreto se destaca como um dos materiais mais utilizados na confecção de elementos estruturais. Dessa forma, o entendimento do comportamento do material é essencial para o projetista. A utilização de materiais de alta resistência resulta em seções cada vez mais esbeltas e nessas condições, existe o aparecimento de grandes deslocamentos e deformações, que originam os chamados efeitos não lineares. A relação constitutiva do concreto é naturalmente não linear e nem mesmo isotrópica, uma vez que a resistência à tração do concreto é muito menor do que na compressão (cerca de 1/10 da resistência à compressão; Carvalho e Figueiredo Filho, 2014). Por outro lado, o comportamento do aço pode ser considerado isotrópico, contudo, a relação tensão-deformação torna-se não linear após atingir a tensão de escoamento. Maiores detalhes sobre as relações constitutivas do aço e do concreto serão mostrados nas seções subsequentes.

Devido a essas fontes de não linearidade é que modelos numéricos são desenvolvidos objetivando um estudo mais realista do comportamento desses sistemas estruturais em aço e concreto.

As normas mais atuais apresentam uma tendência de encorajar a utilização e desenvolvimento de métodos e programas de análise estrutural que considerem as não linearidades das estruturas de concreto armado em projetos estruturais (Stramandinoli, 2007). Bratina *et al.* (2004) destacam que a evolução das metodologias numéricas de análise de estruturas de concreto armado influenciaram de forma positiva a previsão do comportamento estrutural (tensões, deslocamentos, cargas limites, danos, etc.).

Nesse sentido, métodos de alta precisão como os que consideram a plasticidade distribuída exigem um esforço computacional elevado. Em contrapartida tem-se o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR), que considera a plasticidade apenas nos pontos nodais do elemento. Embora mais simples, em pesquisas recentes vê-se que o MRPR apresenta uma precisão considerável nas respostas numéricas (Fong e Chan, 2012; Liu *et al.*, 2012; Lemes *et al.*, 2017a; Lemes *et al.*, 2017b; Lemes *et al.*, 2017c). A abordagem clássica do MRPR parte de um elemento finito híbrido com molas fictícias nas extremidades do elemento, sendo a degradação da rigidez dessas molas responsável pela simulação da não linearidade física sob a possibilidade de três regimes: elástico-linear, elastoplástico e plástico.

Como observado por Lemes *et al.* (2017b), a metodologia perde precisão na tentativa de simulação de elementos de concreto armado. Isso se deve ao fato de que há sempre um regime linear elástico, limitado pela curva de início de plastificação, contrapondo o comportamento inerentemente não linear do concreto sob compressão. Ainda merece destaque a exclusão da fissuração nos elementos de concreto armado e/ou mistos de aço e concreto. Outro fato relevante vem de como é feita a degradação da rigidez a flexão das pseudo-molas, sendo a equação proposta definida inicialmente para elementos de aço com comportamento descrito por uma relação constitutiva elastoplástica perfeita e isotrópica (Chan e Chui, 2000). Consequentemente, além de proporcionar bons resultados para a análise não linear física de estruturas de aço, o uso de pseudo-molas pode ser aplicado também a estruturas mistas de aço e concreto usando o conceito de homogeneização da seção transversal (Fong e Chan, 2012; Lemes, 2015; Lemes *et al.*, 2017a; Lemes *et al.*, 2017b).

De forma mais realista ainda no contexto do MRPR, Lemes *et al.* (2017c) propuseram o uso do Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) (Chiorean, 2013) para a avaliação

tanto da capacidade resistente da seção transversal, quanto das rigidezes axial e à flexão. A construção da relação momento-curvatura se torna essencial para tal avaliação. Considerando a tangente à relação momento-curvatura, as rigidezes dependem diretamente do módulo de elasticidade dos materiais, retirado das respectivas relações constitutivas. Acoplou-se essa metodologia ao MRPR avaliando a plasticidade em termos nodais através dos parâmetros generalizados de rigidez. Dessa forma, as molas fictícias não foram necessárias para a simulação da não linearidade dos materiais da seção transversal.

Porém, surge como opção para solucionar o problema no MRPR clássico, a introdução de uma curva de interação para limitar o estado não fissurado e a determinação de novas equações para a degradação da rigidez dessas estruturas de concreto armado (Lemes *et al.*, 2016). Nesse sentido, Liu *et al.* (2012) e Iu (2016) buscaram a viabilização da análise dessas estruturas com base na proposta de Branson e Metz (1963), sendo a degradação da rigidez avaliada por meio da equação do momento de inércia efetivo. Nesses trabalhos, embora alguns resultados tenham apresentado a capacidade de carga condizente com dados experimentais, outros apresentam discrepância na rigidez do sistema ao longo da trajetória de equilíbrio. O presente trabalho, visa o uso do MRPR clássico com molas fictícias nas extremidades dos elementos para a obtenção com precisão da capacidade resistente e rigidez de sistemas estruturais de concreto armado.

2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

2.1 Relação força-deslocamento

Como mencionado, optou-se aqui pela utilização do MRPR, que considera a plasticidade de forma concentrada. Nesse sentido, a degradação das rigidezes axial e à flexão ocorre exclusivamente nos pontos nodais. Nesta seção apresenta-se o método de forma geral, introduzindo o efeito das não linearidades geométrica e do material.

É importante destacar algumas considerações envolvendo a formulação de elementos finitos adotada neste trabalho, isto é:

- todos os elementos são inicialmente retos e prismáticos, e a seção transversal permanece plana após a deformação;
- deslocamentos fora do plano estrutura/carregamento são ignorados pois considera-se um sistema de travamento no eixo z ;
- grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido são permitidos; e
- as deformações originadas pelo cisalhamento são ignoradas.

Nesta modelagem de sistemas estruturais via MEF, é usado o elemento finito de viga-pilar híbrido, de comprimento L , delimitado pelos pontos nodais i e j , ilustrado na Fig. 1. Esse elemento apresenta em suas extremidades molas rotacionais fictícias, de comprimento nulo ($L_{mola} \rightarrow 0$), que são responsáveis pela simulação da plasticidade por meio do parâmetro S_p , abordado na Seção 2.2. O elemento finito é referenciado ao sistema corrotacional, onde os graus de liberdade são as rotações nos nós i e j , dadas por θ_i e θ_j e o deslocamento axial no nó j , δ . Já os termos M_i , M_j e P representam os momentos fletores e a força axial nos respectivos graus de liberdade.

