



MODELO DISCRETO EQUIVALENTES DE SLOSHING EM TANQUES LÍQUIDOS RETANGULARES COMPARADOS A RESULTADOS EXPERIMENTAIS E SOLUÇÃO ANALÍTICAS

Alejandro A.OspinaLopez^a, Marcus V. Girão de Moraes^b, Lineu J. Pedroso^a

a – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental- Programa de PósGraduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura(GDFE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF.

E-mail: alejandraol@gmail.com, lineu@unb.br

b – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica - Grupo de Dinâmica de Sistemas(GDS). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF.

E-mail: mvmorais@unb.br

Resumo

Um absorvedor dinâmico de vibração líquido (ADV-L) é um dispositivo de controle passivo, que tem por princípio de funcionamento a transferência da energia cinética da estrutura principal para um tanque contendo um fluido. A descrição ADV-L necessita de um modelo matemático eficiente para descrever o comportamento do líquido contido no tanque. O presente trabalho apresenta a descrição do problema de *sloshing* por parâmetros equivalentes, através da comparação com resultados experimentais e solução clássica para tanques retangulares isolados e para um tanque retangular acoplado a um pêndulo (Cooker, 1994), os resultados mostram que modelos discretos equivalentes podem simular corretamente a frequência natural da onda de superfície ao interior do tanque, já para a resposta do sistema acoplado para a estrutura principal pendulo com ADV-L, existe uma pequena divergência dos resultados equivalentes com as soluções experimental e analítica.

Palavras chave: *Absorvedor líquido sintonizado, controle passivo, Sloshing, modelo contínuo, modelo discreto equivalente.*

1. INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia em novos materiais e sistemas de construção, foi possível construir estruturas mais altas, leves e flexíveis, que quando submetidas a vento, ondas e terremotos, é necessário analisar o comportamento dinâmico e minimizar a resposta estrutural. Uma maneira econômica de controlar esses níveis de vibração excessiva é proporcionar amortecimento adicional.

Um dispositivo de amortecimento passivo mostrado como efetivo é o absorvedor dinâmico de vibrações líquido (ADV-L). Um ADV-L consiste em um tanque parcialmente cheio de líquido, geralmente água. Quando uma estrutura, equipada com um ADV-L devidamente sintonizado, começa a mover-se durante o evento dinâmico, o absorvedor ADV-L dissipa a energia de excitação de entrada através do atrito da camada limite do líquido nas paredes do tanque e a quebra de onda na superfície do líquido. O movimento do fluido transmite forças de inércia aproximadamente antifase às forças dinâmicas que excitam a estrutura, reduzindo assim o movimento estrutural. Exemplos de instalação de ADV-L em estruturas de arranha-céus, torres de controle de aeroportos, chaminés, moinhos, pontes e estruturas offshore, são apresentadas por (Nojiet *al.*, 1988, Fujino *et al.*, 1988), em queos resultados apresentam efetivamente uma diminuição significativa no movimento estrutural

O ADV-L tem muitas vantagens em relação a outros dispositivos de amortecimento passivo. Este dispositivo pode operar para o controle de vibrações operacionais (de vento e de ondas) bem como eventos extremos (terremotos). É fácil de ajustar e econômico para instalar e manter. No entanto, nem toda a massa água participa na redução do movimento estrutural, a baixa densidade d'água requer dimensões maiores do reservatório.

Um ADV-L funciona de forma análoga ao conhecido amortecedor de massa sintonizada (AMS), sendo o principal efeito dinâmico a oscilação lateral horizontal do centro da massa líquida em relação ao tanque. Embora a construção de um ADV-L seja simples¹, o movimento do fluido dentro do tanque é complexo. Sua influência na resposta de uma estrutura submetida a um carregamento dinâmico não é tão bem entendida como um AMS.

Uma solução de projeto prática conveniente é transformar o sistema fluido dinâmico em um modelo dinâmico equivalente (Dodge, 2000; Ibrahim, 2005). As equações de movimentos de sistema equivalente, descritas por massas discretas presas a molas equivalente, permitem o rápido desenvolvimento de equações de movimento de sistemas mecânicos líquido acoplado a tanques rígidos.

Com base na teoria de potencial do fluido com condições de fronteira linearizadas, Graham e Rodriguez (1959) estudaram as respostas analíticas do fluido para movimentos harmônicos em translação, rotação. O movimento do fluido é descrito como uma massa rígida fixa e um conjunto de sistemas dinâmicos equivalentes massas-molas. Esta equivalência simula as forças desenvolvidas pelo movimento do fluido dentro do tanque. Os parâmetros de massa m_i e rigidez k_i equivalentes ($i = 0, \dots, n$) são obtidos através da comparação da expressão analítica da força fluido nas paredes do reservatório com a força inercial. Este modelo é limitado para pequenas acelerações de excitação e ignora a energia dissipada pelo fluido.

¹ A construção de um ADV-L consiste na realização de um tanque parcialmente cheio de fluido, não necessitando de um dispositivo mecânico com partes móveis suscetíveis a falhas por desgaste ou fadiga.

