



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS GLOBAL-LOCAL: INVESTIGAÇÃO DO ENRIQUECIMENTO DA APROXIMAÇÃO

Gabriela Marinho Fonseca

gmarinhofonseca@gmail.com

Felício Bruzzi Barros

feliciobbarros@gmail.com

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

Resumo. *O presente trabalho avalia a estratégia de enriquecimento da aproximação utilizando a abordagem do Método dos Elementos Finitos Generalizados, através da análise de um problema da elasticidade bidimensional sob estado plano de tensões. Uma chapa com formato em L, cuja geometria e carregamento característicos provocam a tendência da formação de uma trinca, é analisada sob diferentes enfoques. São utilizadas funções enriquecedoras polinomiais, funções de singularidade e funções numericamente obtidas, de modo a capturar a elevada concentração de tensões na região da trinca. Os resultados são apresentados através da energia de deformação total da estrutura. Os experimentos numéricos são realizados no sistema computacional INSANE, no qual está implementado o Método dos Elementos Finitos Generalizados. São analisados parâmetros tais como o número de nós enriquecidos, a transferência das condições de contorno (Dirichlet e Cauchy) e o refinamento h_p da malha.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Análise Global-Local, Mecânica da Fratura.*

1 INTRODUÇÃO

Uma grande variedade de problemas de Engenharia pode ser descrita através de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais. A obtenção de uma solução analítica, entretanto, pode tornar-se inviável quando ocorrem condições de contorno ou geometrias complexas. É nesse contexto que surge o Método dos Elementos Finitos (MEF), um eficiente recurso numérico para a resolução de problemas de valor de contorno (Alves, 2012).

Apesar de amplamente consolidado na Mecânica Computacional, o MEF apresenta limitações para tratar de problemas caracterizados pela existência de não-linearidades, exigindo um processo oneroso de geração da malha. Surge, dessa forma, a necessidade do desenvolvimento de métodos alternativos, que sejam capazes de resolver esses problemas de maneira mais eficaz. Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG (Strouboulis e Babuška, 2000) consiste em uma alternativa ao MEF convencional, uma vez que é formulado de modo que a simulação numérica garanta certa independência da malha de elementos finitos. O MEFG é caracterizado pelo enriquecimento dos nós com funções aproximadoras que são capazes de descrever o comportamento do problema a ser analisado. O presente trabalho pretende expandir a investigação do MEFG, abrangendo a influência das combinações de enriquecimento na qualidade da solução numérica.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A estratégia utilizada no MEFG, simplificada, consiste em empregar as funções de forma do MEF como funções de Partição da Unidade, PU, (Eq. (1)) que multiplicadas por funções $L_{ji}(x)$, definem as funções de aproximação do MEFG (Eq. (2)), em uma estratégia denominada de enriquecimento. A aproximação genérica do MEFG é obtida através da combinação linear de tais funções de aproximação enriquecidas (Eq. (3)).

$$\sum_{j=1}^n N_j = 1 \quad (1)$$

$$L_j = \{1, L_{j1}(x), L_{j2}(x) \dots, L_{jq_j}(x)\} \quad (2)$$

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \left(u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(x) b_{ji} \right) \quad (3)$$

Já a estratégia Global-Local do MEFG (Duarte e Kin, 2008) utiliza funções enriquecedoras expressas numericamente. Nesta abordagem, o problema pode ser analisado primeiramente com o MEF convencional, sendo utilizada uma malha mais grosseira, definindo o Problema Global. A região de maior interesse, na qual a malha grosseira não é capaz de descrever o comportamento do problema, é definida como o Problema Local. A análise do Problema Global fornece a solução em termos de tensões e/ou deslocamentos, que são transferidos para o Problema Local como condições de contorno. Por fim, o Problema Global é novamente analisado, enriquecendo as funções de PU com as funções numéricas obtidas da solução do Problema Local.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados e resultados das simulações apresentados neste trabalho encontram-se em unidades consistentes. O problema analisado, proposto por Reis (2016), é mostrado na Figura 1. A elevada concentração do campo de tensões provoca a tendência do surgimento de uma trinca na aresta com coordenada $y = 50,0$.