Segundo Chan e Chui (2000), a rotação relativa das pseudo-molas, ϕ_p , é definida entre os ângulos de rotação do lado conectado ao nó global do elemento, θ_p , e daquele conectado a um

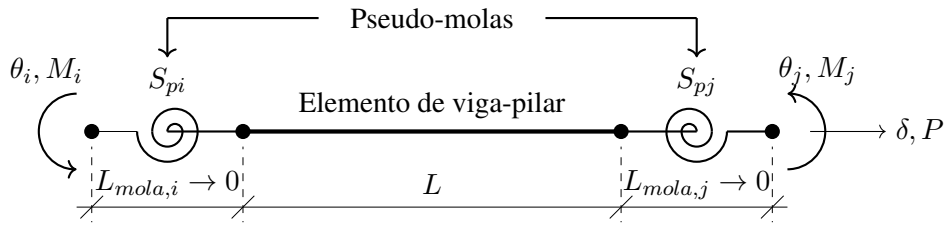


Figura 1: Elemento finito híbrido referenciado ao sistema corrotacional

outro elemento de viga-pilar. Com base na configuração deformada do elemento finito, por meio da ação de momentos fletores ilustrada na Fig. 2, escreve-se, na forma incremental, as relações cinemática, constitutiva e de equilíbrio, respectivamente como:

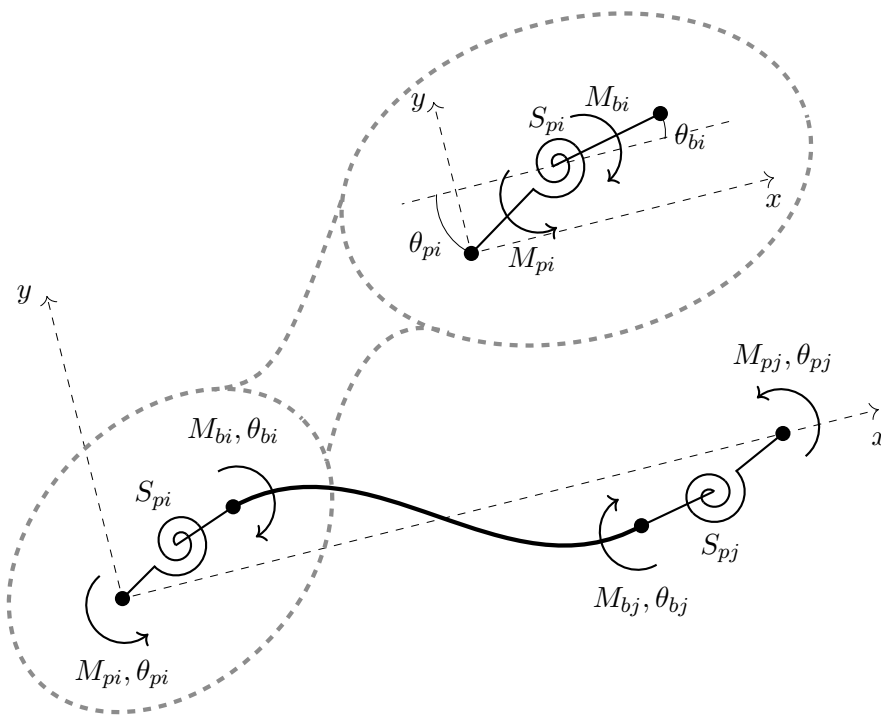


Figura 2: Elemento finito híbrido deformado

$$\Delta\phi_{pi} = \Delta\theta_{pi} - \Delta\theta_{bi} \quad (1)$$

$$\Delta\phi_{pj} = \Delta\theta_{pj} - \Delta\theta_{bj}$$

$$\Delta M_{pi} = S_{pi} \Delta\phi_{pi} \quad (2)$$

$$\Delta M_{pj} = S_{pj} \Delta\phi_{pj}$$

$$\Delta M_{pi} + \Delta M_{bi} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta M_{pj} + \Delta M_{bj} = 0$$

em que $\Delta\phi_{pi}$ e $\Delta\phi_{pj}$ descrevem as rotações relativas incrementais referentes à não linearidade dos materiais simulada pela pseudo-mola, ΔM_{pi} e ΔM_{pj} são, respectivamente, os momentos

fletores atuantes nos elementos de mola das extremidades i e j , e ΔM_{bi} e ΔM_{bj} os momentos atuantes na extremidade do elemento de viga.

A devida manipulação algébrica das Eqs. (1), (2) e (3) gera três sistemas de equações que representam o equilíbrio das molas nos nós i e j e ainda o equilíbrio no elemento de viga. Esses sistemas? são respectivamente escritos na forma matricial como segue:

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{pi} \\ \Delta M_{bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pi} & -S_{pi} \\ -S_{pi} & S_{pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{pi} \\ \Delta \theta_{bi} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{pj} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pj} & -S_{pj} \\ -S_{pj} & S_{pj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{pj} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_{bi} \\ \Delta M_{bj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_{bi} \\ \Delta \theta_{bj} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Por fim, através da condensação dessas três relações matriciais em uma única relação força-deslocamento para o elemento finito híbrido, considerando todos os graus de liberdade, é possível escrever:

$$\begin{Bmatrix} \Delta P \\ \Delta M_{pi} \\ \Delta M_{pj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{pi} - \frac{S_{pi}^2(S_{pj}+k_{33})}{\beta} & \frac{S_{pi}k_{23}S_{pj}}{\beta} \\ 0 & \frac{S_{pj}k_{32}S_{pi}}{\beta} & S_{pj} - \frac{S_{pj}^2(S_{pi}+k_{22})}{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_{pi} \\ \Delta \theta_{pj} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

na qual $\beta = (S_{pi} + k_{22})(S_{pj} + k_{33}) - k_{32}k_{23}$.

Os termos k_{11} , k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33} são componentes da matriz de rigidez do elemento de viga-pilar, sem as pseudo-molas, descritos por (Lemes *et al.*, 2017c):

$$k_{11} = \frac{E_c A}{L} \quad (8)$$

$$k_{22} = \frac{E_c (3I_{eq,i} + I_{eq,j})}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (9)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{E_c (I_{eq,i} + I_{eq,j})}{L} - \frac{PL}{30} \quad (10)$$

$$k_{33} = \frac{E_c (I_{eq,i} + 3I_{eq,j})}{L} + \frac{2PL}{15} \quad (11)$$

sendo P a força axial interna atuante, E_c o módulo de elasticidade do concreto, A a área da seção transversal, I_{eq} o momento de inércia segundo a proposta de Branson e Metz (1963), avaliado nos pontos nodais i e j , e L o comprimento do elemento finito.

Pode-se notar que há uma parcela adicional nos termos referentes à flexão. Essa parcela se refere à consideração da não linearidade geométrica, que é introduzida nesta metodologia por meio de uma formulação simplificada proposta por Yang e Kuo (1994). A opção pelo emprego desses termos simplificados foi feita em análises numéricas anteriores, onde termos de ordem elevada pouco influenciaram na resposta global dos sistemas de concreto armado de pequeno porte simulados (Lemes *et al.* 2017c).

A transformação do sistema corrotacional para os sistemas local e global pode ser vista em Lemes (2015).

2.2 Rigidez rotacional das pseudo-molas

Como já mencionado, no MRPR a degradação da rigidez à flexão da seção transversal, simulando a plasticidade, é feita por pseudo-molas. Assim sendo, é necessário obter formas de degradação da rigidez dessas molas condizentes com o material empregado na seção transversal. A proposta original do MRPR foi desenvolvida para elementos de aço com comportamento elastoplástico perfeito. Quando se trata de elementos em concreto armado a metodologia original deve ser modificada conforme proposto no presente trabalho.

A Figura 3 ilustra três curvas de interação referente a uma dada seção transversal: a curva de plastificação total - indica o limite resistente; a curva de início de plastificação - define a região elástica; e a curva de início de fissuração - delimita o estado não fissurado da seção transversal. Todas essas curvas são frutos de uma combinação entre o esforço axial e um momento fletor atuante em torno de um dos eixos principais de inércia.

A curva de início de fissuração não era necessária na proposta original do MRPR (Chan e Chui, 2000), uma vez que se tratava exclusivamente de sistemas estruturais de aço. Porém, na evolução do método nota-se a necessidade de introduzir essa curva para melhor se aproximar do comportamento real de estruturas de concreto armado, como observado por Lemes *et al.* (2017b).