Housner (1957) foi o primeiro a imaginar a ação fluida como massas livres se movendo na direção transversal. Com base nisso, ele derivou expressões para as massas impulsivas e convectivas e suas alturas acima do fundo do tanque. A linha de parâmetros equivalentes vem produzindo alguns trabalhos nos últimos anos. Yuet *et al* (1999) estudaram um modelo numérico do ADV-L como um AMS equivalente com rigidez e amortecimento não linear. O modelo incorpora a propriedade de endurecimento da rigidez do ADV-L sob grande excitação de amplitude. Li *et al* (2011) desenvolveu um método analítico-numérico para modelos mecânicos equivalentes de fluido em aquedutos de geometria arbitrária. Os autores obtiveram resultados para a resposta devido a efeitos do vento e de sísmica em estruturas. Apenas o primeiro modo de vibração é considerado na análise dinâmica, O primeiro modo de *sloshing* é considerado para as expressões analíticas dos modelos equivalentes m_1, m_0 e k_1 e suas localizações. Uma solução suplementar e exata de um modelo mecânico equivalente para um fluido em um tanque retangular foi estudada por Li *et al* (2012). Outros mecanismos de dissipação de energia, como telas de amortecimento ou fundo inclinado, foram estudados em pesquisas como Taitet *et al* (2002), Tait (2008), mais usados no tanque de águas profundas. Nickawde (2004), Kang (2006), Yue (2011) modelaram o movimento do *sloshing* como um pêndulo simples para estudar a estabilidade do sistema acoplado no veículo espacial. O modelo de fluido equivalente ainda é uma escolha preferida para engenheiros estruturais. O presente trabalho apresenta a descrição do problema de *sloshing* por parâmetros equivalentes. Através de comparação com resultados experimentais e solução clássica para tanques retangulares e para tanque retangular acoplado a um pêndulo (Cooker, 1994), modelos discretos equivalentes são validados para resultados de frequência natural em relação a razão de aspecto $r = H/L$, onde H é a profundidade do líquido e L é o comprimento do reservatório.

2. SLOSHING EM UM TANQUE RETANGULAR

Para um tanque retangular preenchido com líquido, (considera-se inicialmente o tanque da Figura 1. isolado e fixo), denota-se a elevação da superfície livre mediante $\eta(x,t)$, e a componente horizontal da velocidade por $u(x,t)$.

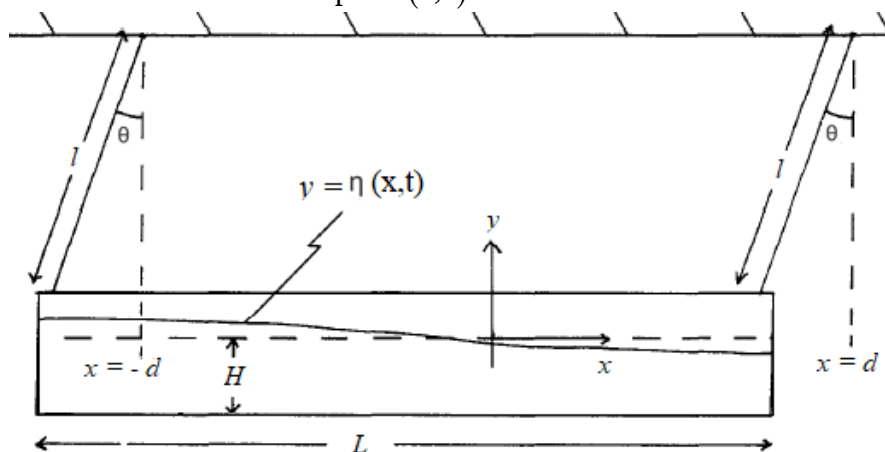


Figura 1. Tanque suspenso por fios, balançando-se horizontalmente como um pêndulo

Supondo a teoria linear de águas rasas, em que a velocidade $u(x, t)$ é independente da profundidade H do líquido, tem-se;

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2)$$

Para pequenos deslocamentos horizontais do tanque, pode-se linearizar as condições de contorno nas paredes, sendo $x = \pm d$, em vez de $x = \pm d + X$, para isto, a velocidade horizontal u é, (como no movimento de corpo rígido).

$$u(x = \pm d, t) = \frac{dX}{dt} \quad (3)$$

Eliminando a elevação da superfície livre (η) das equações (1) e (2), no comprimento do tanque, em que $x \in [-d, d]$; chega-se ao seguinte problema de condição de contorno de superfície livre,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

Para uma solução periódica do tempo, assume-se:

$$X(t) = X_0 \exp(i\omega t) \quad (5)$$

Em que X_0 é uma constante complexa e ω é uma frequência real. A solução periódica da Equação (4) que satisfaz Equação (3), sendo assumido que $\cos(kd) \neq 0$, é:

$$u(x, t) = X_0 \exp(i\omega t) \frac{\cos(kx)}{\cos kd} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\nu_n x) \exp(i\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\mu_n x) \exp(i\sigma_n t) \quad (6)$$

Sendo a primeira parcela a direita depois do igual, a velocidade em regime transiente e a segunda parcela, a resposta em regime permanente a qual quer ser estudada. Sendo $\nu_n = n\pi/d$ para $\omega_n = \nu_n \sqrt{gH}$ e $\mu_n = (n - 1/2) \pi/d$ para $\sigma_n = \mu_n \sqrt{gH}$.

