



Métodos p-Adaptativos de Elementos Finitos Híbridos para o Problema de Propagação de Ondas Elásticas

L.F. Mello

A.F. Loula

{lfmello,aloc}@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica

Av. Getlio Vargas, 333 - Petrópolis-RJ - CEP:25651-075 - Brasil

I.H. Igreja

iuryigreja@hotmail.com

Universidade Federal de Juiz de Fora

R. Jos Loureno Kelmer s/n - Campus Universitário - Juiz de Fora-MG - CEP:36036-330 - Brasil

Resumo. O modelo matemático que descreve o problema de ondas harmônicas em meios elásticos é amplamente usado em pesquisa e desenvolvimento nas áreas de geofísica e vibrações estruturais em engenharia. Por se tratar de um modelo fortemente oscilatório, este problema motiva a aplicação de estratégias adaptativas que visam uma boa aproximação com reduzido custo computacional em regiões específicas do domínio. Dessa forma, para representar tal fenômeno, propomos um método de elementos finitos híbrido estabilizado, denominado *Stabilized Hybrid Method (SHM)*, e propomos uma estratégia p-adaptativa que gera um algoritmo de refinamento polinomial automático. O método SHM é caracterizado pela imposição de forma fraca da continuidade entre os elementos através de multiplicadores de Lagrange. Esta abordagem dá origem a um sistema global envolvendo apenas os graus de liberdade associados aos multiplicadores e as variáveis de interesse podem ser resolvidas no nível do elemento. Esta metodologia permite a implementação de estratégias de adaptatividade do tipo h e p, além de apresentar grande flexibilidade na escolha dos espaços de aproximação. Neste contexto, propomos uma estratégia p-adaptativa que gera um algoritmo de refinamento polinomial através de um indicador baseado em resíduos de mínimos quadrados a fim de capturar de forma eficiente os fenômenos em regiões que necessitam de uma aproximação mais acurada. Para ilustrar a flexibilidade e robustez do método proposto, estudos numéricos são realizados adotando regimes de diferentes frequências e, quando necessário, a estratégia p-adaptativa atua para atingir melhor precisão da aproximação.

Palavas-chave: *Métodos de Elementos finitos, p-Adaptatividade, Problema de ondas elásticas, Métodos híbridos*

INTRODUÇÃO

O problema de ondas elásticas está presente em diversos campos de estudo da engenharia e da geofísica. Muitos métodos numéricos têm sido propostos para aproximar essa classe de problemas e suas aplicações. Takekawa (2012) e Yue (2015), desenvolveram métodos de elementos finitos (MEF) orientados para aplicações em geofísica. Joly (2008) usou métodos de Galerkin contínuo (CG) enquanto que métodos de Galerkin descontínuo são propostos por Nguyen (2011). Buscando aproveitar as boas características dos métodos de Galerkin descontínuos, formulações híbridas de elementos finitos têm sido amplamente desenvolvidas.

Os métodos hibridizados são facilmente implementados reaproveitando códigos para CG e se caracterizam por preservar as vantagens de DG como aplicação em malhas irregulares, soluções com alta ordem de precisão, fácil inclusão de h e p adaptatividade, além de escalabilidade. Neste contexto podemos citar trabalhos como Lehrenfeld (2015). Especificamente na área de acústica, usando métodos de Galerkin descontínuos híbridos (HDG), Stanglmeier et. al (2016) definem um problema global impondo apenas os graus de liberdade ligados a variável de transmissão entre os elementos, característica de HDG que permite reduzir o custo computacional.

Por meio deste problema global, definido apenas com o multiplicador de Lagrange, localmente isolamos as variáveis de interesse tornando um elemento independente do outro. Esta propriedade viabiliza a capacidade de alcançar maiores precisões utilizando a p -adaptatividade, que se torna natural do ponto de vista local. A p -adaptatividade inclui graus de liberdade ao problema global, o refinamento é usado de forma adaptativa para fazer o melhor uso do recurso computacional e alcançar precisões com tolerância especificada em cada elemento do domínio. Com esta técnica temos que em parte dos elementos os polinômios são de baixa ordem e, em locais específicos do domínio, automaticamente ocorre a imposição de ordens mais elevadas a fim de capturar eficientemente eventuais singularidades da solução (Gomez-Revuelto, 2012) e (Giorgiani, 2013).