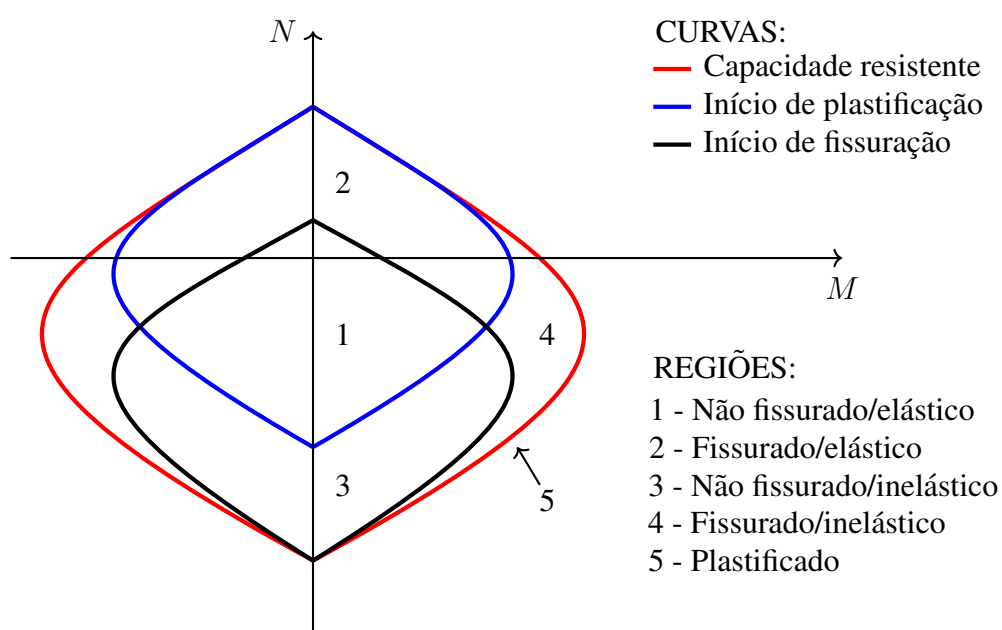


Figura 3: Curvas interação NM e regiões de degradação da rigidez rotacional das molas

Na Figura 3 é possível observar também quatro regiões. Dessa forma, necessita-se da definição de expressões para a simulação da rigidez da pseudo-mola em cada uma das regiões descritas. São elas:

$$\text{se } M \leq M_{er} : \quad S_p = 1 \times 10^{16} \quad (12)$$

$$\text{se } M_{er} < M < M_{pr} : S_p = \frac{EI_{eq}}{L} \left(\frac{M_{pr} - M}{M - M_{er}} \right) \quad (13)$$

$$\text{se } M = M_{pr} : S_p = 1 \times 10^{-10} \quad (14)$$

em que L é o comprimento do elemento finito, M_{pr} e M_{er} são os momentos de plastificação total e o de início de plastificação reduzidos pela ação conjunta a um esforço axial, e EI é a rigidez a flexão da seção, considerando a fissuração, como discutido a diante (Seção 2.3).

No contexto do MRPR clássico, três equações definem a rigidez das pseudo-molas para as regiões anteriormente citadas. Nas regiões 1 e 2, tem-se que a seção está em regime elástico. Nas regiões 3 e 4, a mesma se encontra em processo de degradação da rigidez devido a deformações plásticas. E por fim, quando a plastificação completa da seção ocorre (região 5).

Note que, pelo valor descrito na Eq. (12) que não há a possibilidade de simular a fissuração em regime elástico. Tal ajuste é feito na seção seguinte.

2.3 Fissuração do concreto no regime elástico - Região 2

Como ressaltado anteriormente, não há uma equação específica para simular a fissuração usando a rigidez rotacional das pseudo-molas, S . Assim, pretende-se utilizar, ainda, a Eq. (12). Quando as rigidezes das pseudo-molas são infinitas, ou tratadas numericamente como tal, o limite para $S_p \rightarrow \infty$ faz com que os termos k_{22} , k_{23} , k_{32} e k_{33} apresentem convergência para os valores atribuídos nas Eqs. (9), (10) e (11). Assim, para os termos expressos nas equações tem-se o momento de inércia modificado pela proposta de Branson e Metz (1963), utilizada em várias formas por normas de projeto tais como a NBR 6118 (2014) e o ACI 318 (2008), como:

$$\text{se } M > M_{fi} : I_{eq} = \left(\frac{M_{fi}}{M} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_{fi}}{M} \right)^3 \right] I_{fi}, \quad I_{eq} \leq I_c \quad (15)$$

$$\text{se } M \leq M_{fi} : I_{eq} = I_c \quad (16)$$

em que M_{fi} e M são, respectivamente, o momento de início de fissuração e o momento fletor atuante na seção, I_c é o momento fletor da seção intacta (inclinação inicial da relação momento-curvatura para esforço normal nulo) e I_{fi} é o momento de inércia da seção fissurada avaliado na análise não linear da seção transversal (Seção 3).

2.4 Return mapping

Uma vez que a capacidade resistente das seções transversais é definida pela curva de interação entre o esforço normal e o momento-fletor, deve-se ter atenção para que esse limite não seja excedido.

Nas seções plastificadas, a combinação NM se encontra exatamente sobre um ponto da curva de interação. Assim, variações nas cargas externas atuantes na estrutura podem gerar alterações nas forças internas de modo a violar o limite resistente da seção. Trata-se de um problema numérico que é corrigido utilizando a estratégia denominada *return mapping*, onde maiores detalhes podem ser encontrados em Lemes *et al.* (2017c).

2.5 Solução do problema estrutural não linear

Para a solução do problema estático não linear global, estratégias eficientes de incrementos de carga e iteração foram utilizadas. Isso foi feito com o propósito de produzir resultados mais satisfatórios, passando por pontos limites que possam vir a aparecer nas trajetórias de equilíbrio.

O incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda^0$, é determinado automaticamente pela técnica do deslocamento generalizado (Yang e Kuo, 1994). Assim, $\Delta\lambda^0$ é calculado como:

$$\Delta\lambda^0 = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{\left| \frac{({}^1\delta\mathbf{U}_r^T)({}^1\delta\mathbf{U}_r)}{({}^t\delta\mathbf{U}_r^T)(\delta\mathbf{U}_r)} \right|} = \pm\Delta\lambda_1^0 \sqrt{|GSP|} \quad (17)$$

em que o índice 1 indica os valores de $\Delta\lambda^0$ e $\delta\mathbf{U}_r$ obtidos no primeiro passo de carga e GSP (*Generalized Stiffness Parameter*) representa o parâmetro de rigidez generalizado do sistema. O sinal da equação anterior depende apenas dos vetores ${}^t\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga anterior) e $\delta\mathbf{U}_r$ (passo de carga corrente). Segundo Yang e Kuo (1994), o parâmetro de rigidez GSP torna-se negativo para os passos de carga localizados nas regiões próximas aos pontos limites. Para os demais, esse parâmetro permanecerá sempre positivo.

No esquema tradicional do método de Newton-Raphson o parâmetro de carga λ é mantido constante ao longo de todo o processo iterativo. Dessa forma, a trajetória de equilíbrio pode ser obtida até que um ponto limite e/ou de bifurcação seja atingido. A liberdade de variação de λ possibilita que toda a trajetória de equilíbrio seja traçada. Neste trabalho, foi utilizada a estratégia da norma mínima dos deslocamentos residuais proposta por Chan (1988), em que a correção do parâmetro de carga $\delta\lambda^k$ é dada por meio da equação:

$$\delta\lambda^k = -\frac{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_g^k}{(\delta\mathbf{U}_r^k)^T \delta\mathbf{U}_r^k} \quad (18)$$

sendo $\delta\mathbf{U}_g^k$ a correção obtida da aplicação do método de *Newton-Raphson*, resultante da aplicação das forças desequilibradas e $\delta\mathbf{U}_r^k$ o vetor de deslocamentos iterativos, resultante da aplicação de $\mathbf{F}_r$, que é um vetor de cargas de referência.