A solução da equação (6), assume-se que kH é pequeno, sendo k e ω relacionados pela relação de dispersão

$$k = \omega / \sqrt{gH} \quad (7)$$

Os termos no somatório em (6) corresponde ao movimento de um tanque fixo, para o qual $u(\pm d, t) = 0$, A elevação da superfície é obtida da Eq. (1),

$$\eta(x, t) = HkX_0 \exp(i\omega t) \frac{\sin(kx)}{\cos(kd)} + i\sqrt{H/g} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(v_n x) \exp(i\omega_n t) - b_n \sin(v_n x) \exp(i\sigma_n t) \quad (8)$$

Se o tanque for mantido fixo de modo que $X_0 = 0$, em seguida as *standing wave* ou ondas permanentes de superfície livre acontecem. Os modos de superfície livres simétricos e antissimétricos tem números de onda, $v_n = 2n\pi/L$, $\mu_n = (2n - 1)\pi/L$, respectivamente, Onde n é um numero inteiro, e quando $n = 1$ o modo fundamental anti-simétrico tem um período denotado por

$$T = 2L / \sqrt{Hg} \quad (9)$$

2. SISTEMA ACOPLADO PÊNDULO – SLOSHING LINEAR

Na solução analítica com comprovação experimental apresentada por Cooker(1994), estuda-se o movimento de oscilação de um pendulo acoplado a um tanque preenchido com liquido a diferentes níveis. O tanque vazio tem uma massa m , encontrasse suspenso por fios e oscila livremente segundo representado na Figura 1, o liquido tem uma massa $M = \rho LHW$, onde ρ é a densidade do liquido, W é a largura constante do tanque, L é o comprimento do tanque e H , as diferentes alturas do nível do liquido.

O tanque é influenciado por duas forças. A primeira é a componente das tensões nos suportes, que em conjunto, dão uma força restauradora $(M + m)gX/l$ levando-o a sua posição de equilíbrio em $x = 0$, a segunda força é o carregamento da onda de superfície livre sobre as paredes do tanque (como pressão hidrostática) $\rho g(\eta - y)$ definida para uma posição com coordenadas $y \leq \eta$. Consequentemente a equação do movimento do tanque é

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -(M + m)g \frac{X}{l} + [W \int_{-H}^{\eta} \rho g(\eta - y) dy]_{x=-d}^{x=d} \quad (10)$$

Se η/H é pequeno, em seguida a equação de movimento é aproximadamente,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\Omega^2 + \frac{\rho g W H}{m} (\eta(d, t) - \eta(-d, t)) \quad (11)$$

Onde $\Omega^2 = (1 + 1/R) g/l$ e $R = m/M$, usando a Equação (8) para η , tem-se:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\Omega^2 + \frac{X_0 H k g}{Rd} \tan(kd) \exp(i\omega t) + 2 \frac{i\rho WH \sqrt{gH}}{m} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^n \exp(i\sigma_n t) \quad (12)$$

A solução geral para X é:

$$X(t) = B \exp(i\omega t) + C \exp(i\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp(i\sigma_n t) \quad (13)$$

Onde C é uma constante arbitrária,

$$B = \frac{X_0 H k g \tan(kd)}{Rd(\Omega^2 - \omega^2)} \quad (14)$$

e,

$$D_n = \frac{ib_n \sqrt{gH} (-1)^n}{Rd(\Omega^2 - \sigma_n^2)} \quad (15)$$

sendo $R = m / M = m / \rho WHL$ e considerando soluções periódicas do sistema acoplado, Equação (11), do tipo $X(t) = X_0 \exp(i\omega t)$, tem-se $C = 0$ e $D_n = 0$. Este procedimento pode ser feito mediante uma apropriada escolha das condições iniciais $B = X_0$ nas Equações (13) e (14). Desta forma deriva-se uma condição para o número de onda, em que os períodos são governados pelas raízes da Equação transcendental (16), onde $s = kd$, e $G = (1 + R)d^2 / Hl$:

$$\frac{G}{s} - R s = \tan(s) \quad (16)$$

Os dois lados da Equação (16) são funções separadas de s . Equação (16) tem um conjunto infinito de soluções positivas para s ; por ordem de tamanho crescente estes são $s_1, s_2, s_3, \dots$, onde para estritamente G e R positivo, as raízes se encontram nos intervalos $0 < s_1 < \pi/2$ e para $n \geq 2$, $(n - 2/3)\pi < s_n < (n - 1/2)\pi$.

A raiz s_1 corresponde ao comprimento de onda mais longo, para a qual, os movimentos do tanque e de onda estão em fase (modo fundamental de *sloshing* $n=1$). As raízes s_2 corresponde a uma gama de formatos de superfície entre um e três nós; Se existe um nó em seguida, a superfície oscila em oposição de fase com o tanque. Os modos mais elevados são menos importantes e correspondem a comprimentos de onda curtos onde não está apropriadamente modelado sob a suposição de que $kH \ll 1$. O período acoplado T correspondente a $s = s_1$, é $T = \pi L / s \sqrt{Hg}$. Comparando o período acoplado T , com o período natural, $T_N = 2\pi \sqrt{l/g}$, do tanque vazio (movendo-se como um pêndulo simples) de comprimento l , e com o período fundamental da *standing wave* anti-simétrica, $T_s = 2L / \sqrt{Hg}$

(o qual ocorre quando o tanque é retirado dos suportes, isolado e mantido fixo, analise item 2), pode-se concluir como um importante resultado geral, que quando o tanque oscila com uma onda de superfície livre no seu modo fundamental, (pêndulo acoplado ao efeito *sloshing* linear), seu período acoplado T , é maior do que T_N e T_s . Como aclaração experimental este trabalho tem particular relevância para o caso onde o tanque tem uma massa a qual é menor que o líquido contido.