Neste contexto, o presente trabalho tem o objetivo propor um método de elementos finitos híbrido estabilizado (SHM) com o multiplicador de Lagrange sendo contínuo (SHM-C) ou descontínuo (SHM-D). Aplicamos p -adaptatividade em ambos a partir de um indicador erro. Técnica semelhante foi usada também por Scholz (2007) para análise estática e dinâmica de estruturas de paredes delgadas.

Na próxima seção introduzimos o problema elasto-acústico e a parametrização usada. A seguir, construímos o SHM e apresentamos a estratégia para a p -adaptatividade. Por fim, mostramos um resultado numérico em meio homogêneo no sentido de comparar a convergência do SHM-C com o SHM-D e em um meio heterogêneo para analisar o comportamento da p -adaptatividade empregada.

MODELO DE ONDAS HARMÔNICAS EM SÓLIDOS ELÁSTICOS

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com contorno Lipschitz contínuo $\Gamma = \partial\Omega$ ocupado por um corpo elástico linear e isotrópico de densidade $\rho > 0$. Os coeficientes de Lamé $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ satisfazem $\mu > 0$ e $3\lambda + 2\mu > 0$, desta forma definimos o problema de propagação de ondas harmônicas em meios elásticos

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega \quad (1)$$

onde queremos encontrar o campo de deslocamentos $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ sendo $\mathbf{f}$ o termo de fonte. Vamos incluir a condição de contorno do tipo mista

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} + i\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (2)$$

onde $\mathbf{g}$ é o termo de fonte da condição de Robin. O tensor $\mathbf{A}$ é definido como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde k_p e k_s são os números de ondas associados a ondas de pressão longitudinal e de ondas de cisalhamento, dados por

$$k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\mu + \lambda}}, \quad (4)$$

$$k_s = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}. \quad (5)$$

Temos que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ é o tensor de tensões simétrico de Cauchy, para um material linear, homogêneo e isotrópico, dado por

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))\mathbf{I} \quad (6)$$

onde o tensor elástico isotrópico $\mathbb{D} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 1/2(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ é o tensor de deformações lineares, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem, $\mathbb{I}$ é o tensor identidade de quarta ordem e $\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \text{div } \mathbf{u}$.

Para estados plano de tensão os coeficientes de Lamé são dados por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (7)$$

onde E denota o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

NOTAÇÕES E DEFINIÇÕES

Dado o domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, com contorno Lipschitz $\Gamma = \partial\Omega$, escrevemos $H^m(\Omega)$ para denotar o espaço usual de Sobolev equipado com a norma e semi-norma $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ e $|\cdot|_{m,\Omega}$, respectivamente, com $m \geq 0$. Para $m = 0$, apresentamos $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ como o espaço das funções quadrado integráveis em Ω , definido como

$$L^2(\Omega) = \left\{ q : \int_{\Omega} q^2 dx < \infty \right\},$$

com norma dada por

$$\|q\|_0 = \|q\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} q^2 dx \right)^{1/2}.$$

Seja $\mathcal{T}_h$ uma partição regular de elementos finitos definida como

$$\mathcal{T}_h = \{K\} := \text{a união de todos os elementos } K$$

no domínio Ω . Para as arestas e dos elementos K definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{E}_h = \{e; e \text{ é uma aresta de } K \text{ para todo } K \in \mathcal{T}_h\}$$

que denota o conjunto de todas as arestas e de todos os elementos K ,

$$\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h; e \text{ é uma aresta interior}\}$$

é o conjunto das arestas interiores, e

$$\mathcal{E}_h^\partial = \{e \in \mathcal{E}_h; e \subset \partial\Omega\}$$

o conjunto de arestas do bordo de Ω .

Assumindo o domínio Ω como um polígono e $\mathcal{T}_h$ uma partição regular de Ω , existe um $c > 0$ tal que $h \leq ch_e$, onde h_e é o diâmetro da aresta $e \in \partial K$ e h , o parâmetro de malha, é o diâmetro do elemento. Para cada aresta e associamos um vetor unitário normal $\mathbf{n}_e$ e para cada elemento K associamos um vetor unitário normal $\mathbf{n}_K$.