Maiores detalhes do processo de solução não linear podem ser vistos em Silva (2009), Lemes (2015) e em Lemes *et al.* (2017c).

3 ANÁLISE DA SEÇÃO TRANSVERSAL

3.1 Comportamento dos materiais

Para se fazer uma análise precisa do comportamento não linear da seção transversal sob ações externas, é necessária a correta descrição do comportamento dos materiais presentes na mesma.

No presente trabalho optou-se por utilizar a relação constitutiva parábola-retângulo para descrever o comportamento uniaxial do concreto sob compressão. Quando tracionado, o modelo constitutivo proposto por Bazant e Oh (1983), sendo a máxima deformação de tração limitada em 0.07% (Bratina *et al.*, 2004), foi utilizado.

Foi estabelecido um modelo elastoplástico perfeito para a descrição do comportamento do aço das armaduras, desprezando-se o efeito do encruamento. A Figura 4 ilustra o comportamento uniaxial dos materiais constituintes das seções de concreto armado.

3.2 Relação momento-curvatura

Neste trabalho, optou-se por utilizar o método iterativo de *Newton-Raphson* para a obtenção da relação momento-curvatura. Para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incremen-

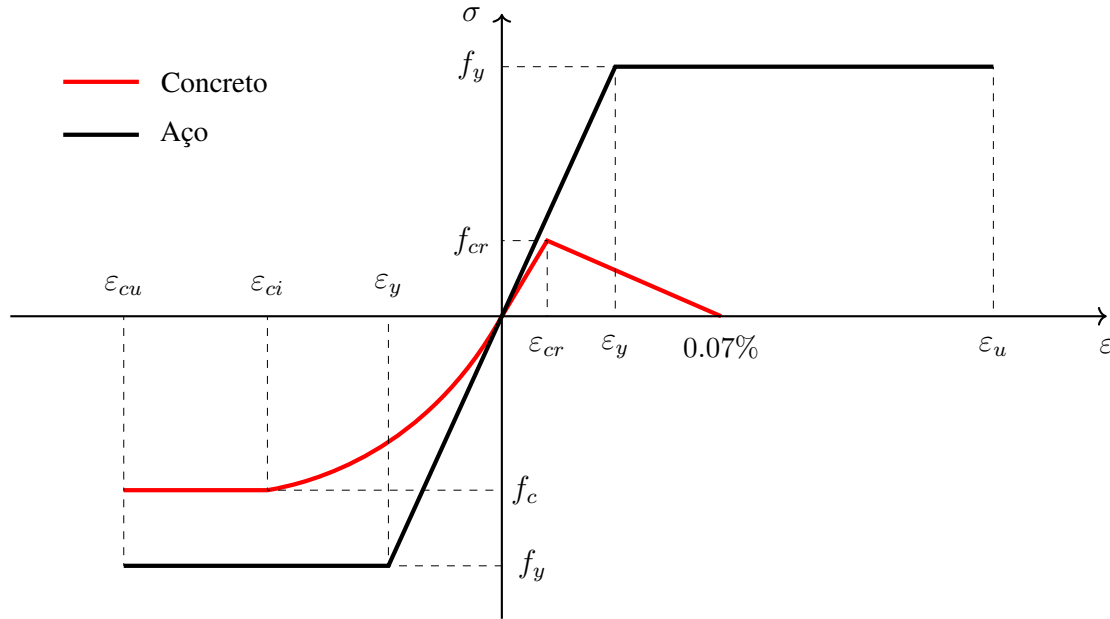


Figura 4: Relações constitutivas adotadas para o concreto e para o aço

tos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. Foi então utilizada uma estratégia de incrementos mista, relacionando diretamente o momento como função da curvatura, tal como (Zubydan, 2013):

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI \quad (19)$$

em que o índice j refere-se ao incremento anterior, Φ é um valor constante de incremento para curvatura e EI a rigidez à flexão da seção transversal.

Para descrever a distribuição de deformações, a discretização da seção em fatias é bastante eficiente. O propósito dessa divisão é captar a deformação axial, ϵ , no centroide plástico CP de cada fatia e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões, σ_i . Duas variáveis são substanciais para empregar essa metodologia: a área das fatias, A_i , e sua respectiva posição, y_i . Essa segunda é referenciada à linha neutra plástica (LNP) de modo a minimizar problemas de convergência (Sfakianakis, 2002).

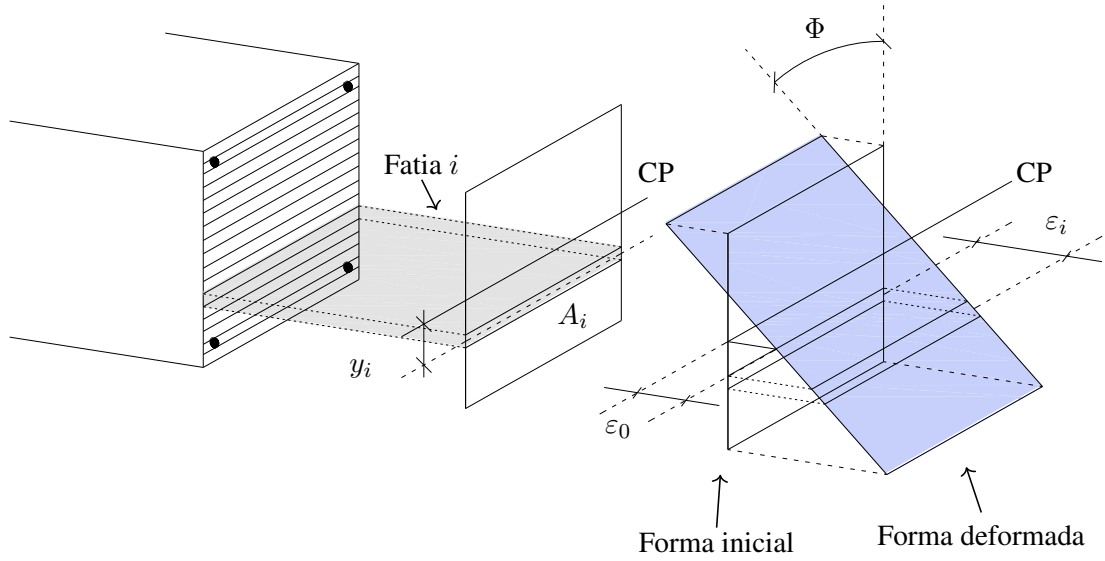
A Figura 5 ilustra a distribuição de deformações em uma seção de concreto armado para uma combinação de esforços axial e de momento fletor. Assim, a deformação axial na i -ésima fatia, ϵ_i , é dada por:

$$\epsilon_i = \epsilon_0 + \phi y_i \quad (20)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos da fatia analisada e da seção transversal, ϵ_0 é a deformação axial no CP da seção e ϕ a respectiva curvatura.