4. PROPRIEDADES ADV-L EQUIVALENTES

Rigidez e massa equivalentes correspondentes ao modo de *sloshing* fundamental para $n=1$, são usadas para representar um sistema mecânico equivalente, o qual desenvolve forças dinâmicas iguais as forças exercidas pelo líquido *sloshing* ou onda de superfície. A massa e a rigidez equivalentes representando o líquido *sloshing* em um tanque retangular são dadas por Graham e Rodriguez (1965), Dodge (2000), Ibrahim (2005).

Na Tabela 1 apresentam se os parâmetros equivalentes m_n , m_0 e k_n de *sloshing* para o modelo discreto massa-mola, onde $m_l = \rho L H W$ é definido como a massa líquida função da densidade do líquido ρ , a largura do tanque W . As expressões demonstram ser dependentes da geometria do tanque, L comprimento na direção da oscilação, H profundidade do líquido, a massa móvel ou massa da onda de superfície, decresce dramaticamente para valores de $n > 0$, isto é, altos modos, podendo-se inferir que apenas a primeira massa de slosh de menor frequência geralmente precisa ser considerada.

Tabela 1 - Parâmetros do modelo para um tanque retangular.

Parâmetro equivalente	$n = 1, 2, 3, \dots$
Massa onda de superfície, m_n	$\left[\frac{8L}{H(2n-1)\pi^3} \tanh[(2n-1)\pi H/L] \right] m_l$
Massa rígida fixa, m_0	$\left[1 - \frac{8L}{H\pi^3(2n-1)^3} \tanh[(2n-1)\pi H/L] \right] m_l$
Rigidez mola, k_n	$\left[\frac{8g}{H\pi^2(2n-1)^2} \tanh^2[(2n-1)\pi H/L] \right] m_l$

A Figura 2.a apresenta o sistema original estudado por Cooker (1994), a Figura 2.b representa a analogia mecânica estudada, a qual consiste em substituir conceitualmente a massa líquida por um conjunto de massa-mola equivalentes. Para pequenas amplitudes de oscilação assume-se parte da massa de água participa da onda de superfície m_n e parte permanece fixa no fundo do tanque m_0 .

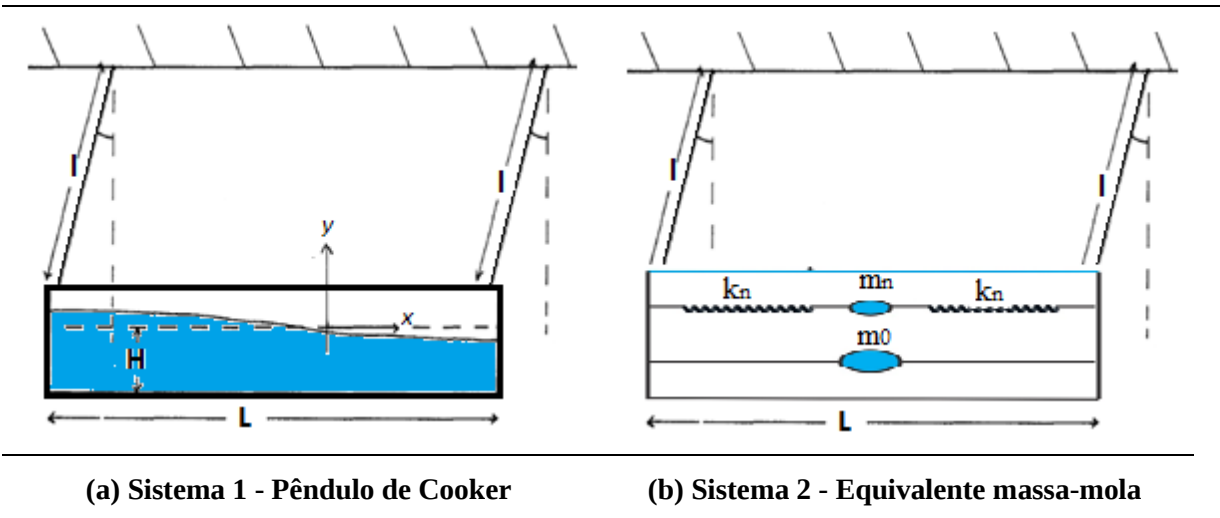


Figura 2.a. Sistema contínuo, problema acoplado pêndulo – *sloshing* linear, Figura 1.b. sistema discreto pêndulo – massa-mola equivalente (2 GDL)

A solução para o sistema equivalente da Figura (2b) baseia-se na criação de um modelo matemático para descrever o movimento e obter as frequências naturais do sistema, as Equações (17) e (18), foram deduzidas na segunda lei de Newton, para um sistema que oscila livremente.

