



ANÁLISE NÃO LINEAR AVANÇADA DE ARCOS METÁLICOS ABATIDOS E POUCO ABATIDOS.

Lidiane R. R. M. de Deus

Ígor J. M. Lemes

Jéssica L. Silva

Ricardo A. M. Silveira

lrdeus@gmail.com

igorjml@hotmail.com

jessicalorrany05@hotmail.com

ramsilveira@yahoo.com.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Ouro Preto, CEP 35400-000, Minas Gerais, Brasil.

Resumo. *No contexto da análise estrutural não linear, este trabalho traz um estudo numérico computacional envolvendo arcos metálicos abatidos e não abatidos. Grandes deslocamentos e comportamento inelástico do material serão considerados nas análises. Será utilizada a plataforma computacional CS-ASA para a realização das análises numéricas dos arcos. Esse sistema computacional é baseado no Método dos Elementos Finitos e foi desenvolvido para análise numérica avançada estática e dinâmica de estruturas. Algumas configurações de arcos com diferentes geometrias, seções transversais, condições de contorno e carga (distribuída e concentrada) serão analisados. Dessa forma, será possível avaliar a representatividade da análise não linear perante às diferentes configurações da estrutura.*

Palavras Chave: *Arcos abatidos, Arcos pouco abatidos, Análise não linear, Grandes deslocamentos, Efeito inelástico*

1 INTRODUÇÃO

O início da utilização de arcos como sistema estrutural remonta aos primórdios da civilização. Grandes obras foram realizadas através desse recurso na Roma Antiga (Levy, 2006), visto que os materiais disponíveis nesse período eram principalmente particulados rochosos, que em suma tem baixa resistência à tração, e o arco tem como característica principal a predominância da compressão como esforço interno (Dym e Williams, 2011; Heyman, 1995), o que possibilitava a criação de várias estruturas.

Na atualidade, essa característica dos arcos continua tornando esse sistema estrutural mais adequado, já que é crescente a necessidade de criar projetos cada vez mais inteligentes e econômicos, de forma a tornar as soluções mais práticas e viáveis. Com o surgimento de materiais mais resistentes e tecnológicos, os arcos têm sido empregados para vencer grandes vãos e possibilitar a criação de pontes, túneis e grandes coberturas (Guarnier, 2009) com estruturas cada vez mais esbeltas, gerando assim a economia pretendida.

Para se extrair o melhor de um sistema estrutural, aproveitando suas características, nada é mais importante que criar modelos que o representem de forma mais fiel possível à realidade. Muito se tem estudado sobre o comportamento dos arcos nas análises linear e não linear elástica. Chang e Hodges (2009) estudaram soluções analíticas para a flambagem no plano de arcos circulares pouco abatidos usando um modelo de elementos finitos, enquanto Pi *et al.* (2002) estudou soluções analíticas para o comportamento de flambagem e pós flambagem não linear no plano de arcos circulares abatidos para cargas radiais uniformes e cargas concentradas no topo do arco. Outros trabalhos relevantes nesse âmbito foram realizados por Pi e Bradford (2013) e Pi e Bradford (2014), tratando também de estabilidade elástica de arcos para diferentes condições de contorno e carregamento. Além dos arcos circulares, também foram realizados vários estudos sobre a flambagem elástica de arcos parabólicos (Harrison, 1982; Bradford *et al.*, 2015). Porém, poucos são os trabalhos que abordam a flambagem inelástica dos arcos.

Várias formulações numéricas foram desenvolvidas no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Ouro Preto (PROPEC) ao longo dos últimos anos para descrever as não linearidades presentes nas estruturas. Galvão (2000), Silva (2009) e Maximiano (2012) estudaram o comportamento não linear elástico de arcos esbeltos. O presente trabalho adiciona mais um parâmetro de grande importância no comportamento dos arcos: a inelasticidade do material.

Através de uma Análise Avançada, que incorpora as não linearidades física e geométrica da estrutura, aliada às estratégias de solução não linear eficientes, cria-se e resolve-se um modelo numérico que reproduz resultados muito próximos do desempenho real da estrutura.

A respeito da não linearidade geométrica, essa surge na estrutura devido às modificações de geometria, na qual imperfeições iniciais oriundas de tolerâncias de fabricação, montagem da estrutura ou ainda forças horizontais levam ao aparecimento de momentos fletores adicionais em virtude da presença de esforços normais (Silva, 2009). Esses efeitos são chamados de efeitos de segunda ordem – os chamados efeitos $P-\Delta$ (global) e $P-\delta$ (local). No presente trabalho, a consideração da não linearidade geométrica se dá a partir da formulação do referencial corrotacional (RCR), que se baseia na separação entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais da estrutura.

Já a não linearidade física está relacionada ao comportamento da curva tensão-deformação dos materiais, que em determinados trechos não segue a lei de Hooke. Neste trabalho, as análises inelásticas são realizadas utilizando o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), que tem o intuito de se aproximar das prescrições normativas (Lemes, 2015). Esse método busca acoplar a configuração deformada da seção transversal às relações constitutivas dos materiais que a compõem.

O MCD será acoplado ao Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR; King *et al.*, 1992; Liew *et al.*, 1993; e Chan e Chui, 2000), que avalia a perda gradual de rigidez à flexão do elemento estudado a partir da localização da combinação de esforços solicitantes dentro da curva de resistência Esforço Normal x Momento Fletor (Lemes, 2015).

Portanto, através da união do MRPR, MCD e das formulações corrotacionais, chega-se numa nova versão do CS-ASA, que será usada aqui para as análises não lineares de arcos abatidos e pouco abatidos.

Este trabalho foi organizado em 4 partes. A próxima seção apresenta brevemente as formulações numéricas não lineares desenvolvidas e utilizadas. Já a seção 3 apresenta exemplos que procuram testar e validar as formulações apresentadas. Por fim, a última parte traz conclusões das análises computacionais não lineares realizadas.

2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

2.1 Formulação corrotacional (RCR)

Para a consideração dos efeitos geométricos não lineares, o RCR será utilizado para descrever o movimento da estrutura, que segundo Hsiao *et al.* (1987), Battini (2002) e Santana (2015), pode ser adaptado tanto ao referencial Lagrangiano total (RLT) quanto ao referencial Lagrangiano atualizado (RLA). No RCR, o movimento é decomposto em duas parcelas: uma relativa ao movimento de corpo rígido do elemento e a outra associada a deformação pura. A Figura 1 mostra a movimentação do elemento que é medida através do uso do sistema de coordenadas locais (X, Y), que terá uma contínua rotação e translação em conjunto com o elemento (Silva, 2016). O elemento sofre dois movimentos: o primeiro é o movimento de corpo rígido incluindo rotação e translação do elemento, e o segundo consiste na deformação relativa em um sistema de coordenadas locais que produz energia. Sendo assim, é necessário obter a relação entre o sistema de coordenadas local e global para as devidas atualizações nas análises dos sistemas estruturais. Detalhes sobre essa formulação podem ser vistos em Silva (2016).

2.2 Método da rótula plástica refinado (MRPR)

No contexto do método dos elementos finitos (MEF), a não linearidade física das estruturas reticuladas é comumente abordada através de dois métodos: o Método da Rótula Plástica (MRP), que considera a plasticidade concentrada apenas nos pontos nodais do modelo do sistema estrutural e tem baixa demanda computacional; e o Método da Zona Plástica (MZP), que considera a inelasticidade ao longo do comprimento do elemento finito (plasticidade distribuída), mas tem alta demanda computacional.