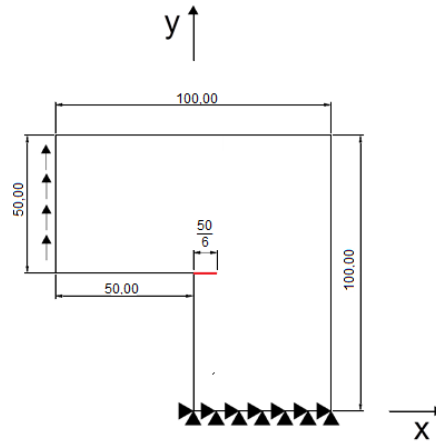


Figura 1. Geometria de uma chapa com a presença de uma trinca (em unidades consistentes).

3.1 Solução via MEF com alto grau de refinamento h

Neste caso, a ser utilizado como referência para as análises seguintes, a solução é obtida através do MEF convencional, com malha bastante refinada (19 345 elementos quadriláteros de oito nós). O resultado obtido para a energia de deformação foi de 2,798752, com número total de graus de liberdade (NGL) igual a 116 832.

3.2 Solução via MEF Global-Local (MEFG^{gl})

Nesta abordagem é analisada a influência do número de nós enriquecidos com a solução do Problema Local (apenas um nó, sendo este o nó da ponta da trinca, ou sete nós enriquecidos) e a transferência das condições de contorno (Dirichlet ou Cauchy). Em ambas as escalas (Global e Local) a trinca é representada através da duplicação de nós. Os resultados obtidos para a energia de deformação são mostrados na Tabela 1 e as discretizações utilizadas na Figura 2, que mostra, em laranja, a disposição do enriquecimento de sete nós. Para o Problema Local, representado em amarelo na Figura 2, é utilizada uma “malha geométrica”, que combina um refinamento h graduado (cuja taxa é de 10%) com um enriquecimento p não-uniforme, também indicado na figura. Neste caso, *Poly 1*, *Poly 2* e *Poly 3* representam polinômios enriquecedores do primeiro, segundo e terceiro grau, respectivamente.

Tabela 1. Resultados obtidos na análise do MEF^{gl}.

Enriquecimento	DIRICHLET			CAUCHY		
	u	Erro (%)	NGL	u	Erro (%)	NGL
1 nó	2,538225	9,31	270	2,537342	9,34	270
7 nós	2,554655	8,72	282	2,554023	8,74	282

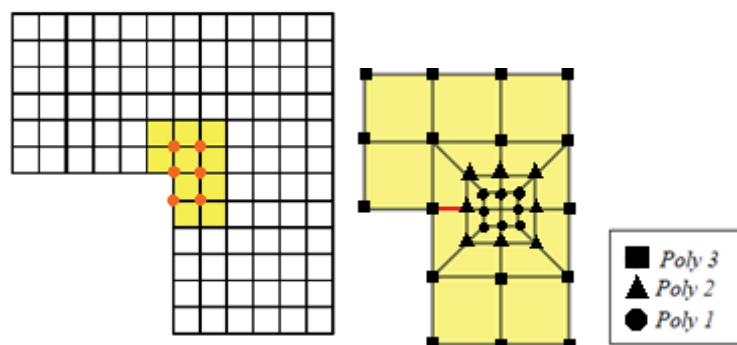


Figura 2. Malha do Problema Global (à esquerda) e do Problema Local (à direita).

3.3 Solução via MEEG com refinamento hp

Esta abordagem utiliza novamente uma “malha geométrica”, com o mesmo refinamento hp adotado para o Problema Local da Seção 3.2.

O resultado obtido para a energia de deformação foi de 2,674256 (erro de 4,45% em relação à referência), com número total de graus de liberdade igual a 628.