Para a notação matricial adotada a seguir, as variáveis ϵ_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\epsilon_0 \quad \phi]^T$. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0 \quad (21)$$


 Figura 5: Campo de deformações sem curvatura em torno do eixo y

em que o vetor de forças externas $\mathbf{f}_{ext}$ é dado pelo esforço axial, N , e de momento fletor, M . Na forma matricial, a equação anterior é descrita como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] A_i \\ \sum_{i=1}^{n_{fat}} \sigma[\varepsilon_i(\varepsilon_0, \phi)] y_i A_i \end{bmatrix} \quad (22)$$

na qual, n_{fat} é o número de fatias geradas pela discretização da seção.

Já o vetor de forças internas é dado por expressões integrais clássicas para o esforço axial, N_{int} , e momento fletor, M_{int} . Uma vez conhecidas as áreas, A_i , e posições, y_i , de cada fatia, a integral passa a ser o somatório descrito na Eq. (22).

Embora seja eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte, $k + 1$, o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (23)$$

com $\mathbf{F}'$ sendo a matriz Jacobiana do problema não linear (Eq. 21) ou matriz constitutiva da seção transversal, isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} A_i & f_{12} = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} y_i A_i & f_{22} = \sum_{i=1}^{n_{fat}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

em que $E_{T,i}$ é o módulo de elasticidade tangente retirado diretamente da relação constitutiva do material componente da i -ésima fatia.

O critério de convergência adotado neste trabalho é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}$, e do vetor de forças externas, $\mathbf{f}_{ext}$. Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (25)$$

com Tol sendo uma dada tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

O procedimento não linear descrito nesta seção é ilustrado na Fig. 6.

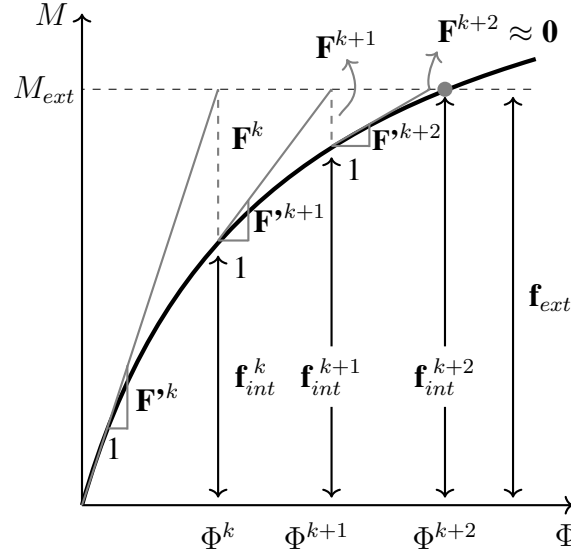


Figura 6: Construção da relação $M \times \Phi$

3.3 Curvas de interação NM

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então que esse par de esforços é um ponto da curva de plastificação. A curva de início de fissuração e de início de plastificação seguem a mesma forma de determinação, ou seja, quando, para um dado momento fletor, a primeira fatia atinge deformação superior a ε_{cr} tem-se o momento de início de fissuração. E, quando a primeira fatia atinge a deformação axial $\varepsilon_{ci}/2$ (Fong e Chan, 2012), tem-se o momento de início de plastificação.

As curvas de interação esforço normal-momento fletor são construídas antes do início da análise estrutural, pois a construção da relação momento-curvatura até o momento de plastificação, em cada ponto nodal da estrutura durante o ciclo incremental-iterativo global, demanda um esforço computacional elevado. Tal estratégia é adotada com o intuito de acelerar a execução das simulações numéricas.

Fora do ciclo incremental-iterativo, obtêm-se então as curvas de interação NM . Dessa forma, a construção da relação momento-curvatura é feita para cada incremento de momento fletor até que a matriz constitutiva da seção, dada na Eq. (24), fique singular.

Em contrapartida, torna-se necessário simplificar as curvas de interação. Assim, as curvas são construídas através de uma série de pares ordenados NM . Uma vez iniciada a análise estrutural é necessário saber os valores dos momentos reduzidos, M_{pr} , M_{er} e M_{fi} , para um

dado valor de esforço normal, N . Assim, qualquer ponto em uma das curvas de interação, mostrada na Fig. 7, pode ser obtido por interpolação linear, tal como dado a seguir:

$$M_{re} = \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{N_{j+1} - N_j} \right) (N - N_j) + M_j \quad (26)$$

sendo j e $j + 1$ os pontos que apresentam esforço normal N_j e N_{j+1} imediatamente menor e maior, respectivamente, que o valor de N .

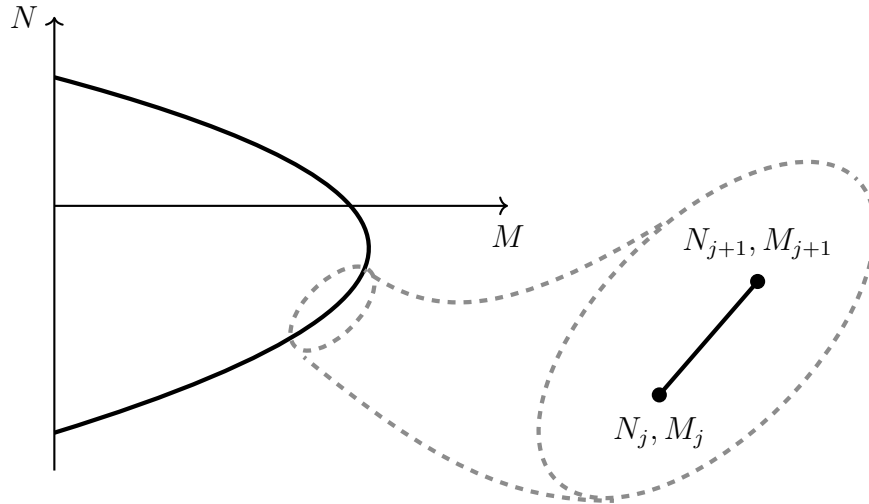


Figura 7: Curva de interação NM

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Viga simplesmente apoiada

As vigas de concreto armado ensaiadas por Beber (2003) e ilustradas na Fig. 8 são simuladas numericamente. O referido autor fez ensaios em duas vigas geometricamente idênticas, sendo denominadas como VT1 e VT2. Tratam-se de duas vigas simplesmente apoiadas com vão de 2.35 m e solicitadas por cargas verticais incrementais igualmente espaçadas. A seção transversal é assimétrica, com armadura positiva dada por duas barras de 10 mm de diâmetro, e a armadura negativa por duas barras de 6 mm, como pode ser visto na Fig. 8(b). Os parâmetros de resistência e rigidez dos materiais utilizados são apresentados na Tab. 1.