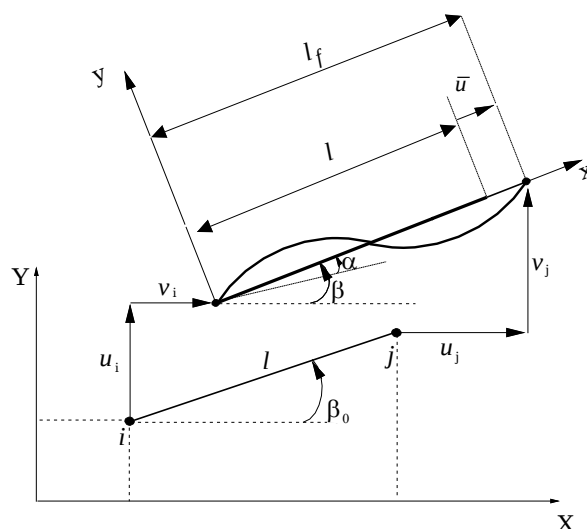


Figura 1. Relação entre os sistemas local e global (Silva, 2016)

O Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR), que é adotado neste trabalho, é uma alternativa ao MZP. Trata-se ainda de um modelo de plasticidade concentrada, porém através de molas de comprimento nulo localizadas nos nós do elemento (Fig. 2), leva em consideração a transição do regime elástico para o regime plástico, que ocorre gradualmente.

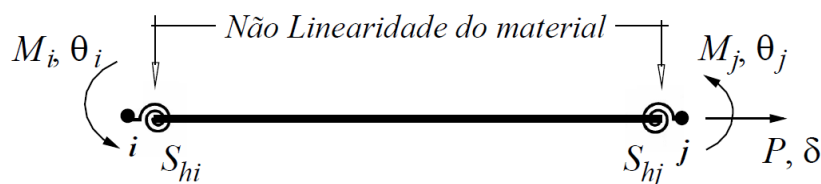


Figura 2. Elemento finito de viga-coluna com molas fictícias, esforços internos e graus de liberdade referenciado ao sistema corrotacional (Silva, 2009)

2.3 Método da compatibilidade das deformações (MCD)

Ao submeter um elemento estrutural a esforços externos, este se deforma gerando forças internas para equilibrar o sistema. Essa deformação, a nível da seção transversal, é abordada no MCD. Supõe-se que o campo de deformações é linear, e que a seção permanece plana após a deformação, como ilustrado na Fig. 3 (Lemes et al., 2017).

No presente trabalho, a discretização das seções transversais apresentadas no item 3 foi realizada em fibras, onde as tensões residuais são aplicadas explicitamente.

A avaliação da rigidez axial e da rigidez à flexão se dá a partir da tangente à relação momento-curvatura e dependem do módulo de elasticidade que é retirado das relações constitutivas dos materiais, que serão apresentadas a seguir.

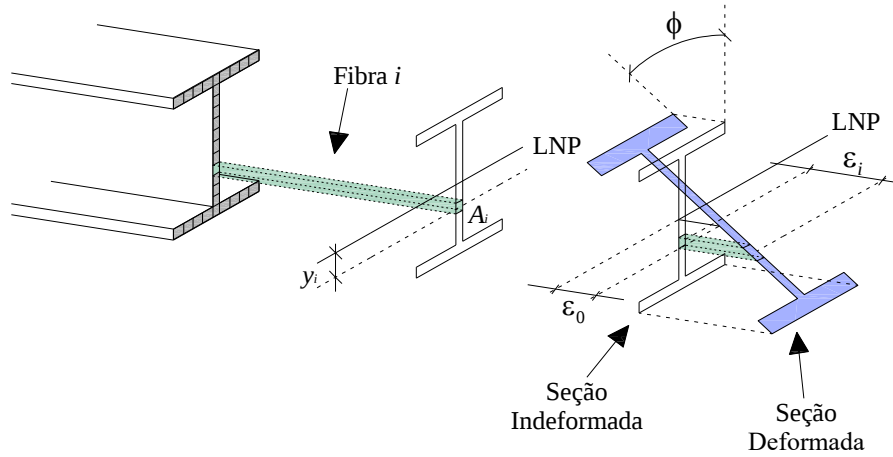


Figura 3. Campo linear de deformações sem curvatura no eixo y

2.4 Relação constitutiva

A representação do comportamento de um determinado material sob a influência de uma força de tração ou compressão é dada pela sua relação constitutiva. O diagrama de tensão-deformação para o aço adotado nas formulações deste trabalho é um modelo trilinear, conforme Fig. 4. Nesse modelo, há a possibilidade de considerar o encruamento do material.

O comportamento do aço é regido pelas seguintes equações (Lemes et al., 2017):

$$\sigma = \begin{cases} -f_2 + E_{a3}(\varepsilon + \varepsilon_2), & -\varepsilon_u \geq \varepsilon > -\varepsilon_2 \\ -f_y + E_{a2}(\varepsilon + \varepsilon_y), & -\varepsilon_2 \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y + E_{a2}(\varepsilon - \varepsilon_y), & \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ f_2 + E_{a3}(\varepsilon - \varepsilon_2), & \varepsilon_2 < \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (1)$$

em que f_y , f_2 , f_u , ε_y , ε_2 e ε_u , são respectivamente as tensões e deformações que delimitam os trechos lineares da relação constitutiva, E_a , E_{a2} e E_{a3} são os módulos de elasticidade. Além disso, ε_y é determinado pela relação entre f_y e E_a , e ε_2 é tomado igual a $10\varepsilon_y$.

No processo de fabricação do aço quando moldado a quente, podem surgir tensões residuais na peça devido à não homogeneidade do resfriamento da mesma. Nesse trabalho, a distribuição das tensões residuais, σ_r , segue o modelo ilustrado na Fig. 5, que é fornecido pelo Eurocode 3 (2005).

2.5 Relação momento–curvatura

A relação momento–curvatura é obtida a partir de uma aplicação localizada, a nível da seção transversal, do Método de Newton-Raphson, onde à cada valor fixo de esforço axial (N), o momento fletor solicitante (M) vai sofrendo pequenos incrementos até atingir o momento último resistente.

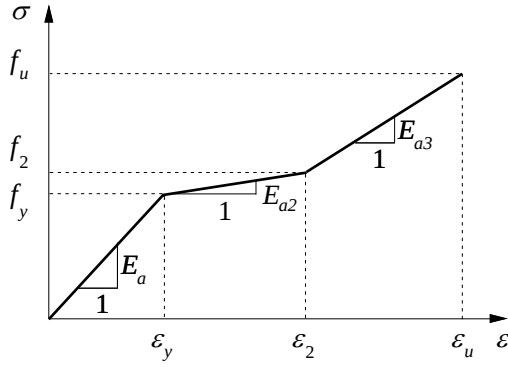


Figura 4. Relação tensão-deformação aço dos perfis

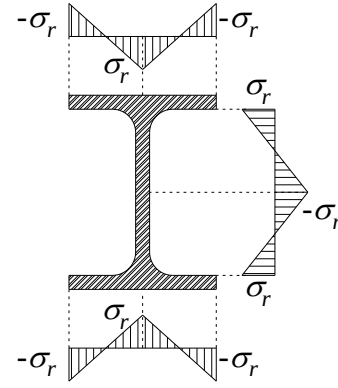


Figura 5. Distribuição das tensões residuais no perfil "I"

Para descrever a configuração deformada da seção transversal, a mesma é discretizada e os valores de deformação axial (ε) no centroide plástico de cada elemento finito da malha são capturados e assim, através das relações constitutivas dos materiais, são obtidas as tensões σ_i e o módulo de elasticidade tangente em cada um dos elementos. Assim, a deformação axial de um do elemento "i" qualquer da seção transversal é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ri} + \phi y_i \quad (2)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção, ε_r é a deformação devido às tensões residuais, e ϕ a respectiva curvatura.