Para introduzir os métodos híbridos, definimos o seguinte espaço de dimensão finita sobre a partição de $\mathcal{T}_h$

$$\mathcal{V}_h^l = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2; \mathbf{v}_h|_K \in [\mathbb{Q}_l(K)]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (8)$$

onde $\mathcal{V}_l(K)$, denota o espaço de funções polinomiais de grau l associado a elementos quadriláterais. Sobre as arestas $e \in \mathcal{E}_h$ introduzimos os espaços de aproximações referentes aos multiplicadores de Lagrange. Neste caso, consideramos duas possibilidades de espaço de dimensão finita

$$\mathcal{D}_h^n = \{\mu \in [L^2(\Omega)]^2(\mathcal{E}_h) : \mu|_e = p_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}, \quad (9)$$

onde $p_n(e)$ expressa o espaço das funções polinomiais descontínuas de grau menor ou igual a n sobre cada aresta e , e para aproximações contínuas do multiplicador definimos o espaço

$$\mathcal{C}_h^n = \{\mu \in [C^0(\Omega)]^2(\mathcal{E}_h) : \mu|_e = p_n(e), \forall e \in \mathcal{E}_h^0, \mu|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}. \quad (10)$$

Além disso, definimos o espaço de aproximação que contempla tanto multiplicadores contínuos quanto descontínuos, como segue

$$\mathbf{M}_h^n \in \{\mathcal{D}_h^n, \mathcal{C}_h^n\}. \quad (11)$$

MÉTODO HÍBRIDO ESTABILIZADO (SHM)

Para introduzir a formulação híbrida para o problema de onda elástica, consideramos a equação (1) multiplicada por uma função peso, $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^l$, sendo integrada por partes. Este procedimento é realizado para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, que nos conduz à seguinte forma fraca local para achar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h^l(\Omega)$, para todo $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^l(\Omega)$

$$\int_K \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v}_h ds - \int_K \rho\omega^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}.$$

Definimos o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ como sendo o traço dos deslocamentos $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u}|_e$, sobre todas as arestas $e \in \mathcal{E}_h$. Seguindo, incluímos simetrização e estabilização para a variável

nova sobre ∂K , $\forall K \in \mathcal{T}_h$. Temos o problema hibridizado *ache* $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h^l(\Omega)$ e o *multiplicador de Lagrange* $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{M}_h^n(\mathcal{E}_h)$ tal que, for all $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^l(\Omega)$ e para todo $\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{M}_h^n(\mathcal{E}_h)$

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_K \cdot \mathbf{v}_h ds \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \rho \omega^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\lambda}_h) ds \\ & + \beta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\lambda}_h) \cdot \mathbf{v}_h ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\mu}_h ds - \beta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\lambda}_h) \cdot \boldsymbol{\mu}_h ds = 0, \quad (13)$$

onde β é o parâmetro de estabilização, dado por

$$\beta = \frac{\beta_0}{h}, \quad \beta_0 > 0. \quad (14)$$

Note que o primeiro termo da Eq.(13) impõem a continuidade da componente normal do tensor de tensões entre elementos vizinhos, enquanto que o segundo termo estabiliza o multiplicador de Lagrange.

Assim, incluímos no SHM as condições de bordo do tipo Robin (Eq. (2)), resultando no seguinte problema: *ache* $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^l(\Omega)$ e o *multiplicador de Lagrange* $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{M}_h^n(\mathcal{E}_h)$ tal que, para todo $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h^l(\Omega)$ e para todo $\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{M}_h^n(\mathcal{E}_h)$

$$A_{SHM}([\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h]; [\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h]) = F_{SHM}([\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h]), \quad (15)$$

com

$$\begin{aligned} A_{SHM}([\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h]; [\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_K \rho \omega^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \right. \\ & - \int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) ds - \int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_K \cdot (\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\lambda}_h) ds \\ & \left. + \beta \int_{\partial K} (\mathbf{u}_h - \boldsymbol{\lambda}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\mu}_h) ds + \int_{\partial K \cap \Gamma_s} i \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda}_h \cdot \boldsymbol{\mu}_h ds \right] \end{aligned} \quad (16)$$

e

$$F_{SHM}([\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h]) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_{\partial K \cap \Gamma_s} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\mu}_h ds \right]. \quad (17)$$

METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO

Para resolver a formulação proposta na Eq. (15) eliminamos os graus de liberdade das variáveis $\mathbf{u}_h$ no nível do elemento $K \in \mathcal{T}_h$ em favor dos graus de liberdade do multiplicador de Lagrange levando a um sistema global em função apenas de $\boldsymbol{\lambda}_h$. Assim, reescrevemos o problema (15) como:

- problema local

$$a_K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_K(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) = f_K(\mathbf{v}_h) \quad (18)$$

- problema global

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} b_K(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\mu}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K(\boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\mu}_h) = g_K(\boldsymbol{\mu}_h) \quad (19)$$

com

$$\begin{aligned} a_K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\mathbf{x} - \int_K \rho \omega^2 \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \right] \\ b_K(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_{\partial K} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \mathbf{n}_K \cdot \boldsymbol{\lambda}_h ds - \beta \int_{\partial K} \boldsymbol{\lambda}_h \cdot \mathbf{v}_h ds \right] \\ c_K(\boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{\mu}_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\beta \int_{\partial K} \boldsymbol{\lambda}_h \cdot \boldsymbol{\mu}_h ds \right] \\ f_K([\mathbf{v}_h, q_h]) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_{\partial K \cap \Gamma_s} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\mu}_h ds \right]. \end{aligned}$$

As equações (18) e (19) podem ser reescritas na seguinte forma matricial

$$\mathbf{A}_K \mathbf{U} + \mathbf{B}_K \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{F}_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (20)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K^T \mathbf{U} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{C}_K \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

onde o vetor $\mathbf{U}$ contém os graus de liberdade das variáveis locais $\mathbf{u}_h$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ os dos multiplicadores de Lagrange.

Uma vez que $\mathbf{A}_K$ é inversível, podemos calcular

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_K^{-1}(\mathbf{F}_K - \mathbf{B}_K \boldsymbol{\Lambda}), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21), temos:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K^T \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{B}_K \boldsymbol{\Lambda} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K^T \mathbf{A}_K^{-1} \mathbf{F}_K. \quad (23)$$

Após resolver o sistema global (23), o vetor $\mathbf{U}$ é obtido para cada elemento K a partir de (22) com $\boldsymbol{\Lambda}$ encontrado em (23).

ESTRATÉGIA P-ADAPTATIVA

O objetivo de aplicar esta ferramenta numérica é obter uma conformidade entre o comportamento da onda e o refinamento polinomial através de localização em meios heterogêneos. Onde há variações da propriedade do meio dentro do domínio Ω , desejamos atribuir graus elevados onde a frequência da onda é maior, a ordem p relacionada a este valor. Queremos utilizar uma relação imediata como indicador de erro local, ou seja, um localizador matemático ligado ao problema modelo vai indicar através de uma comparação com uma tolerância mínima atribuída onde o refinamento p vai acontecer.

Buscando encontrar uma estratégia p -adaptativa capaz de capturar de forma eficiente as nuances de erro geradas pela aproximação dos métodos que estamos propondo, desenvolvemos

um indicador baseado nos resíduos de mínimos quadrados definido no deslocamento local $\mathbf{u}_h$ e no multiplicado de Lagrange λ_h sobre a aresta $e \in \mathcal{E}_h$

$$err_K(\mathbf{u}_h, \lambda_h)^2 = \int_{\partial K} (\lambda_h - \mathbf{u}_h)^2 ds, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (24)$$

O termo do indicador decorre naturalmente da medida do salto na interface dos elementos, este cálculo da Eq.(24) é realizado em cada elemento K e avaliado de maneira que respeite uma tolerância ϵ pré-estabelecida. Com esta abordagem de trabalhar com termos de continuidade entre elementos vizinhos, queremos manter a diferença de graus entre eles menor que um. Esta é uma característica desejável para que se mantenha estabilidade na convergência *p*-adaptativa (Giorgiani, 2013). Enquanto $|err_K(\mathbf{u}_h, \lambda_h)| > \epsilon$ a ordem do polinômio que interpola as variáveis locais aumenta em uma unidade ($l = l + 1$).