Tabela 1: Dados dos materiais da viga simplesmente apoiada (Unidades: kN e cm)

Concreto					Aço		
f_{cm}	f_{tm}	E_c	ε_{ci}	ε_{cu}	F_{yd}	E_a	ε_u
3.35	0.262	2825.4	-0.002	-0.0035	56.5	21480	0.060

Stramandinoli e Rovere (2008) destacam que cada uma das linhas de armaduras possuem diferentes tensões de escoamento, e ainda, a armadura negativa (comprimida) apresenta encruamento com módulo de elasticidade igual a $0.016E_a$. A NBR 6118 (2014) permite a consideração

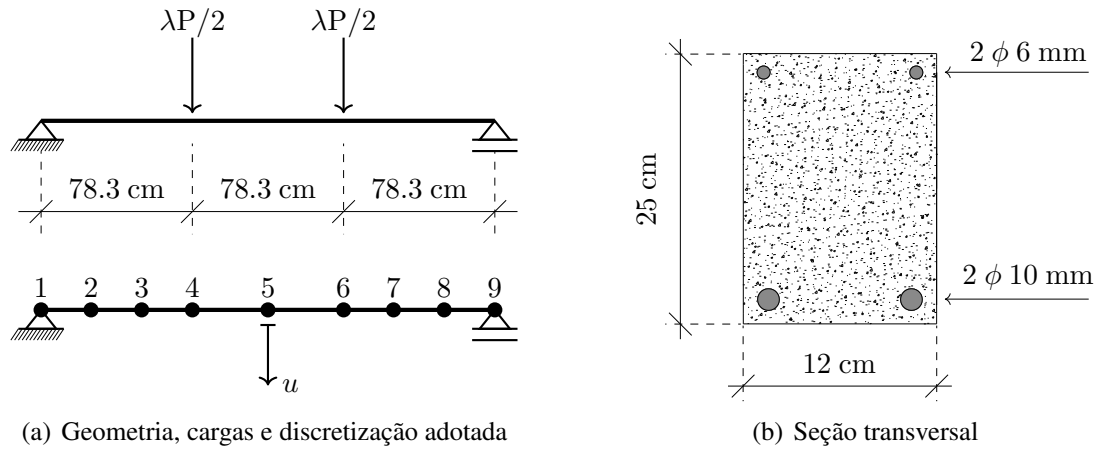


Figura 8: Viga de concreto armado

do encruamento exclusivamente nas barras tracionadas. Nesse sentido, optou-se por considerar que ambas as linhas de armaduras apresentassem o mesmo comportamento (elastoplástico perfeito) e com o mesmo valor de tensão de escoamento.

O resultado obtido por meio da simulação numérica é comparado com os experimentais de Beber (2003) e ilustrado na Fig. 9. Verifica-se uma aproximação razoável da resposta obtida com a formulação proposta. Como já mencionado, as vigas VT1 e VT2 são iguais. A capacidade limite de carga ficou bastante próxima dos valores experimentais para os dois protótipos.

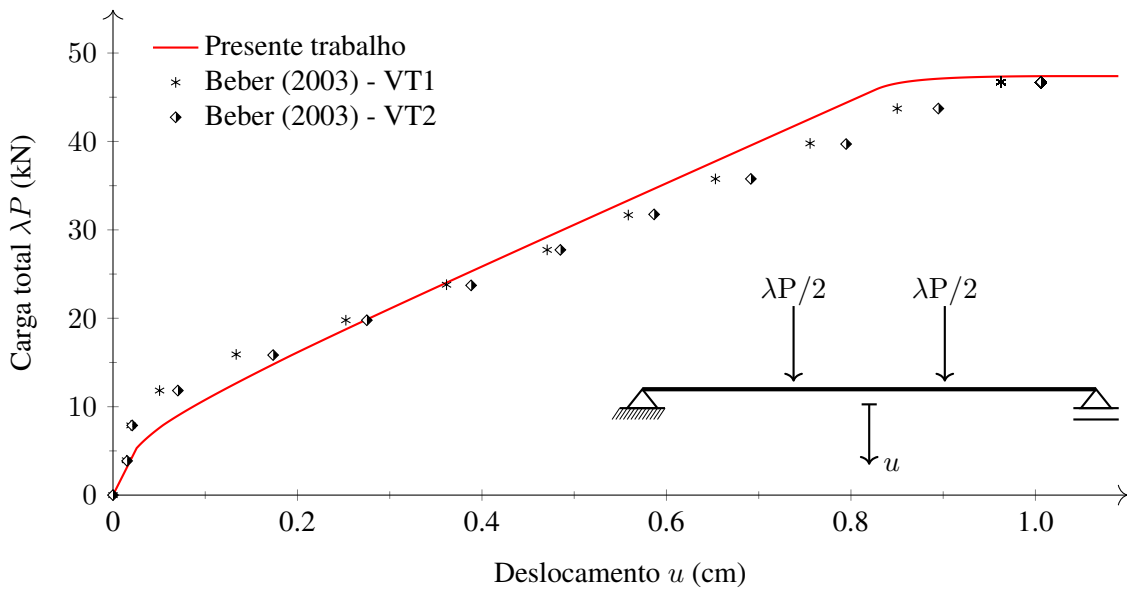


Figura 9: Trajetória de equilíbrio - viga de concreto armado

4.2 Pilar de Foure

Na Figura 10 é apresentado o chamado pilar de Foure, que foi ensaiado inicialmente por Espion (1993) e depois estudado por diversos pesquisadores (Bratina *et al.*, 2004; Liu *et al.*, 2012; Iu 2016) para validação de seus resultados numéricos. Trata-se de um pilar de concreto

armado com 225 cm de comprimento, engastado na base, e sob flexão em torno do eixo de menor inércia, como destacado na Fig. 10. Essa flexão ocorre devido a uma excentricidade da carga vertical aplicada a 1.5 cm do eixo centroidal do elemento. Além disso, segundo Liu *et al.* (2012), uma imperfeição geométrica inicial deve ser tomada igual a $h/1000$. A malha de elementos finitos adotada na modelagem deste exemplo tem 4 elementos e 5 pontos nodais. A seção transversal é retangular 15x20 cm com armaduras positivas e negativas com áreas iguais a 2.26 cm^2 , discretizada em 16 fatias estruturadas. Os dados dos materiais componentes do pilar estão na Tab. 2.

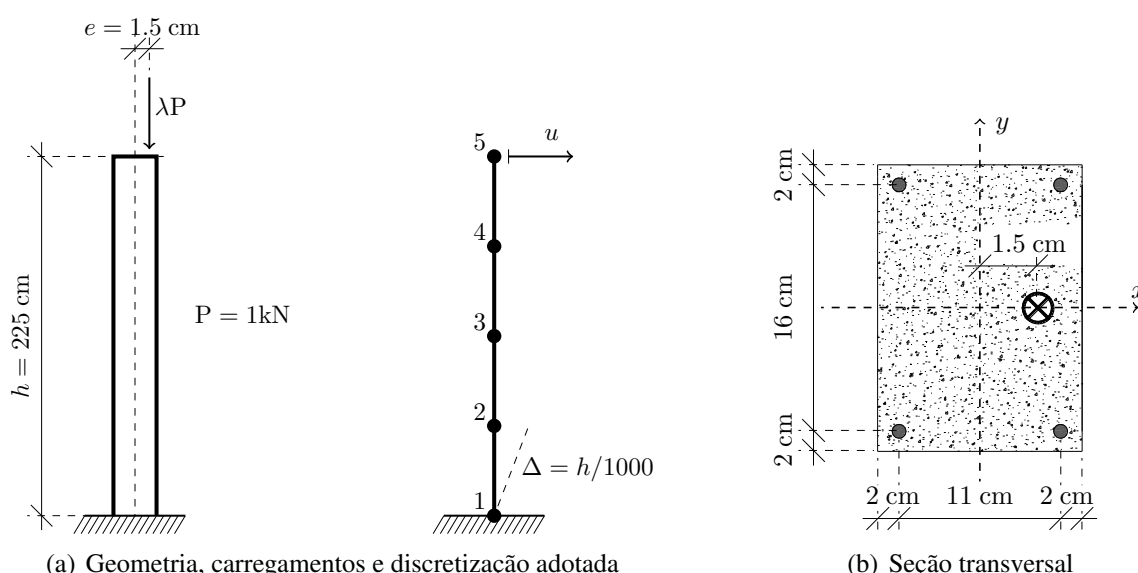


Figura 10: Pilar de Foure

Tabela 2: Dados dos materiais do pilar de concreto armado (Unidades: kN e cm)

Concreto					Aço		
f_{cd}	f_{td}	E_c	ε_{ci}	ε_{cu}	f_{yd}	E_a	ε_u
3.83	0.292	3330	-0.0023	-0.0035	46.5	20000	0.020

Pode-se verificar na Fig. 11 a comparação entre os resultados obtidos com a presente metodologia e o encontrados na literatura. Na análise realizada no presente trabalho ($P_{num} = 451.446 \text{ kN}$), verifica-se uma diferença de apenas 0.56% no valor da carga máxima suportada pelo elemento estrutural em comparação ao valor medido em laboratório ($P_{exp} = 454 \text{ kN}$). É notável também a boa aproximação na rigidez inicial da trajetória de equilíbrio.