A equação de movimento para o pêndulo, representando o sistema principal reduzido a um grau de liberdade é apresentada pela Equação (17)

$$(m_p + m_0)l^2\ddot{\theta}(t) + (m_p + m_0)l \cos(\theta) \dot{x}(t) = -(m_p + m_0)gl \sin(\theta) \quad (17)$$

E a equação de movimento para massa-móvel representando a oscilação do líquido *sloshing*, é apresentada pela Equação (18)

$$m_1\ddot{x}(t) + (m_p + m_0)\ddot{x}(t) + (m_p + m_0)l \cos(\theta) \ddot{\theta}(t) - (m_p + m_0)l(\dot{\theta})^2 = -k_1x(t) \quad (18)$$

Partindo da hipóteses de pequenos deslocamentos, e considerando a não rotação dos elementos, as Equações (17) e (18) podem ser linearizadas, assumindo que $\cos(\theta) \sim 1$, $\sin(\theta) \sim \theta$ e $(\dot{\theta})^2 \sim 0$.

Da forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} (m_p + m_0)l^2 & (m_p + m_0)l \\ (m_p + m_0)l & (m_p + m_0 + m_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_p + m_0)gl & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

5. BANCADAS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo uma breve descrição da implementação das bancadas *Slosh* e pêndulo Trifilar com as quais consegue caracterizar os parâmetros modais experimentais da superfície livre e observar sua influência na redução do movimento do pêndulo trifilar, utilizou-se uma câmera de celular *Galaxy s3*, como sensor de vibrações, a metodologia experimental utilizada é apresentada em Lopez et al (2016).

Bancada *Slosh*

Para acompanhar a superfície livre de um aquário de vidro retangular em relação a várias profundidades do liquido. Implementa-se um sistema de medição do nível dinâmico do fluido por meio de um elemento flutuante (boia). A boia desloca-se verticalmente por um fio de náilon suspenso no fundo e no exterior do aquário. O aquário de vidro encontra-se fixo numa plataforma de madeira, a qual é submetida a uma excitação inicial (não controlada) na direção paralela ao comprimento do tanque. Uma foto da bancada *Slosh* apresenta-se na Figura 2 a seguir.

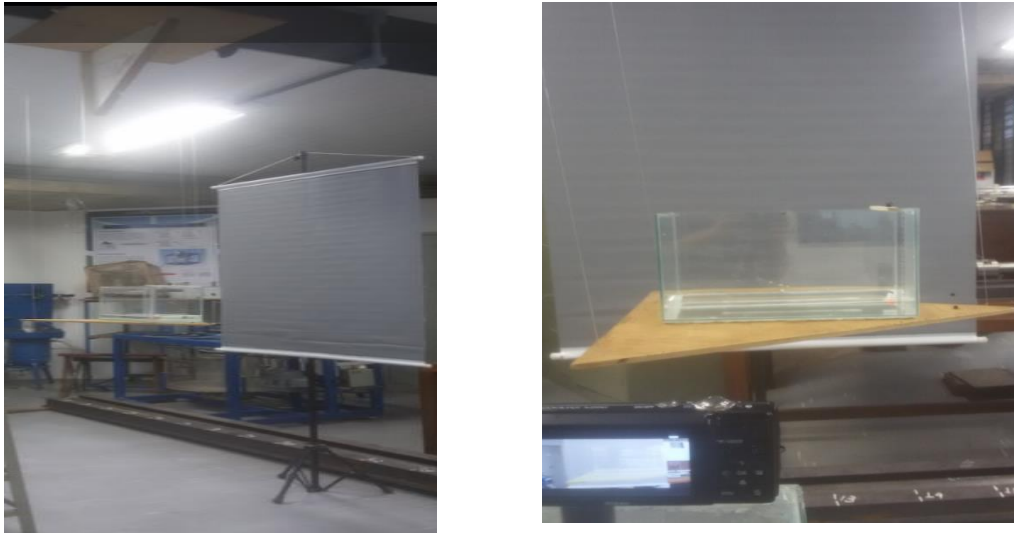


Figura 3. Foto Bancada *Slosh*

1 Bancada pêndulo Trifilar

Na bancada Trifilar procede-se a estudar as propriedades do aquário (bancada *Slosh*), como um ADV-L na redução da amplitude de oscilação um pêndulo trifilar.

Para isto, anexa-se o tanque acima mencionado, em um pêndulo trifilar, o sistema encontra-se em equilíbrio quando os suportes estão verticalmente (Figura 4a), após, de um deslocamento inicial (Figura 4b), é possível observar a oscilação do sistema acoplado, pêndulo (estrutura) mais tanque (ADV-L), o deslocamento assume-se pequeno, o qual não implicará rotação dos elementos, e a análise do comportamento líquido ao interior corresponderá a uma formulação bidimensional da onda de superfície.



**Figura 4. (a) Bancada pêndulo +tanque em equilíbrio.
(b) sistema pêndulo oscilando para pequenos deslocamentos.**

6. RESULTADOS

A continuação apresenta-se a solução do problema de *sloshing* por parâmetros equivalentes, comparando-o com resultados experimentais (Lopez et al, 2016) e com soluções analíticas clássicas de tanques retangulares isoladoe de tanque retangular acoplado pêndulo.