Sobre as arestas, o grau do polinômio dos multiplicadores n é determinado pela maior ordem das variáveis locais, ou seja, para dois elementos que compartilham uma aresta, o grau do polinômio desta aresta está associado ao maior grau dos dois elementos. A distribuição dos nós nas arestas para multiplicadores com interpolação contínua ou descontínua são mostrados na Figura 1.

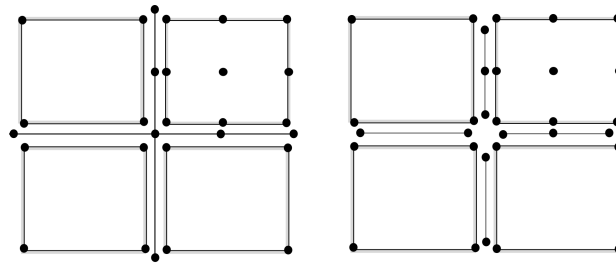


Figura 1: Distribuição dos graus de liberdade dos multiplicadores contínuos (esquerda) e descontínuos (direita).

RESULTADOS

Nesta seção apresentamos resultados de experimentos numéricos realizados com o objetivo de avaliar as formulações do SHM com multiplicadores de Lagrange contínuos ou descontínuos, além de demonstrar a capacidade da técnica de *p*-adaptatividade para localizar a descontinuidade do tipo de material no domínio de estudo.

Compomos dois tipos de experimentos. No primeiro fazemos uma comparação por meio de um estudo de convergências do SHM-C com SHM-D em um meio homogêneo. Em seguida, sobre um domínio heterogêneo, aplicamos a *p*-adaptatividade tanto para multiplicadores contínuos quanto para descontínuos. Ambos experimentos utilizam malha com 20×20 elementos.

MEIO HOMOGÊNEO

Seja $\Omega = [0, 1]^2$ o domínio discretizado uniformemente. Vamos aumentar o grau de forma equivalente em todos os elementos partindo de $\mathbb{Q}_1$ até $\mathbb{Q}_6$, assim temos convergências de refinamento uniforme do tipo *p*. As soluções geradas pelo método SHM aproximam a seguinte

solução analítica

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) = & (\cos \theta, \sin \theta)^T \exp[ik_p(x \cos \theta + y \sin \theta)] \\ & + (-\sin \theta, \cos \theta)^T \exp[ik_s(x \cos \theta + y \sin \theta)], \end{aligned} \quad (25)$$

onde atribuímos densidade $\rho = 1$, razão de Poisson $\nu = 0.3$, modulo de Young $E = 1$ e frequência angular $\omega = 20$. Para chegar a solução analítica acima, adotamos o ângulo de incidência da onda $\theta = \pi/6$ que descreve as seguintes superfícies de deslocamento $\mathbf{u}$ (Figura, 2):

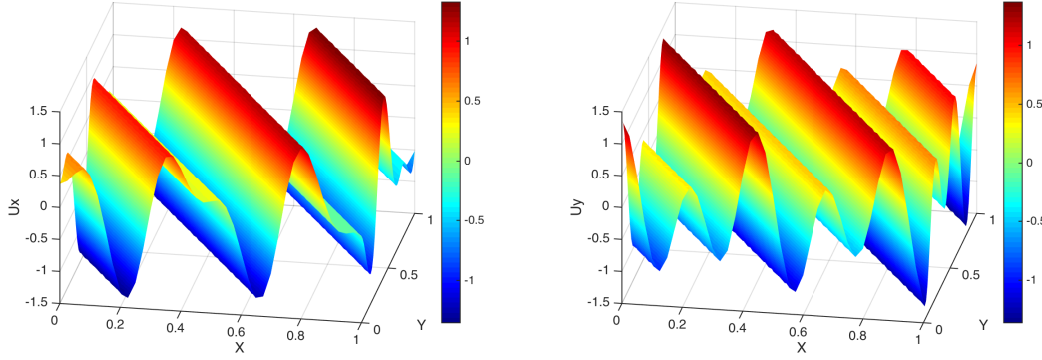


Figura 2: parte real das componentes do deslocamento: u_x a esquerda e u_y a direita

Mostramos abaixo as convergências das aproximações feitas com os métodos SHM-C e SHM-D para a variável do deslocamento $\mathbf{u}_h$, $\sigma(\mathbf{u})_h$, $\nabla \mathbf{u}_h$ e λ_h .