Adotando uma notação matricial em que ε_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X}$, o equilíbrio da seção é dado por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{int} \\ M_{int} \end{bmatrix} \cong \mathbf{0} \quad (3)$$

em que onde $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \phi]^T$, o vetor de forças externas $\mathbf{f}_{ext}$ é composto pelos esforços axial e momento fletor, N_{ext} e M_{ext} respectivamente e os termos N_{int} e M_{int} são as componentes do vetor de forças internas, $\mathbf{f}_{int}$, obtidos a partir da configuração deformada da seção transversal através das integrais clássicas:

$$N_{int} = \iint_{A_u} \sigma_a dA = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} \sigma_{ai} A_{ai} \quad (4)$$

$$M_{int} = \iint_{A_u} \sigma_a y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib,a}} \sigma_{ai} A_{ai} y_{ai} \quad (5)$$

com $n_{fib,a}$ sendo o número de fibras no perfil metálico, A_i a área da fibra e y_i a posição da fibra em relação à Linha Neutra Plástica (LNP) (Fig. 3).

Segundo Chiorean (2013), é eficiente iniciar o processo com $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, porém a convergência só é atingida na primeira iteração se os esforços externos forem nulos. Assim, para a iteração seguinte (k+1) o vetor de deformações é dado por:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (6)$$

em que $\mathbf{F}$ é a matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Eq. (3):

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

O critério de convergência adotado é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}$, e do vetor de forças externas, $\mathbf{f}_{ext}$, ou seja:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (8)$$

com Tol sendo uma dada tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

O processo iterativo descrito nesta seção, para um dado valor de esforço axial externo, é ilustrado na Fig. 6. Uma vez atendido o critério de convergência de forças no ciclo iterativo, em que se equilibram as forças externas e internas na seção transversal (Fig. 6(b)), avaliam-se os parâmetros de rigidezes generalizadas da seção transversal. A tangente à relação momento – curvatura é dada na forma incremental por:

$$\begin{aligned} \Delta N &= f_{11} \Delta \varepsilon_0 + f_{12} \Delta \Phi \\ \Delta M &= f_{21} \Delta \varepsilon_0 + f_{22} \Delta \Phi \end{aligned} \quad (9)$$

Assim, a rigidez axial e à flexão, EA_t e EI_t , respectivamente, são dadas por relações diretas entre os esforços e as deformações retiradas diretamente da Eq. 9 (Chiorean, 2013):

$$EA_t = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}} \quad (10)$$

$$EI_t = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} \quad (11)$$

sendo os termos f_{ij} os parâmetros componentes da matriz constitutiva da seção transversal, Eq.7.

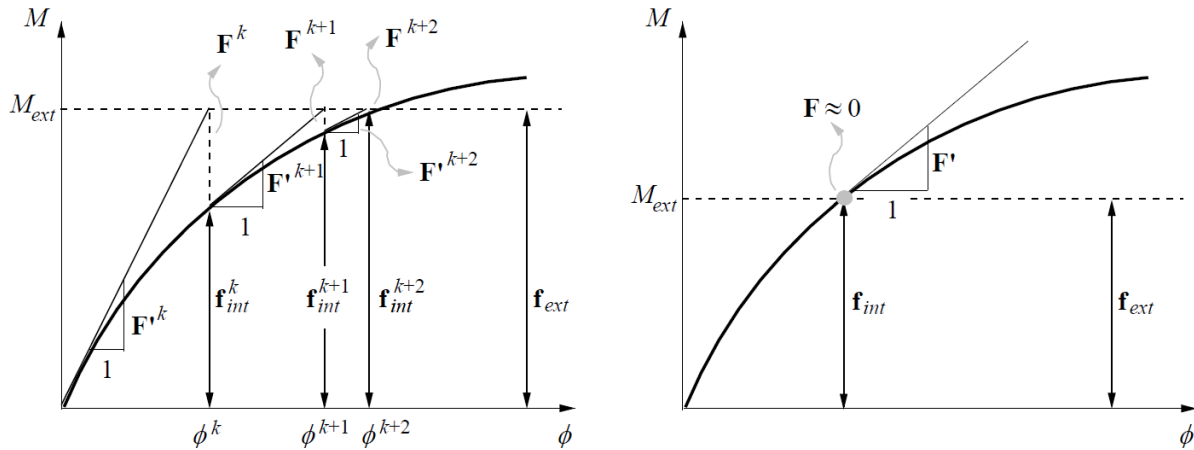


Figura 6: Construção da relação Momento x Curvatura para (a) Processo Iterativo e (b) Ponto de Equilíbrio.

2.6 Curva normal-momento

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Esse par de esforços é um ponto da curva de interação Esforço Normal x Momento Fletor (Fig. 7). Essa é a curva utilizada nas análises globais com o uso das rigidezes generalizadas, sem a necessidade de uma curva de início de plastificação.

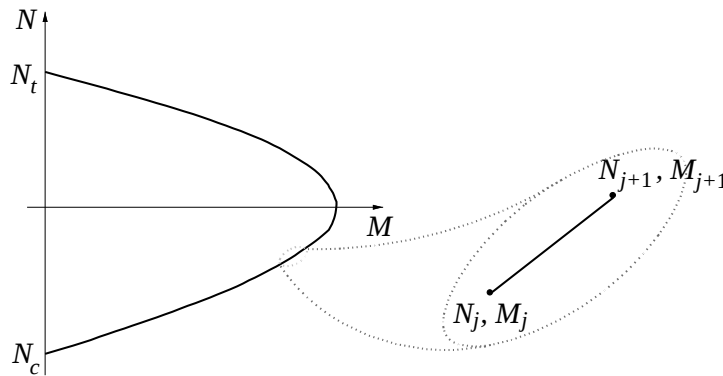


Figura 7. Conjunto de pontos NM para curva de interação

2.7 Solução do problema não linear

Para a solução do problema estático inelástico global foram usadas estratégias de incremento de carga e iteração, de forma a contornar os pontos críticos ao longo das trajetórias de equilíbrio.

A estratégia de incremento de carga usada foi a técnica do deslocamento generalizado (Yang e Kuo, 1994) e a estratégia de iteração adotada foi a norma mínima dos deslocamentos residuais (Chan, 1988). Esta última é acoplada ao método de Newton-Raphson. Maiores detalhes do processo de solução não linear podem ser vistos em Silva (2009) e Pires (2012).

2.8 Base computacional

O CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009) é base computacional utilizada neste trabalho, como já mencionado na introdução. Trata-se um programa para análise avançada de estruturas e que vêm sendo expandido com novas funcionalidades, formulações, estratégias de solução não linear, etc. Dentre as melhorias mais recentes, têm-se o desenvolvimento do módulo para análise não linear de estruturas de concreto e mistas (Lemes, 2015; Lemes et al., 2017) e as implementações de formulações corrotacionais para elementos de barras realizadas por Silva (2016).

Para alguns problemas analisados na próxima seção, além do emprego do CS-ASA, foi também utilizado o sistema computacional Mastan2 (Ziemian, 2010), que é um programa gráfico-interativo para análises elástica e inelástica, de primeira e segunda ordem, de estruturas reticuladas planas e espaciais.