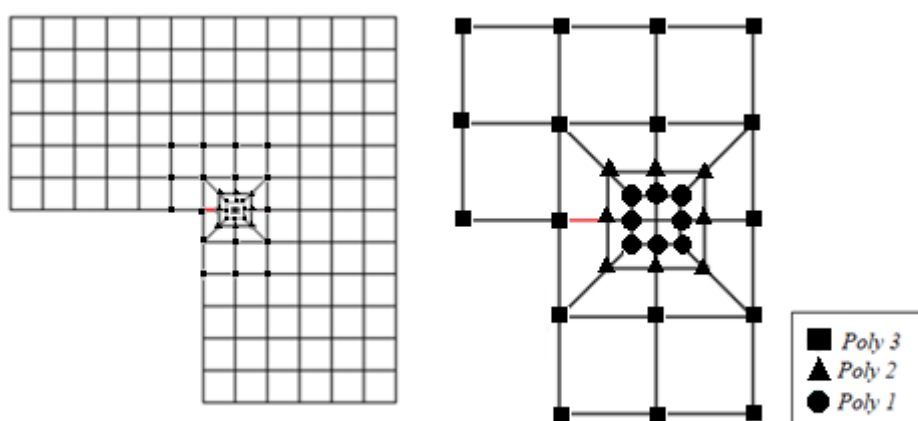


Figura 3. Refinamento hp para o problema analisado (à esquerda) e detalhe da região mais refinada (à direita).

3.4 Solução via MEEG com o uso de funções de singularidade

Apresenta-se, nesta seção, a análise do problema utilizando funções enriquecedoras não-polinomiais, obtidas da aproximação para o campo de deslocamentos determinados analiticamente na vizinhança de uma reentrância conforme Szabó e Babuška, 1991. Os resultados são apresentados na Tabela 2, que faz referência aos mesmos nós enriquecidos da Seção 3.2, sendo agora o enriquecimento feito com as funções não-polinomiais.

Tabela 2. Resultados obtidos na análise do MEEG com Funções Não-Polinomiais

Enriquecimento	u	Erro (%)	NGL
1 nó	2,590942	7,43	270
7 nós	2,618607	6,44	282

4 CONCLUSÕES

Os melhores resultados de cada abordagem são reunidos na Tabela 3.

Tabela 3. Comparação entre os melhores resultados obtidos.

Estratégia	u	Erro (%)	NGL
MEF – Solução de Referência	2,798752	-	116.832
MEFG com Refinamento hp	2,674256	4,45	628
MEFG com Funções Não-Polinomiais (7 nós enriquecidos)	2,618607	6,44	282
MEFG ^{gl} (7 nós enriquecidos, Dirichlet)	2,554655	8,72	282

Observa-se que o resultado obtido via MEFG com refinamento hp confirmou a eficiência desse tipo de discretização, já verificada em outros problemas da literatura.

Na análise Global-Local, foram confirmadas as conclusões de Reis (2016) em relação ao aprimoramento da solução quando mais nós do Problema Global são enriquecidos com a solução do Problema Local. Quanto às condições de contorno, foram obtidos resultados muito próximos entre si, sendo aqueles com Dirichlet um pouco superiores em todas as análises (Tabela 1).

O uso das funções não polinomiais mostrou-se eficiente para o problema analisado, evidenciando o benefício do uso destes tipos de função para enriquecer a aproximação do MEFG.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem e agradecem o importante apoio da FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa de mestrado e grant 308932/2016-1.

REFERÊNCIAS

- Alves, P. D., 2012. *Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia, DEES – UFMG.
- Duarte, C. A. & Kim, D. J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, pp. 487-504.
- Reis, A. P. S., 2016 *Investigação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Global-Local para Problemas com Elevada Concentração do Campos de Tensões*. Monografia. DEES – UFMG, Belo Horizonte.
- Strouboulis T., Babuška I., E Copps K, 2000. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181 pp. 43–69.
- Szabó, B.; Babuška, I, 2000. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.