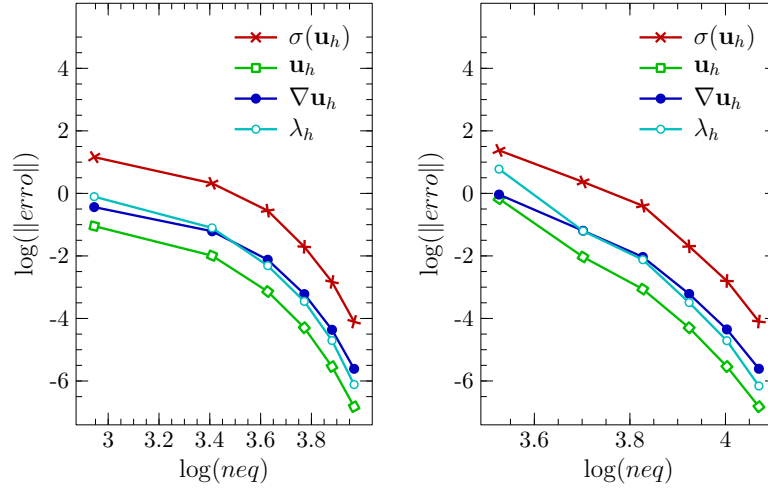


Figura 3: convergência p a esquerda o método SHM-C e a direita o SHM-D

Na comparação entre o SHM-C e o SHM-D, observamos como a precisão de ambos os métodos é parecida, entretanto, o SHM-C possui muito menos graus de liberdade, para uma mesma precisão especificada.

MEIO HETEROGÊNEO

Aplicando a p -adaptatividade proposta neste trabalho, vamos separar o domínio $\Omega = [-1, 1]^2$ em dois meios distintos, como ilustrado na Figura 4. O parâmetro de onda do lado esquerdo

($x < 0$) é $\omega_1 = 10$ e $\nu_1 = 0.2$, enquanto que $\omega_2 = 20$ e $\nu_2 = 0.3$ do lado direito ($x > 0$). Os demais parâmetros foram escolhidos como sendo iguais aos do experimento anterior. A onda propaga da esquerda para a direita, incidindo em Ω com uma ângulo de $\pi/6$, onde deve se chocar com a descontinuidade em $x = 0$. Fisicamente, esperamos que uma parte da onda seja refletida para esquerda, enquanto outra parte deve ser absorvida pelo lado direito do sólido elástico. Impomos uma tolerância de $\epsilon = 10^{-3}$ ao indicador (24).

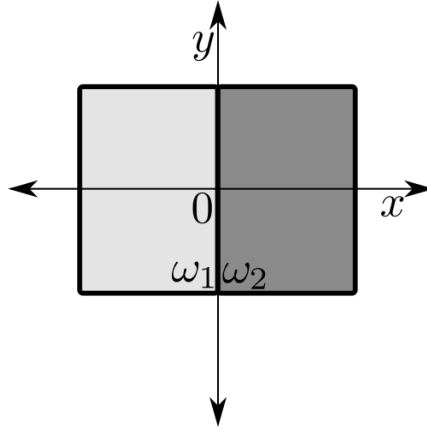


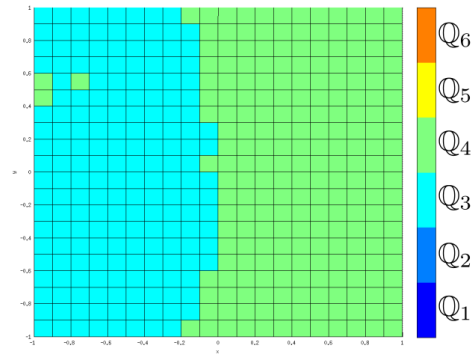
Figura 4: esquema de quadrantes no domínio heterogêneo de estudo

Este experimento numérico serve para verificar se a estratégia consegue localizar o ponto de descontinuidade entre os meios de propagação com o método de multiplicadores contínuos e descontínuos. Para ilustrar os resultados, vamos construir um gráfico de cores onde cada cor representa um grau $\mathbb{Q}_l$ local, dada uma faixa de graus implementados que vai de $\mathbb{Q}_1$ até $\mathbb{Q}_6$. Nestes resultados com mapas de cores, apresentamos apenas as três últimas iterações de cada método, pois as primeiras não possuem diferenças na distribuição dos graus locais.