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nessa seção, as estratégias numéricas apresentadas são validadas através do estudo de alguns arcos. Os exemplos avaliados estão divididos em 5 partes: estudo da malha de discretização, trajetória de equilíbrio, carga limite, capacidade resistente da seção, influência das condições de bordo e da relação f/L . É importante ressaltar que os resultados são validados a partir da comparação com resultados da literatura, obtidos também de forma numérica.

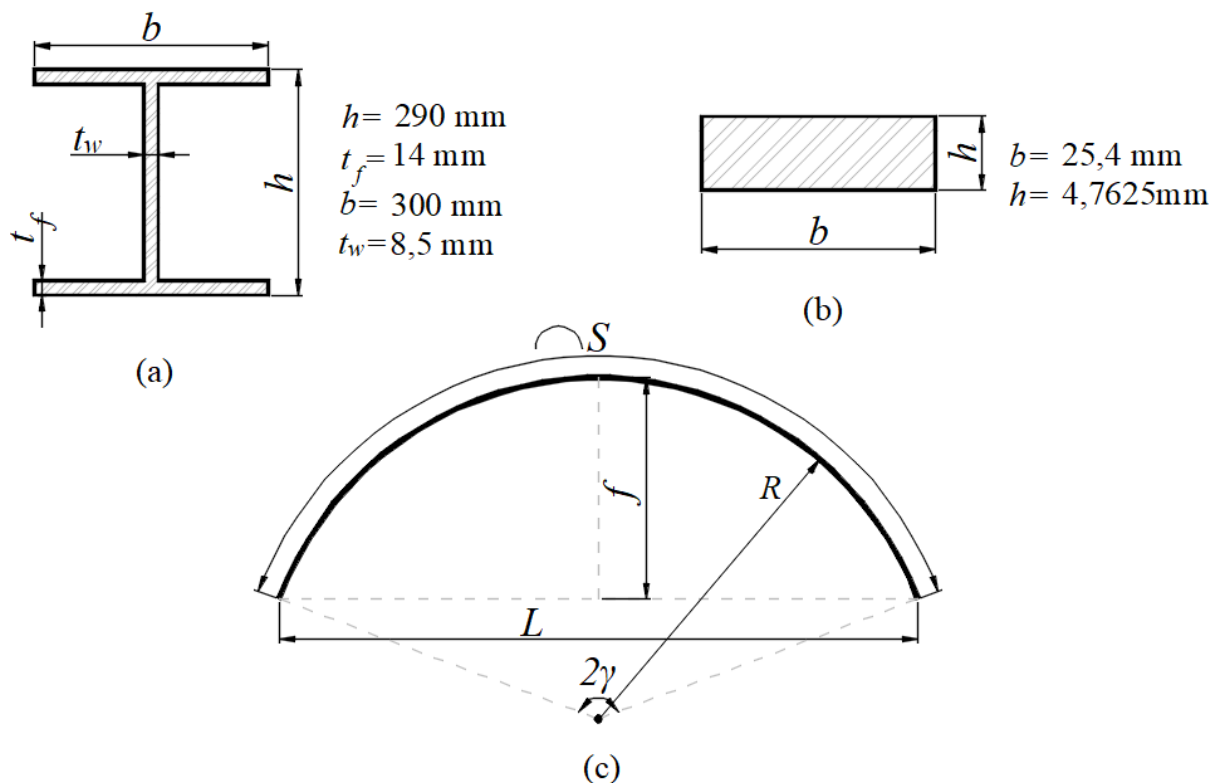


Figura 8. (a) Perfil “I” HEB-300; (b) Perfil Retangular R25x4,75; (c) Geometria do arco.

Foram analisados arcos com duas seções transversais (uma com perfil “I” e outra com perfil retangular cheio) e dois aços com característica diferentes. As propriedades dos materiais adotados e características das seções transversais, bem como sua geometria estão apresentadas na Tabela 1 e na Fig.8, respectivamente.

Todas as análises realizadas foram inelásticas de segunda ordem, exceto para os exemplos com seção retangular, em que só há não linearidade geométrica (não existe tensão residual). A estratégia de solução não linear foi descrita na Seção 2.7 e o critério de convergência adotado foi o critério de carga. A tolerância admitida foi de 10^{-4} .

Tabela 1. Propriedades dos materiais dos arcos “A” e “B”.

Perfil “I” – AÇO 1	Módulo de Elasticidade (E)	200 GPa
	Tensão de Escoamento (f_y)	235 MPa
Seção Retangular – AÇO 2	Módulo de Elasticidade (E)	68,95 GPa
	Tensão de Escoamento (f_y)	138 MPa

3.1 Estudo da malha de discretização

O objetivo deste estudo é avaliar qual a malha de discretização é a mais adequada para a modelagem dos arcos apresentados a seguir, de forma se atingir resultados próximos da literatura.

Para a realização deste estudo foi modelado o arco biapoiado com perfil “I” HEB-300, submetido à uma carga concentrada no topo, ângulo interno $2\gamma = 180^\circ$ e comprimento de arco $S = 12\text{m}$. Esse arco foi inicialmente analisado por Spoorenberg *et al.* (2012), que obteve uma carga crítica de plastificação $F_{pl} = 608 \text{ kN}$.

Os resultados obtidos nesse trabalho para diferentes discretizações da estrutura são apresentados na Tabela 2. Nota-se que a malha que forneceu a carga crítica plástica mais próxima da literatura é a malha número 4, onde se verifica uma diferença de apenas 0,2%.

Tabela 2. Estudo de discretização da malha de arcos com perfil “I”.

Malha	Discretização		F_{pl} (kN)		Diferença (%)
	Long.	ST	Spoorenberg	Presente Trabalho	
1	4	9	608	576,986	-5,1
2	4	30	608	611,88	0,6
3	8	9	608	576,472	-5,2
4	8	15	608	609,166	0,2
5	8	30	608	614,002	1,0
6	20	9	608	558,128	-8,2
7	20	15	608	591,904	-2,6
8	20	30	608	595,556	-2,0

A malha 4 foi então adotada em todas as análises de arcos com perfil “I” realizadas nas próximas seções e é representada na Fig. 9.

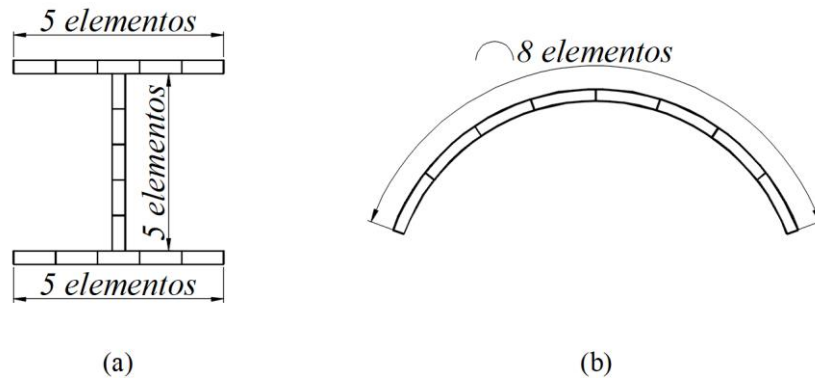


Figura 9. (a) Discretização da seção transversal; (b) Discretização do comprimento do arco.

Foi ainda estudada a malha de elementos finitos mais adequada para um arco abatido biengastado com $R = 3,38\text{m}$ e $2\gamma = 14,67^\circ$ e seção transversal retangular R25x4,75. Esse arco foi estudado por Belytschko e Glaum (1979). Foram utilizados 8, 20, 80 e 200 elementos na discretização do comprimento do arco e 15 elementos na discretização da seção transversal. A Figura 10 apresenta a trajetória de equilíbrio da estrutura para essas discretizações. Para a malha mais refinada (200 elementos), a carga crítica de plastificação atingida foi de 2,44 kN, que corresponde a uma diferença de 2,46% do valor da literatura (2,50 kN). No entanto, com a malha de 80 elementos chegou-se a uma diferença quase insignificante em relação à malha com 200 elementos (0,07%). Assim, por questões de simplificação e eficiência computacional do modelo, essa última discretização foi adotada em todas as análises de arcos com perfil retangular cheio realizadas nesse trabalho.