4.3 Quadro de concreto armado

O portal ilustrado na Fig. 12 é estudado nesta seção. Novamente, estão disponíveis na literatura resultados experimentais (Ferguson e Breen, 1966) e numéricos (Bratina *et al.*, 2004; Lemes *et al.*, 2017c). Trata-se de um pórtico quadrado de concreto armado com altura e vão iguais a 213 cm e uma imperfeição geométrica inicial global igual a $h/500$. São aplicadas

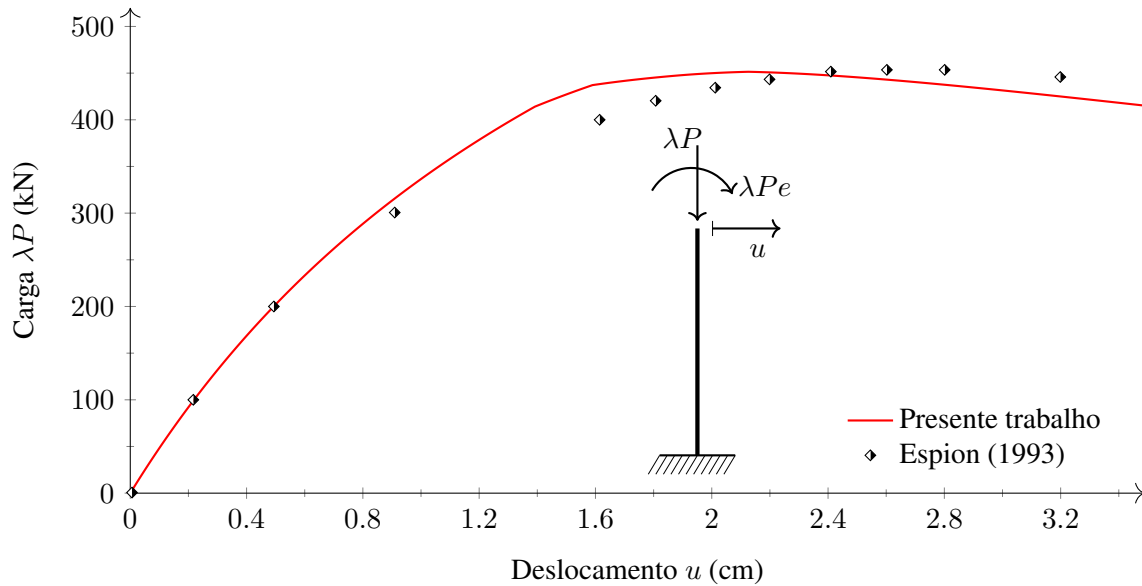


Figura 11: Trajetória de equilíbrio - Pilar de Four

cargas incrementais verticais no topo dos dois pilares e uma carga horizontal no topo do pilar da direita. Cada membro é dividido em dois elementos finitos. As seções dos pilares e das vigas são retangulares com armaduras longitudinais dispostas conforme ilustrado nas Figs. 12(b) e 12(c), respectivamente. Uma malha estruturada com 8 fatias é utilizada nas seções transversais. Os dados dos materiais utilizados nas análises são destacados na Tab. 3.

Tabela 3: Dados dos materiais do quadro em concreto armado (Unidades: kN e cm)

Elemento	Concreto					Aço		
	f_{cd}	f_{td}	E_c	ε_{ci}	ε_{cu}	f_{yd}	E_a	ε_u
Pilares	2.21	0.156	2389.2	-0.00185	-0.0035	38.39	20200	0.020
Vigas	2.21	0.156	2389.2	-0.00185	-0.0035	40.34	20200	0.020

Os resultados obtidos através do presente trabalho são apresentados na Fig. 13 e comparados com os experimentais de Ferguson e Breen (1966). Percebe-se mais uma boa aproximação entre o comportamento da estrutura obtido de forma numérica e o simulado em laboratório. A diferença entre as cargas limites é de 3.8%, sendo $P_{num} = 134.6$ kN e $P_{exp} = 141$ kN.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma formulação não linear baseada no conceito da plasticidade concentrada, via MRPR, para a análise de estruturas de concreto armado. Nesse sentido, pseudo-molas rotacionais foram inseridas nas extremidades dos elementos finitos para simular a degradação da rigidez à flexão da seção. O problema do não tratamento da fissuração no MRPR clássico foi contornado com o uso explícito da equação de Branson e Metz (1963).