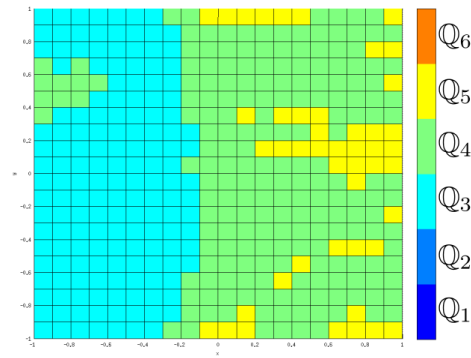
Visualmente os gráficos gerados com as aproximações dos métodos são muito parecidos, por isso vamos mostrar apenas aqueles gerados pelos resultados do método SHM-C Fig.7. Ao analisa-los, podemos ver como a frequência aumenta depois de $x = 0$ e também como a onda de incidência é perturbada intensamente em $x < 0$ e $y > 0$ pela refração causada pelos diferentes meios. Isto justifica o grau elevado presente neste mesmo quadrante observado nas ultimas iterações dos gráficos de cores (5c) e (6c).

CONCLUSÕES

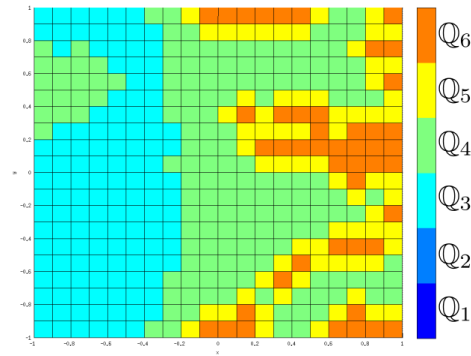
Neste trabalho, apresentamos uma formulação primal híbrida estabilizada para o problema de propagação de ondas harmônicas em meios elásticos. Esta classe de métodos impõem fracamente a continuidade através do multiplicador de Lagrange, variável escolhida para ser o traço do deslocamento nas arestas dos elementos. A metodologia de solução conduz um conjunto de problemas locais definidos no nível do elemento à um problema global que contém apenas graus de liberdade ligadas ao multiplicador de Lagrange por meio de condensação estática. Através desta abordagem garantimos propriedades como tratar naturalmente descontinuidades e adaptatividades do tipo h e p como os métodos de Galerkin descontínuo. Contudo, o método SHM é facilmente implementado usando a mesma estrutura de dados empregada nos métodos de Galerkin contínuo.



(a) iteração 4



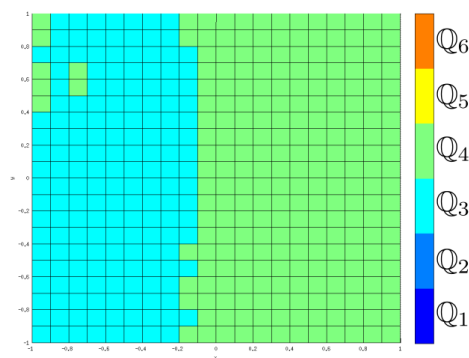
(b) iteração 5



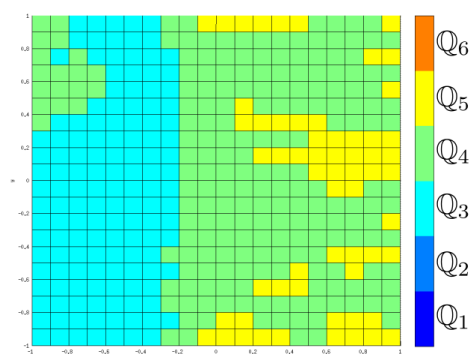
(c) iteração 6

Figura 5: três últimas iterações da convergência p -adaptativa com o método SHM-C