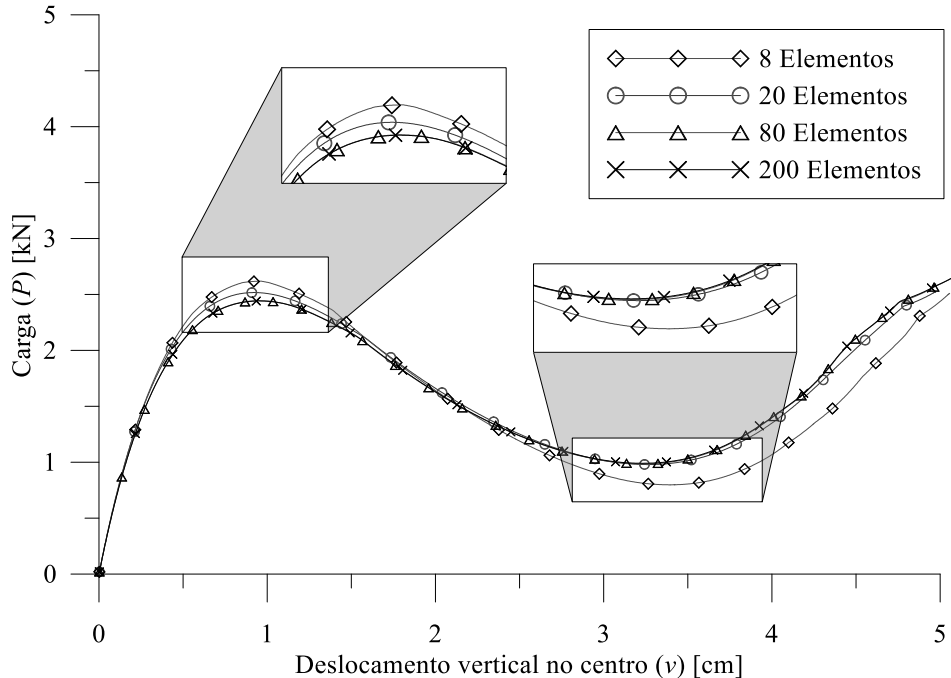


Figura 10. Avaliação da discretização do arco: seção transversal retangular

3.2 Trajetórias de equilíbrio

Analisa-se agora as trajetórias de equilíbrio obtidas através do CS-ASA para arcos já estudados por outros autores. No caso específico de arco abatido biapoado, foi feita também a comparação com os resultados obtidos através do software Mastan2.

Pi e Trahair (1996) e Belytschko e Glaum (1979) estudaram a flambagem inelástica de um arco muito abatido com seção retangular R25x4,75 e geometria já apresentada na seção anterior. A comparação entre o modelo analisado no CS-ASA e os modelos da literatura estão apresentados na Fig. 11. Note que se trata de uma estrutura com perda de estabilidade por ponto limite de carga, a partir do qual um acréscimo de carga ocasiona um salto dinâmico para uma configuração de equilíbrio em que a concavidade inicial do arco é invertida. Nota-se uma boa concordância em relação ao modelo de Belytschko e Glaum, principalmente na região de formação da primeira rótula plástica, o que ocorre próximo ao ponto limite de carga de 2,5 kN e verifica-se uma aproximação razoável com o modelo de Pi e Trahair, também nessa mesma região.

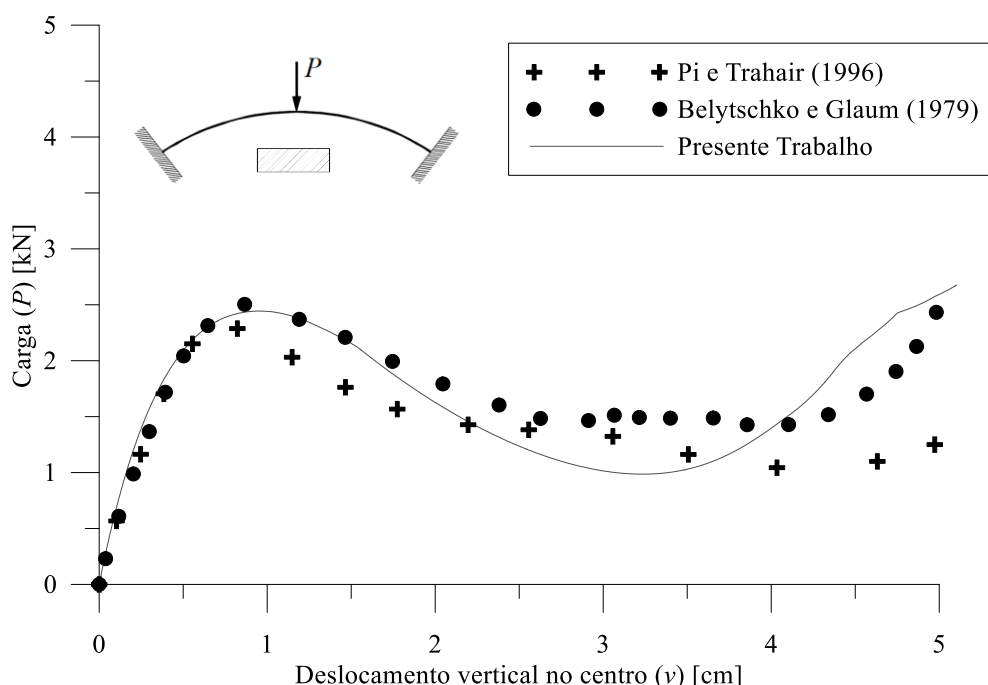


Figura 11. Trajetória de equilíbrio do arco abatido com perfil retangular biengastado

Spoorenberg *et al.* (2012) obtiveram as trajetórias de equilíbrio de arcos abatidos e pouco abatidos, biapoados e biengastados com carga concentrada no topo do arco e carga vertical uniformemente distribuída. As análises não levaram em consideração a não linearidade geométrica, mas incorporaram a não linearidade do material. A Figura 12 traz a trajetória de equilíbrio do arco abatido, biapoado, com $2\gamma = 20^\circ$, comprimento de arco $S = 12\text{m}$, e seção transversal em perfil “I” HEB-300. Trata-se também de uma estrutura com perda de estabilidade por ponto limite de carga. Nota-se que a concordância entre os resultados obtidos com os modelos do CS-ASA / Mastan2 é maior do que com os do CS-ASA / Spoorenberg. Isso ocorre porque nos dois primeiros modelos, a não linearidade geométrica é levada em consideração, o

que não acontece no modelo de Spoorenberg. Os arcos abatidos são extremamente sensíveis às imperfeições geométricas.