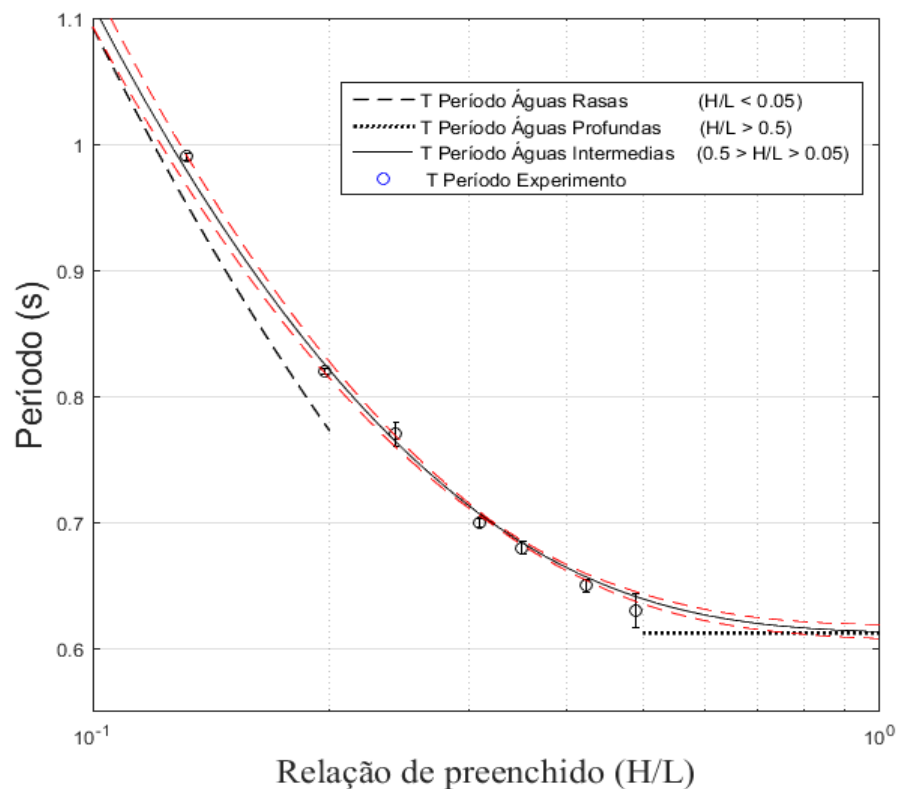
6.1 Bancada Slosh

A bancada Slosh consiste num tanque retangular de vidro com comprimento $L = 29\text{ cm}$, largura $W = 15\text{ cm}$ parcialmente preenchido com água potável (densidade nominal $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$). Busca-se identificar experimentalmente o primeiro período de oscilação de slosh do líquido para diferentes alturas do liquido. Compara-se os resultados experimentais com relação aos resultados da equação analítica(9) e do modelo por parâmetros equivalentes (pela formula $T = 2\pi\sqrt{m_n/k_n}$) para diferentes razão de aspecto $r = H/L$. A **Tabela 2** resume os resultados de período de oscilação T de slosh do líquido obtidos pela bancada experimental, solução analítica clássica e por parâmetros equivalentes.

Tabela 2–Períodos T da superfície livre do líquido para diferentes razões de aspecto r .

H (cm)	Analítico (s)	Parâmetro equivalente (massa-mola) (s)	Experimento (s)	Erro Analítico (%)	Erro Parâmetro Equivalente (%)
3.85	0.98	0.98	0.99	1.02	1.01
5.75	0.83	0.83	0.82	1.20	1.22
7.08	0.76	0.77	0.76	0.00	1.32
9.05	0.71	0.71	0.71	0.00	0.00
10.25	0.68	0.69	0.68	0.00	1.47
12.35	0.66	0.66	0.66	0.00	0.00
14.28	0.64	0.65	0.64	0.00	1.56

Os resultados apresentam boa concordância. Tanto a solução analítica quanto por parâmetros equivalentes, os erros relativos foram menores do que 2%. A Figura 5 apresenta a variação do período em função da razão de aspecto r ($= H/L$) para as três diferentes teorias de ondas de águas (rasas, intermediárias e profundas).

**Figura 5. Solução experimental e teoria de águas rasas, intermediárias e profundas.**

Os resultados experimentais de período de oscilação slosh do líquido para o tanque retangular caracteriza comportamento em regime de águas intermediárias. Para maiores alturas do nível de líquido, observa-se maior desvio da solução analítica em comparação aos resultados experimentais. São necessários estudos complementares e novos resultados experimentais para comprovar este desvio.

6.2 Bancada Pêndulo com ADV-L

A bancada pêndulo com ADV-L consiste num tanque retangular (semelhante a bancada Slosh) sobre um pêndulo trifilar (base sustentada por fios inextensíveis). O pêndulo trifilar possui um comprimento de $L = 5.6 \text{ m}$, massa pêndulo $M_p = 2.89 \text{ kg}$ e gravidade local do laboratório $g = 9.7808 \text{ m/s}^2$. Busca-se identificar experimentalmente o primeiro período de oscilação do pêndulo deste sistema acoplado (bancada pêndulo trifilar com ADV-L). Compara-se os resultados para parâmetros equivalentes com relação aos resultados experimentais (Lopez et al, 2016), à solução analítica acoplada (Cooke, 1994). A Tabela 3 resume a solução analítica acoplada, a solução por parâmetros equivalente, e os resultados experimentais.