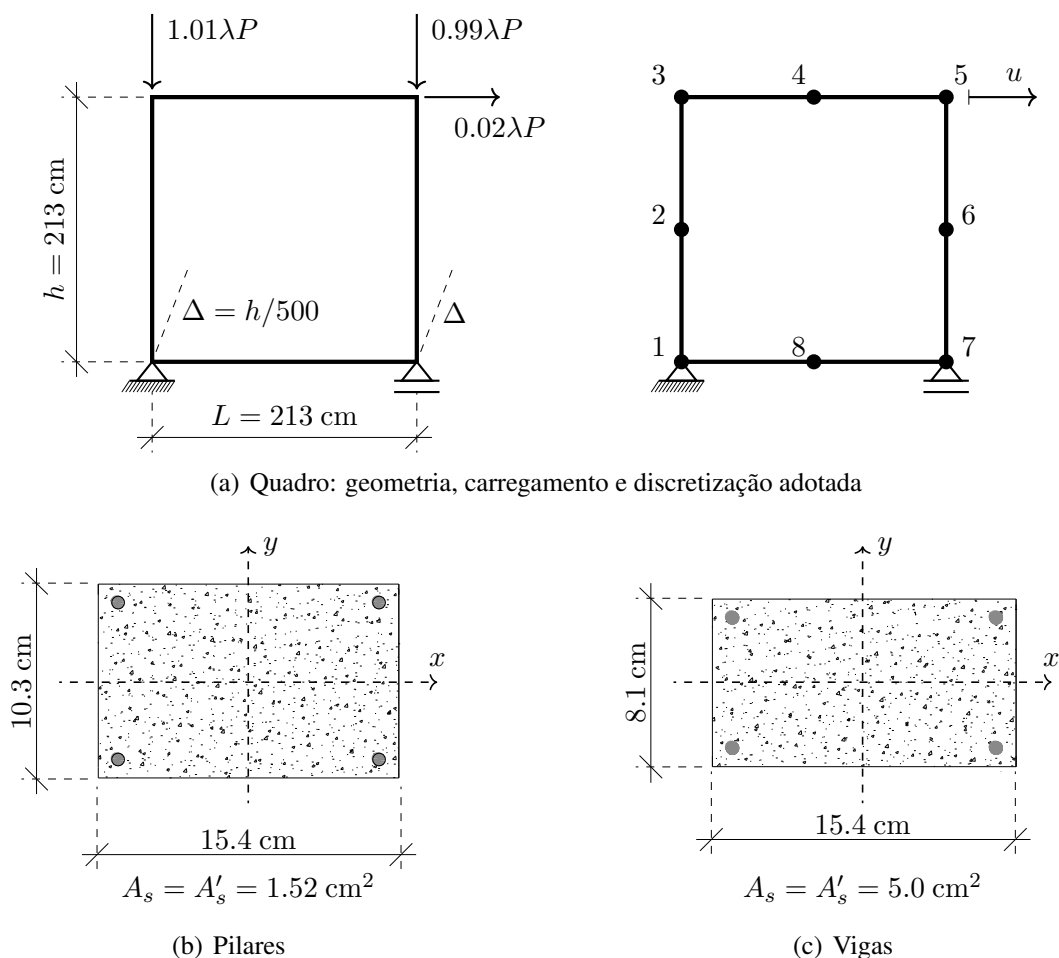


Figura 12: Quadro em concreto armado: geometria, discretização adotada e seções transversais

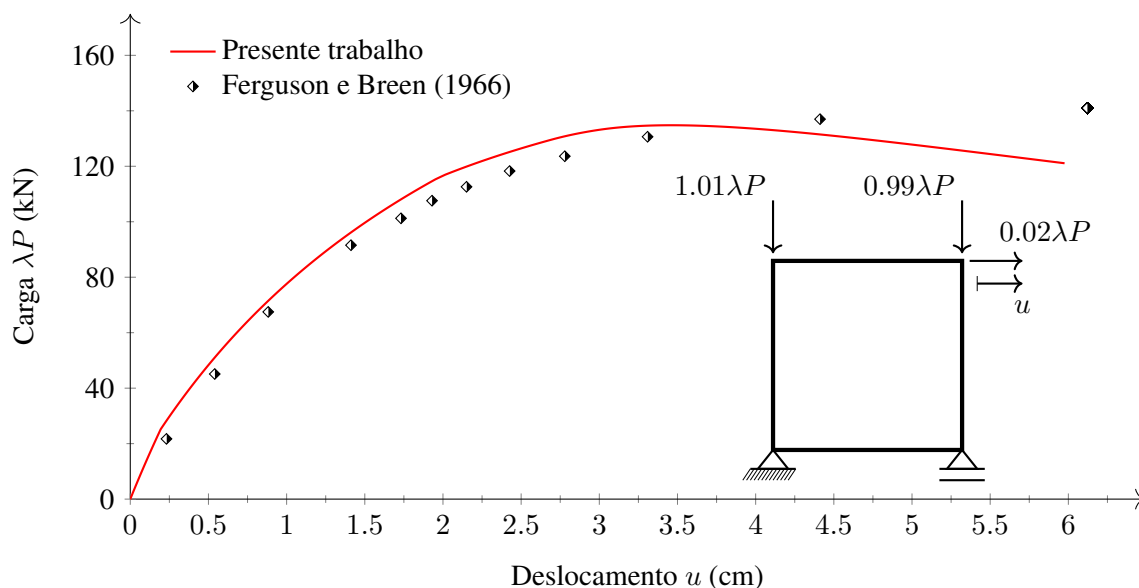


Figura 13: Trajetória de equilíbrio - quadro em concreto armado

De forma geral, todos os resultados apresentaram rigidez inicial e capacidade limite de carga bastante próximas dos resultados experimentais, o que valida a proposta do presente trabalho. Porém, em todos os casos, os valores limites de carga foram obtidos para um valor de deslocamento menor, o que indica para uma rigidez superestimada na junção do MRPR com a proposta de Branson e Metz (1963).

Como etapas futuras pretende-se expandir a formulação não linear geométrica de modo a utilizar termos de ordem elevada e possibilitar a análise de edifícios altos. Além disso, as estruturas tridimensionais e a inserção de uma mola translacional no elemento finito (para simular a degradação da rigidez axial) também se enquadram nos objetivos futuros.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e CNPq (agências federais), Fapemig (fundação estadual), Fundação Gorceix, PROPEC e PROPP/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- ACI-318, 2008. Building code requirements for reinforced concrete. American Concrete Institute.
- Bažant Z.P. & Oh B.H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, vol. 16, pp. 155-177.
- Beber, A.J., 2003. *Comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibra de carbono*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Branson, D.E. & Metz G.A., 1963. *Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams*. Auburn: Dept. of Civil Engineering and Auburn Research Foundation, Auburn University.
- Bratina, S., Saje, M. & Planinc, I., 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, pp. 7181-7207.
- Carvalho, R.C. & Figueiredo Filho, J.R., 2014. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado segundo a NBR 6118:2014*. EdUFSCar, São Carlos.
- Chan, S.L. & Chui, P., 2000. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Oxford, Elsevier.
- Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.
- Espion, B., 1993. Benchmark Examples for Creep and Shrinkage Analysis Computer Programs, Creep and Shrinkage of Concrete. *TC 114 RILEM. E&FN Spon.*
- Ferguson, P.M. & Breen, J.E., 1966. Investigation of the long concrete column in a frame subjected to lateral loads. *Symposium on Reinforced Concrete Columns*. American Concrete Institute SP-13.

- Fong, M. & Chan, S. L., 2012. Advanced analysis of steel-concrete composite beam-columns by refined plastic-hinge method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 12, n. 6.
- Iu, C. K., 2016. Nonlinear analysis of the RC structure by higher-order element with the refined plastic hinge. *Computers and Concrete*, vol. 17, n. 5, pp. 579-596.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Lemes, Í.J.L, Silva, A.R.D, Silveira, R.A.M., Rocha, P.A.S., 2016. Estudo numérico comparativo de metodologias para a degradação da rigidez à flexão no contexto do Método da Rótula Plástica Refinado. *XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*.
- Lemes Í.J.M., Silva, A.R.D, Silveira R.A.M & Rocha, P.A.S., 2017a. Determinação da capacidade resistente de elementos estruturais mistos através do método da rótula plástica refinado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 33, n. 1-2, pp. 24-34.
- Lemes Í.J.M., Silveira, R.A.M, Silva, A.R.D. & Rocha P.A.S., 2017b. Numerical anlysis of nonlinear behaviour of steel-concrete composite structures. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, vol. 10, n.1, pp. 53-83.
- Lemes Í.J.M., Silveira, R.A.M, Silva, A.R.D. & Rocha P.A.S., 2017c. Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, vol. 147, pp. 12-26.
- NBR6118, 2014. Projeto de estruturas de concreto - procedimento. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*.
- Ngo-Huu, C. & Kim, S.E., 2012. Practical nonlinear analysis of steel-concrete composite frames using fiber-hinge method *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 74, pp. 90-97.
- Sfakianakis, M.G., 2002. Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics. *Advances in Engineering Software*, vol. 33, pp. 227-242.
- Silva, A.R.D, 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Stramandinoli, R.S.B., 2007. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Stramandinoli, R.S. & Rovere, H.L.L., 2008. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members. *Engineering Structures*, vol. 30, pp. 2069-2080.
- Yang, Y.B. & Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Zubydan, A.H., 2013. Inelastic Large Deflection Analysis of Space Steel Frames Including H-shaped Cross Sectional Members. *Engineering Structures*, vol. 48, pp. 155-165.