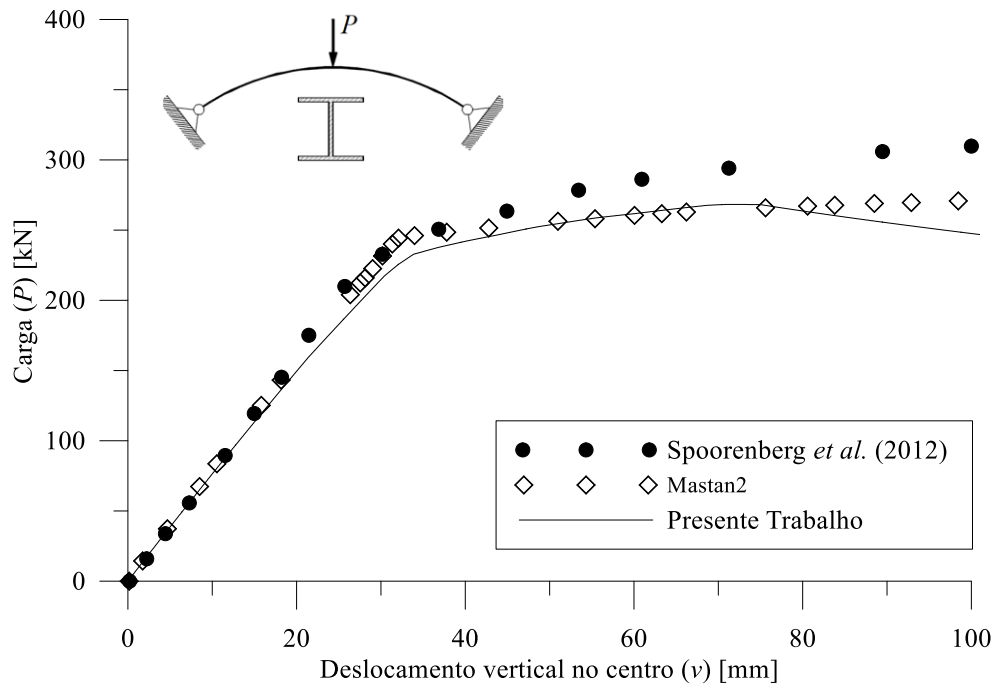


Figura 12. Trajetória de equilíbrio do arco abatido com perfil “I” biapoado

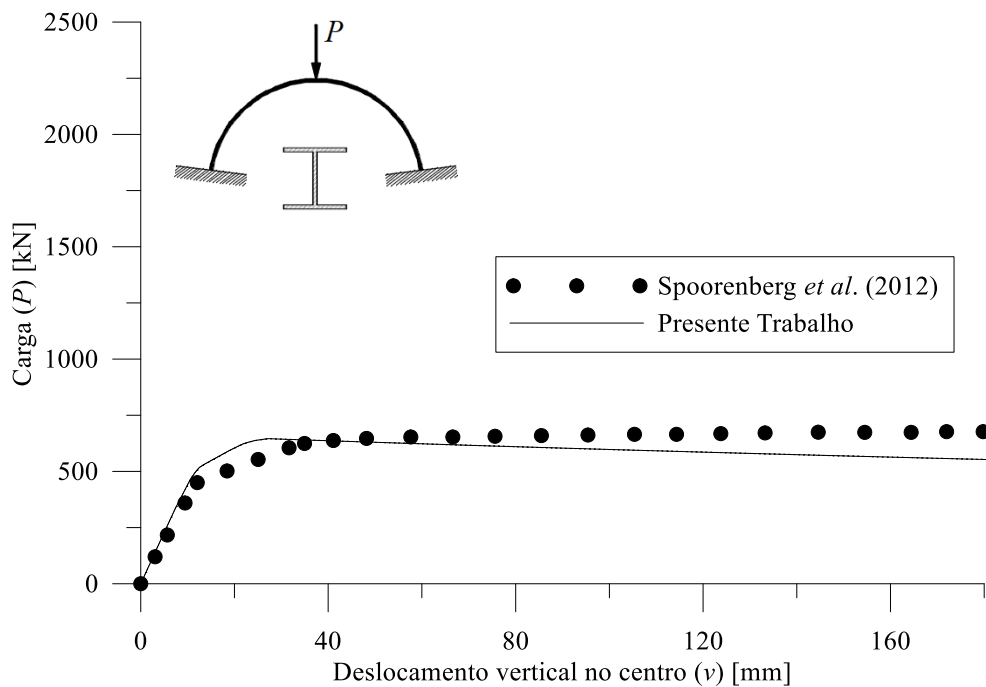


Figura 13. Trajetória de equilíbrio do arco pouco abatido com perfil “I” biengastado

A Figura 13 apresenta a trajetória de equilíbrio de um arco pouco abatido biengastado, com $2\gamma = 120^\circ$, comprimento de arco $S = 12$ m e seção transversal em perfil “I”. Trata-se também de uma estrutura com perda de estabilidade por ponto limite de carga. Para esse caso, a concordância entre os resultados obtidos com o CS-ASA e Spoorenberg é bastante satisfatória. Isso se deve ao fato de que arcos pouco abatidos não sofrem tanta influência das imperfeições geométricas, como ocorre com os arcos abatidos.

Outras características relativas à estabilidade inelástica dos arcos são apresentadas nas próximas seções.

3.3 Carga plástica limite

Neste estudo, o objetivo é avaliar a carga crítica para arcos com comprimento $S = 12$ m e valor de 2γ entre 10° e 180° , de forma a incluir arcos abatidos e não abatidos com carga concentrada e duas condições de contorno diferentes – arco biapoado e arco biengastado. Além disso, também são estudados os arcos abatidos e não abatidos biapoados com carga distribuída vertical.

Na Tabela 3 percebe-se que quanto mais abatido é o arco, menor é a carga que ele suporta, porém, a relação entre o ângulo interno 2γ e carga crítica inelástica não é linear. Para os arcos muito abatidos, à medida que o ângulo interno diminui gradativamente, a carga crítica diminui rapidamente, e a medida que o arco se torna menos abatido, essa alteração da carga crítica se torna menor. O mesmo acontece para os tipos de carregamento apresentados e também para as condições de contorno consideradas. Como esperado, para uma mesma geometria, o arco biengastado tem a carga crítica inelástica maior do que a do arco biapoado.

Tabela 3. Carga plástica limite para arcos com seção transversal “I”.

2γ ($^\circ$)	Características dos Arcos		
	Biapoado (Carga)		Biengastado (Carga)
	Concentrada (kN)	Distribuída (kN/m)	Concentrada (kN)
10	135	18	211
30	360	60	360
60	498	119	513
90	562	154	599
120	597	182	646
150	609	193	673
180	609	196	689

3.4 Capacidade resistente da seção – relação FN x MF

O objetivo agora é avaliar a capacidade resistente da seção transversal do arco através da curva de interação Força Normal x Momento Fletor, considerando a flexão em torno do eixo de maior inércia. Os dois arcos analisados têm perfil “I” HEB-300, comprimento $S = 12$ m, $2\gamma = 20^\circ$ (arcos abatidos) e carga concentrada no topo, porém o primeiro deles é biapoado e o segundo biengastado. A Figura 14 ilustra a curva de resistência para essas estruturas, que é a mesma, uma vez que elas possuem a mesma seção transversal I. Nessa mesma figura pode ser avaliada a variação FN x MF nas Seções 1, 2, 3 e 4, onde as duas primeiras estão localizadas

no arco biapoiado (ver detalhe na figura). Nota-se que todas essas seções atingem a plastificação total.