Tabela 3 - Período de oscilação T do pêndulo acoplado a tanque líquido para diferentes razões de aspecto r . Comparação da solução analítica acoplada de Cooke (1994), a solução analítica por parâmetros equivalentes, e dos resultados experimentais (Lopez et al, 2016).

As seções 2 e 3 apresentam a solução analítica para o período natural da onda de superfície ou sloshing para o tanque isolado (fixo) e posteriormente para o sistema acoplado a um pêndulo trifilar que oscila livremente, na seção 4 determinam-se as equações de movimento para o sistema mecânico discreto, em que os parâmetros equivalentes de massa e rigidez representam as propriedades hidrodinâmicas da onda de superfície sobre as paredes do reservatório. As soluções analíticas e experimentais apresentadas em Lopez et al (2016) são comparadas pelas equações mecânicas equivalentes. A análise modal para solucionar os autovalores do sistema acoplado são trabalhadas no Matlab, mediante o comando *eig*. O qual soluciona as matrizes de massa e de rigidez conseguindo assim determinar o período para o sistema acoplado.

Tabela 3 - Período de oscilação T do pêndulo acoplado.

H (cm)	Cooke (1994) (s)	Pêndulo + Parâmetro Equivalente (massa-mola) (s)	Experimento Lopez et al (2016) (s)	Erro Cooke (%)	Erro Pêndulo + Parâmetro Equivalente (%)
3.5	2.28	2.34	2.21	3.17	5.88
5.6	1.80	1.85	1.75	2.86	5.71
7.3	1.58	1.66	1.63	3.07	1.84
10.3	1.33	1.49	1.36	2.21	9.56

CILAMCE 2017

A solução por parâmetro equivalente (Tabela 3) apresenta uma razoável concordância com a solução analítica acoplada e os resultados experimentais. Observa-se erros relativos de no máximo 10% para níveis de água $H > 10\text{cm}$.

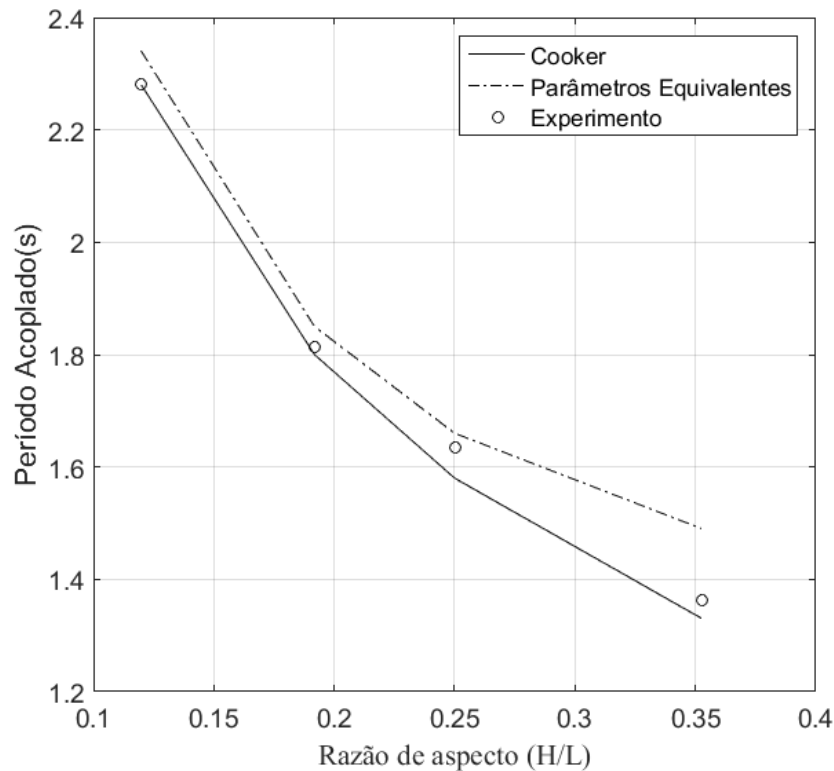


Figura 6. Comparação período acoplado vs. razão de aspecto (H/L)

A Figura 6 apresenta as diferenças dos resultados experimentais e as soluções analíticas. São necessários estudos complementares e novos resultados experimentais para comprovar este desvio. Contudo, a redução do movimento do líquido por um sistema equivalente composto por apenas um massa-mola pode ser uma aproximação muito forte.

7. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta a descrição do problema de *sloshing* por parâmetros equivalentes. Através de comparação com resultados experimentais e solução clássica para tanques retangulares isolados e para tanque retangular acoplado a um pêndulo (Cooker, 1994), os modelos discretos equivalentes são validados para resultados do período fundamental de oscilação em função da razão de aspecto $r = H/L$, onde H é a profundidade do líquido e L é o comprimento do reservatório.

O primeiro caso apresenta a comparação do período fundamental de oscilação de um tanque retangular do modelo equivalente com relação a resultados experimentais e a solução analítica

clássica. A solução por parâmetros equivalentes possui uma boa concordância com relação aos resultados experimentais e a solução analítica.