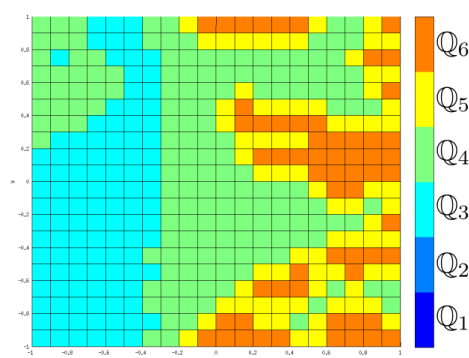
Nas aproximações apresentadas, observamos que em meios homogêneos o método SHM com multiplicadores descontínuos utilizam mais graus de liberdade, porém, sua precisão não é muito superior ao SHM-C, tornando o método de multiplicadores contínuos altamente competitivo. Além disso, no segundo experimento, o termo do indicador que está ligado a continuidade entre os elementos, produz uma distribuição dos graus de forma a não ter uma diferença maior que um grau entre os elementos. Estas aproximações usando p -adaptatividade, conseguiram automaticamente localizar as regiões de distintas frequências no meio heterogêneo.



(a) iteração 4



(b) iteração 5



(c) iteração 6

Figura 6: três últimas iterações da convergência p -adaptativa com o método SHM-D

REFERÊNCIAS

- Giorgio, G., Fernández-Méndez, S., e Huerta, A., 2013. Hybridizable discontinuous Galerkin p -adaptivity for wave propagation problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, pp. 1244-1262.
- Gomez-Revuelto, I., Garcia-Castillo, L. E., Llorente-Romano, S. e Pardo, D., 2012. A three-dimensional self-adaptive hp finite element method for the characterization of waveguide discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp 62-74.
- Joly, P., 2008. Finite element methods with continuous displacement. In N. A. Kampanis, V. A.

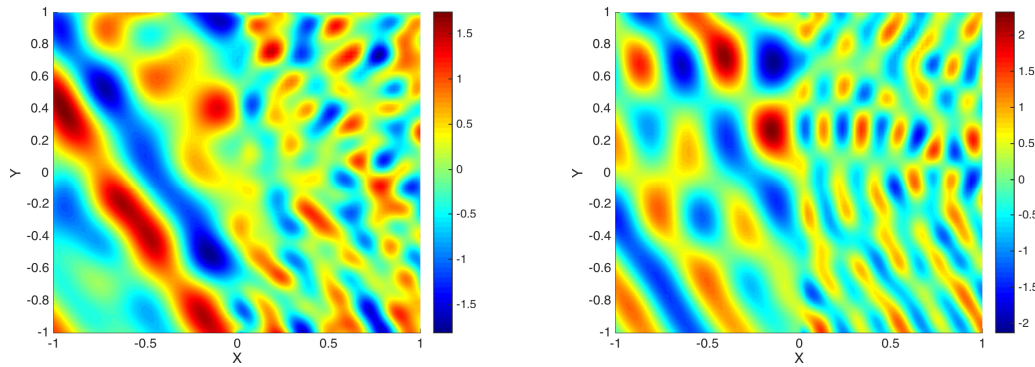


Figura 7: superfície gerada pela aproximação em um meio heterogêneo com o método SHM-C: na esquerda componente u_x e u_y a direita

Dougalis, and J. A. Ekaterinaris, editors, *Effective Computational Methods in Wave Propagation*, pp 267-330.

Lehrenfeld, C. e Scheberl, J. 2015. High order exactly divergence-free hybrid discontinuous Galerkin methods for unsteady incompressible flows. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*

Nguyen, N. C., Peraire, J. e Cockburn, B., 2011. High-order implicit hybridizable discontinuous Galerkin methods for acoustics and elastodynamics. *Journal of Computational Physics*, pp. 748-769.

Scholz, D., 2007. An Anisotropic P-adaptive Method for Linear Elastostatic and Elastodynamic Analysis of Thin-walled and Massive Structures. *Shaker Verlag GmbH*.

Stanglmeier, M., Nguyen, N. C., Peraire, J. e Cockburn, B., 2016. An explicit hybridizable discontinuous Galerkin method for the acoustic wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 748-769.

Takekawa, J., Madariaga, R., Mikada, H. e Goto T., 2012. Numerical simulation of seismic wave propagation produced by earthquake by using a particle method. *Geophys. J. Int.*

Yue, M., Li, Y, Wu, X., 2015. 3-D Simulation of marine CSEM using unstructured FEM meshes. *International Workshop and Gravity, Electrical & Magnetic Methods and their Applications*, pp. 127-130.