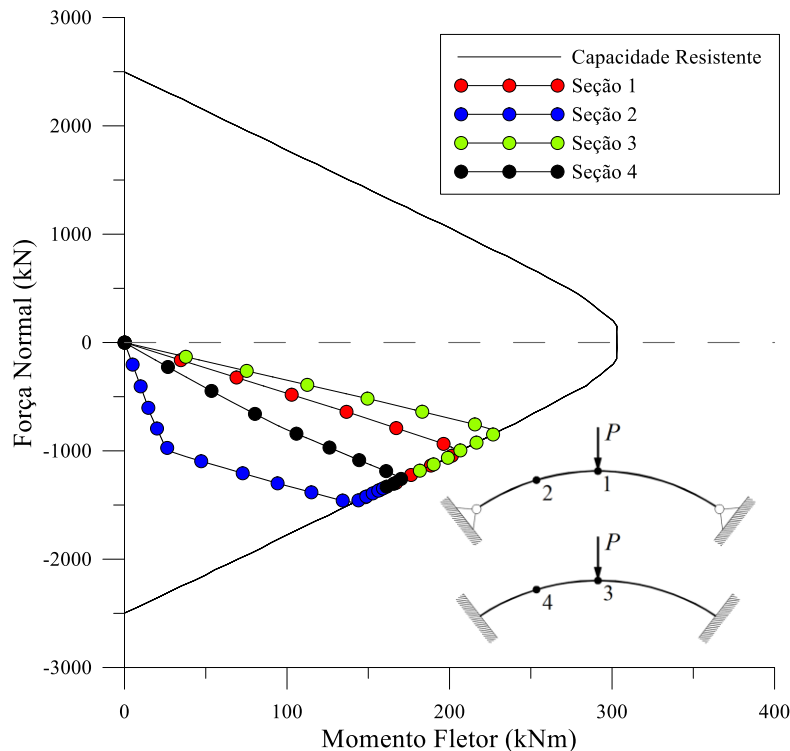


Figura 14. Capacidade resistente para os arcos de seção “I”.

Através da figura anterior pode ser verificado que o esforço normal é dominante e muito maior que o momento fletor que atua internamente no arco. Como se sabe, os arcos são estruturas que trabalham, predominantemente, à esforço de compressão (Dym e Williams, 2011).

3.5 Influência das condições de bordo e da relação f/L

As condições de bordo são fatores determinantes na trajetória de equilíbrio de arcos. Nesta seção, estuda-se a influência das condições de bordo em dois conjuntos de arcos (Fig. 15). Primeiro, para arcos muito abatidos ($2\gamma = 10^\circ$), perfil “I” HEB-300 e comprimento $S = 12$ m. Pode-se observar que o comportamento dos dois arcos, um biapoiado e o outro biengastado são semelhantes, no entanto, o nível de carga à qual o arco biengastado resiste (103 kN) é maior que a carga limite do arco biapoiado (68 kN). Como esperado, vale também ressaltar que o arco biengastado atinge essa carga limite com um deslocamento vertical do centro do arco menor que o do arco biapoiado. Isso demonstra que o engaste torna o arco menos deslocável. O mesmo ocorre para o segundo conjunto de arcos, que são arcos pouco abatidos ($2\gamma = 150^\circ$), perfil “I” HEB-300 e comprimento $S = 12$ m. O arco biapoiado tem uma carga limite inelástica de 235 kN, enquanto que o arco biengastado tem uma carga última de 270 kN.

A razão f/L , que está relacionada ao nível de abatimento do arco, também é extremamente importante no comportamento do arco e influi na sua trajetória de equilíbrio, o que pode ser

visto na Fig. 16. Quanto mais abatido é o arco, ou seja, quanto menor é a razão f/L , menor é a carga crítica da estrutura, o que foi observado também na Tabela 3.

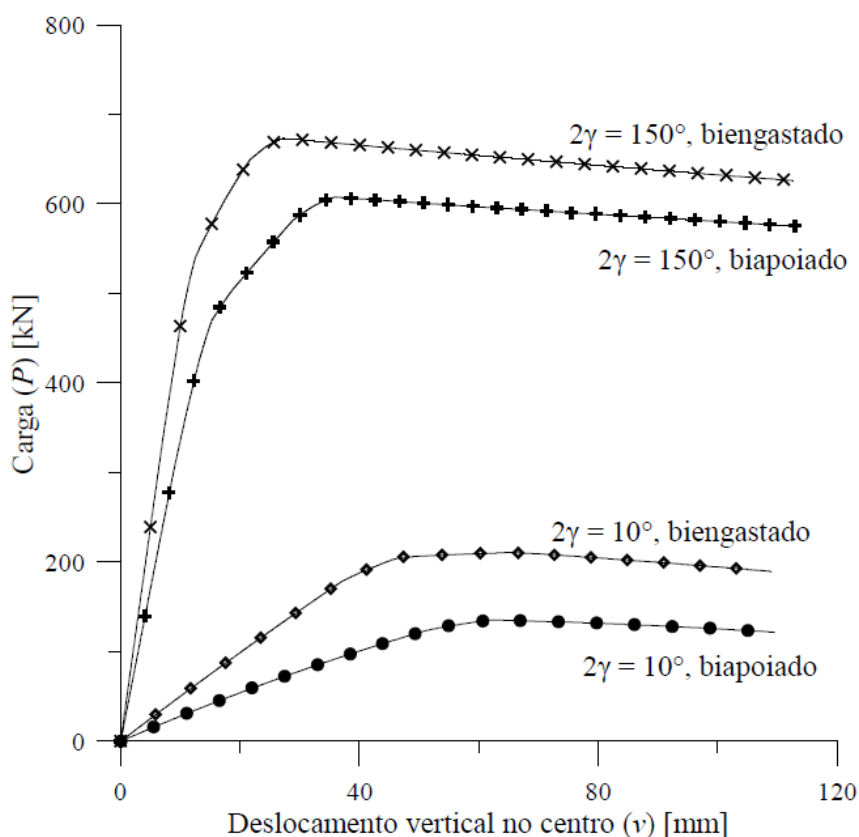


Figura 15. Influência das condições de bordo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, utilizou-se o método da rótula plástica refinado (MRPR) em conjunto com o método da compatibilidade de deslocamentos (MCD) aliado às formulações corrotacionais (RCR) para se investigar vários aspectos relacionados à estabilidade inelástica de arcos abatidos e pouco abatidos.

Ao realizar o estudo da discretização do sistema estrutural notou-se que, para diferentes formulações, foi necessário utilizar um número muito diferente de elementos finitos. Spoorenberg *et al.* (2012) utilizou 24 elementos na discretização da seção transversal e 96 elementos no comprimento do arco, enquanto que nesse trabalho, um resultado muito próximo foi alcançado com uma discretização de 15 e 8 elementos respectivamente, o que gera grande economia computacional e torna esse estudo extremamente importante na análise avançada do arco, visto que, uma das limitações do uso dessa análise, é o tempo computacional gasto.

Analisando as trajetórias de equilíbrio para os arcos estudados, vê-se que são estruturas que perdem estabilidade por ponto limite, na qual a partir de um pequeno acréscimo de carga, podem ocorrer saltos dinâmicos para configurações de equilíbrio cuja concavidade inicial do arco é invertida. Além disso, pode-se concluir que os arcos muito abatidos são extremamente afetados pela não linearidade geométrica, como foi observado na Fig. 12. Nesse caso estudado,

as análises realizadas por Spoorenberg *et al.* (2012) não levavam em consideração a não linearidade geométrica. Já as análises realizadas via CS-ASA e MASTAN2 consideraram essa não-linearidade, e foi possível verificar que os resultados obtidos no CS-ASA são muito mais próximos dos obtidos no MASTAN2 do que dos obtidos na literatura, comprovando a importância da não linearidade geométrica no comportamento do arco. Já para os arcos pouco abatidos, os resultados obtidos no CS-ASA se aproximam bastante da literatura.