Já o último caso de estudo apresenta o resultado do período fundamental de oscilação de um sistema dinâmico pendulo acoplado com tanque retangular (ADV-L) descrito por um modelo equivalente com um massa-mola. Os resultados numéricos são comparados com relação a resultados experimentais e a solução analítica acoplada de Cooker (1994). Observa-se uma razoável concordância dos resultados por parâmetros equivalentes com relação ao experimento e a solução analítica acoplada com erros relativos aproximadamente de 10%. Esta diferença pode ser explicada pela aproximação do sistema líquido por um único sistema massa-mola equivalente. Estudos complementares e novos resultados experimentais são necessários para verificar este desvio.

AGRADECIMENTOS

Universidade de Brasília, Laboratório de Vibrações e Metrologia Dinâmica, Grupo de Dinâmica de Sistemas - GDS, aos professores Marcus Vinicius Girão de Moraes e Lineu Jose Pedroso, ao CNPq e FAP-DF.

REFERÊNCIAS

- Chaiseri, P. (1990) “Characteristics, modelling and application of the Tuned Liquid Damper”, PhD Thesis, University of Tokyo, Japan.
- Chen, W., Haroun, M. A., Liu., (1996) “Large amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks. Earthquake Engineering and Structural Dynamic. 25, 653-669.
- Cui, D., Yan, S, Guo, X, Gao., R (2014); “Parametric resonance of liquid sloshing in partially filled spacecraft tanks during the powered-flight phase of rocket. Aerospace Science and Technology, 35 93-105.
- Cooker, M.(1994). “Water waves in a suspended container” Wave Motion, 20 385-395.
- Dodge, F. T., (2000) “The new dynamic behavior of liquids in moving containers”. Update of NASA SP-106, Southwest Research Institute. San Antonio, Texas.
- Fujino, Y., Pacheco, B.M, Chaiseri, P., Sun, L. M (1988), “Parametric studies on Tuned Liquid Damper (TLD) using circular containers by free-oscillation experiments” Structural Engineering / Earthquake Engineering vol. 5 No. 2 381-391.
- Graham, E. W. and Rodriguez. A. M. (1952), “The Characteristics of Fuel Motion Which Affect Airplane Dynamics”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No. 3, 381 -388.
- Housner, G. W., (1957) “Dynamic Pressure on Accelerated fluid Containers”. Bulletin of the Seismology Society of America, 47(1): 15-35.
- Ibrahim, R. A., (2005) Liquid Sloshing Dynamics, Theory and Application. Cambridge University Press.
- Kang, J., Oh, H., (2006) “Stability of fluid motion in a vehicle subject to harmonic excitations, in Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit.

- Kareem, A., Sun, W.J. (1987) "Stochastic Response of Structures with Fluid-containing Appendages. *Journal of Sound and Vibration*", 119(3), 389–408.
- Lopez et al (2016), "identificação experimental de parâmetros modais da superfície do líquido contido num tanque retangular e sua relação na variação do nível de preenchimento", CILAMCE 2016.
- Li, Y; Di. Q and Gong, Y. (2012); "Equivalent mechanical models of sloshing fluid in arbitrary-section aqueducts"; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 41: 1069-1087.
- Li, Y; Wang (2011); "A supplementary exact solution of an equivalent mechanical model for a sloshing fluid in a rectangular tank". *Journal of fluid and structures*. 147-151.
- Sun, L. M., Fujino, Y., Chaseri, P., and Pacheco. (1995) "The properties of Tuned Liquid Dampers Using a TMD Analogy". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 24, 967-976.
- Newland, D. E. (1984). "An introduction to random vibrations and spectral analysis". Second Edition. Longman Scientific & Technical, England.
- Noji, T., Yoshida, H. , Tatsumi, E., Kosaka, H., Haguida, H. (1988); Y. , Study on vibration control damper utilizing sloshing of water. *Journal of wind Engineering*, 37, 557-566.
- Nickawde, C. Harish P. M., Ananthkrishnan, N., (2004) " Stability analysis of a multibody system model for coupled slosh-vehicle dynamics, *Journal sound and vibrations*. 275, 1069-1083.
- Tait, M.J., El Damatty, A. A., Isyumov (2002), "The dynamic properties of a tuned liquid damper using an equivalent amplitude dependent tuned mass damper". *Structural Specialty Conference of the Canadian Society for Civil Engineering*, Québec , Canada.
- Tait, M.J. (2008) "Modelling and preliminary design of a structure-TLD system" *Engineering Structures* 30. 2644–2655.
- Warburton, G. B. (1982) "Optimum absorber parameters for various combinations of response and Excitation parameters", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 381 - 401.
- Yang, C. Y. (1985), *Random vibration of structures*. John Wiley & Sons, New York.
- Yu, J. K.; Wakahara, T.; Reed D (1999)." A non-linear numerical model of the tuned liquid damper". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 28, 671-686.
- Yue, B., (2011) Study on the chaotic dynamics in attitude maneuver of liquid filled flexible spacecraft. AIAA 49. 2090 - 2099.
- Zuluaga, A. L. (2007) "Vibration control of structures subjected to dynamic loads using tuned pendulum-shaped mass dampers. Thesis. University of Brasilia.