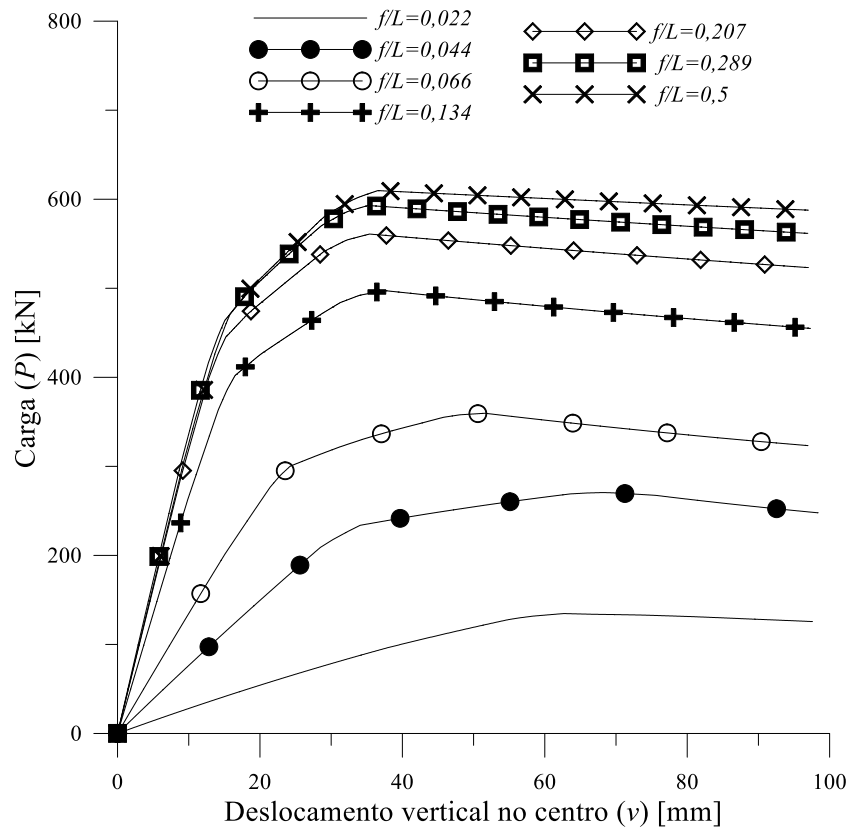


Figura 16. Influência da razão f/L .

Os resultados obtidos mostraram que a carga plástica limite cai rapidamente com a diminuição do ângulo interno (2γ) do arco, ou seja, quanto mais abatido, menor carga o arco suporta antes da formação de rótulas plásticas. Alterando as condições de contorno, esse resultado se mantém, porém, nota-se que arcos biengastados tem carga limite mais alta que os biapoitados, o que é esperado. Ao estudar a relação força normal versus momento fletor na Fig. 14, verifica-se que o esforço normal é dominante e muito maior que o momento fletor que atua internamente no arco. Esse resultado está em total acordo com os obtidos por (Dym e Williams, 2011), visto os arcos são estruturas que trabalham, predominantemente, à esforço de compressão.

Dos exemplos abordados, vê-se que a formulação utilizada é bastante eficiente para se prever o comportamento dos arcos de diferentes seções transversais, condições de bordo e carregamento. A concordância dos resultados obtidos neste trabalho com os da literatura valida as formulações numéricas implementadas no CS-ASA.

Pretende-se expandir o estudo realizado neste artigo introduzindo, adicionalmente, condições de carregamento assimétricas, ligações semirrígidas e carga térmica às análises de estabilidade inelásticas dos arcos abatidos e pouco abatidos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências federais (CAPES e CNPq) e estadual (FAPEMIG), UFOP (através do PROPEC e PROPP) e Fundação Gorceix, o apoio recebido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Battini, J.M., 2002. *Co-rotational beam elements in instability problems*. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology – Department of Mechanics, Stockholm / Sweden.
- Belytschko, T. & Glaum, L. W., 1979. Application of higher order co-rotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Computers and Structures*, vol.10, pp. 175-182.
- Bradford, M.A., Pi, Y.-L., Yang, G. & Fan, X.-C., 2015. Effects of approximations on non-linear in-plane elastic buckling and postbuckling analyses of shallow parabolic arches. *Engineering Structures*, vol. 101, pp 58-67.
- Chan, S.L., 1988. Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 2657-2669.
- Chan, S.L. & Chui, P., 2000. Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections. *Oxford*, Elsevier.
- Chang, C.S. & Hodges, D.H., 2009. Stability studies for curved beams. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 4, n° 7-8, pp. 1257-1270.
- Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.
- Dym, C.L & Williams, H.E., 2011. Stress and Displacement Estimates for Arches. *Journal of Structural Engineering*, vol.137, pp 49-58.
- EC3, 2005. Cen eurocode 3 design of steel structures. vol. part 1. *European Committee for Standardization*.
- Galvão, A.S., 2000. *Formulações Não-lineares de Elementos Finitos para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Guarnier, C.R.F., 2009. *Metodologia de Detalhamento de Estruturas Metálicas*, Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Harrison, H.B., 1982. In-plane stability of parabolic arches. *Journal of the Structural Division, ASCE*, vol. 108, pp 195–205.

- Heyman, J., 1995. *Stone skeleton: Structural engineering of masonry architecture*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Hsiao, K.M., Horng, H.J. & Chen, Y.R., 1987. A co-rotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Computers & Structures*, vol. 27 n° 6, pp. 769-781.
- Kim, S-E & Chen, W-F 1996. Practical advanced analysis for braced steel frame design. *Journal of Structural Engineering*, vol.122, pp 1266-1274.
- King, W.S., White, D.W. & Chen, W.F., 1992. On second-order inelastic analysis methods for steel frame design. *Journal of Structural Engineering ASCE*, vol. 118(2), pp. 408– 428.
- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Lemes, Í.J.M., Silveira, R.A.M., Silva, A.R.D. & Rocha, P.A.S., 2017. Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, vol. 147, pp. 12-26.
- Levy, M. (2006), The Arch: Born in the Sewer, Raised to the Heavens. *Nexus Network Journal*, vol. 8, pp 7-11.
- Liew, J.Y.R., White, D.W. & Chen, W.F., 1993a. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3196-3216.
- Liew, J.Y.R., White, D.W. & Chen, W.F., 1993b. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3217-3237.
- Mathur, K., 2011. *Effects of residual stresses and initial imperfections on Earthquake response of steel moment frames*. Thesis, Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America.
- Maximiano, D. P., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Pi, Y.-L., Bradford, M.A. & Uy, B., 2002. In-plane stability of arches. *International Journal of Solids & Structures*, vol. 39, pp 105-125
- Pi, Y.-L. & Bradford, M.A., 2013. Nonlinear elastic analysis and buckling of pinned–fixed arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 68, pp 77-94.
- Pi, Y.-L. & Bradford, M.A., 2014. Multiple unstable equilibrium branches and non-linear dynamic buckling of shallow arches. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 60, pp 33-45.
- Pi, Y.-L. & Trahair, N. S., 1996. *Journal of Structural Engineering*, vol.122, pp 734-747
- Santana, M.V.B., 2015. *Desenvolvimento de sistema computacional via MATLAB/GUI para análise geometricamente não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.

Silva, J.L., 2016. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.

Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.

Spoorenberg, R.C., Snijder, H.H. & Hoenderkamp, J.C.D., 2012. A theoretical method for calculating the collapse load of steel circular arches. *Engineering Structures*, vol. 38, pp. 89-103

Yang, Y.B. & Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.

Ziemian RD, 2010. *Guide to stability design criteria for metal structures*, 6th Edition, Structural Stability Research Council, Wiley.