



ANÁLISE INELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM DE ESTRUTURAS COM SEÇÕES TRANSVERSAIS DUPLAMENTE SIMÉTRICAS

Jéssica L. Silva

Ígor J. M. Lemes

Ricardo A. M. Silveira

Andréa R. D. Silva

jessicalorrany@hotmail.com

igorjml@hotmail.com

ramsilveira@yahoo.com.br

andreadiassilva@yahoo.com.br

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

Abstract. *Propõe-se neste trabalho a realização de análises numéricas avançadas não lineares de colunas e pórticos planos em aço. Vale enfatizar a adoção do referencial corrotacional nas formulações não lineares geométricas de elementos finitos, que é baseado na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais. Nessa abordagem corrotacional, apenas os movimentos que causam deformações estão presentes, e assim é permitido as medidas das deformações lineares, sem perda de precisão. Com relação à não linearidade do material, deve-se utilizar uma metodologia baseada no Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) para determinação da capacidade resistente dos elementos estruturais, onde as relações constitutivas são usadas de forma explícita. O MCD será acoplado ao Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR), em que a plasticidade é avaliada em termos nodais através dos parâmetros generalizados de rigidez. Esse acoplamento visa a obtenção de uma boa precisão e agilidade nas análises numéricas de estruturas de aço. Trata-se na realidade de uma extensão de trabalhos anteriores dos autores, onde agora atenção especial será dada à avaliação numérica do comportamento de estruturas com membros de seção transversal I fletidos em torno do eixo de menor inércia. Estudos serão também realizados considerando membros estruturais com seções transversais quaisquer. As análises avançadas serão validadas através da comparação com respostas experimentais e numéricas presentes na literatura.*

Keywords: *Colunas e pórticos em aço, Método da Compatibilidade de Deformações, Método da Rótula Plástica Refinado, Referencial Corrotacional, Eixo de Menor Inércia*

1 INTRODUÇÃO

Na elaboração do projeto estrutural busca-se dimensionar os elementos atendendo as condições de segurança e de utilização previstas para a construção. Esse dimensionamento é feito com base nas respostas obtidas na análise estrutural, na qual são determinados os esforços internos, deslocamentos, tensões e deformações da estrutura sob determinadas condições de contorno e carregamento (Gonçalves, 2013). Para prever o comportamento da estrutura de maneira precisa, é necessária uma boa interação entre as etapas de análise e projeto. Nesse campo, destaca-se a análise avançada, que pode ser definida como um método capaz de avaliar simultaneamente a resistência e a estabilidade da estrutura, sem a necessidade da verificação individual da capacidade dos membros (Chen e Toma, 1994).

A concepção de projetos estruturais utilizando análises avançadas, que tem o objetivo de avaliar o comportamento real da estrutura, deve ser realizado considerando algumas fontes de não linearidade. Para tal propósito empregam-se recursos computacionais avançados e são utilizadas formulações numéricas adequadas para simular o comportamento não linear de uma estrutura.

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) se destaca como uma ferramenta eficiente na simulação numérica de problemas estruturais. Já consolidado na análise avançada de estruturas de aço, o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva, 2009) utiliza formulações do MEF baseadas no Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR). Dentre os diversos métodos capazes de realizar a análise avançada, o MRPR pode ser destacado com um dos mais eficientes (King *et al.*, 1992; Liew *et al.*, 1993; Chan e Chui, 2000). Baseado na teoria da plasticidade concentrada, esse método tem se mostrado prático e preciso na avaliação do comportamento inelástico até o colapso da estrutura.

O comportamento não linear na relação tensão-deformação dificulta a definição das rigidezes dos elementos à medida que as deformações variam. Para contornar esse problema, é utilizado aqui o Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), e que possibilita análises mais realistas ante as prescrições normativas. O MCD será utilizado aqui tanto na avaliação da capacidade resistente da seção transversal do elemento estrutural, quanto na determinação das suas rigidezes axial e à flexão.

Na consideração da não linearidade geométrica, vale enfatizar a adoção do Referencial Corrotacional (RCR), que é baseado na separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e deformacionais, e na utilização de funções de interpolação consistentes com a teoria de deformação não linear.

O método de Newton-Raphson será aplicado tanto na solução do sistema de equações de equilíbrio não lineares como na definição da relação momento-curvatura. Como já mencionado, o CS-ASA será a base computacional utilizada neste trabalho, que foi inicialmente desenvolvido para análise não linear estática e dinâmica de estruturas metálicas (Silva, 2009). E mais recentemente, Lemes (2015) introduziu a possibilidade da análise avançada estática de estruturas mistas.

O presente trabalho está organizado em mais 4 seções. Na Seção 2 é apresentado a formulação geométrica não linear do elemento finito, onde apresenta-se a sua matriz de rigidez. Mais adiante, na Seção 3, a formulação numérica inelástica baseada no MRPR (Silva, 2009; Gonçalves, 2013) é detalhada, incluindo também o MCD. São simulados alguns exemplos para

validação da metodologia proposta no item 4. Por fim, alguns aspectos importantes observados nos exemplos estudados são levantados na Seção 5.

2 FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR

Formulações numéricas desenvolvidas ao longo dos últimos anos com o objetivo de incluir a não linearidade geométrica na análise, juntamente com estratégias de solução não linear eficientes, impulsionam a procura de respostas que retratam o comportamento real das estruturas.

A não linearidade geométrica surge devido a modificações da geometria da estrutura que aparecem ao longo do processo de carregamento e deformação do corpo. Segundo Silva (2009), deslocamentos relativamente grandes causam deflexão lateral de membros da estrutura, e como consequência ocorre o aparecimento de momentos fletores adicionais, em virtude da presença de um esforço normal. Esse tipo de comportamento pode ser também chamado de efeitos de segunda ordem, e é responsável por considerar os efeitos $P-\Delta$ (global) e $P-\delta$ (local, a nível de elemento), que são os efeitos oriundos das deformações da estrutura à medida que é carregada.

2.1 Referencial Corrotacional (RCR)

Para a consideração dos efeitos geométricos não lineares, o RCR será utilizado para descrever o movimento dos corpos sólidos, que segundo Hsiao *et al.* (1987), Battini (2002) e Santana (2015), pode ser adaptado tanto às formulações com o Referencial Lagrangiano Total (RLT) quanto aquelas que adotam o Referencial Lagrangiano Atualizado (RLA). De acordo com Battini (2002), a aproximação corrotacional é vista como um caminho alternativo para uma análise eficiente de elementos finitos não lineares. A principal ideia, nesse contexto, é a decomposição do movimento do elemento em duas parcelas: uma associada ao movimento de corpo rígido do elemento e a outra parte associada a deformação pura. A movimentação do elemento é medida através do uso do sistema de coordenadas locais (X, Y), onde essas coordenadas terão uma contínua rotação e translação em conjunto com o elemento (Fig. 1). A mudança do elemento da configuração indeformada original para uma configuração deformada atual pode então ser dividida em dois passos: o primeiro é o movimento de corpo rígido incluindo rotação e translação do elemento, e o segundo passo consiste na deformação relativa em um sistema de coordenadas locais que produz energia.

É necessário obter a relação entre o sistema de coordenada local e global para as devidas atualizações nas análises dos sistemas estruturais. As relações cinemáticas e a notação adotada estão na Fig. 1, e o vetor de deslocamentos do elemento é definido por:

$$\mathbf{u}_g = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T \quad (1)$$

Já o vetor de deslocamentos naturais nodais no sistema local é dado por:

$$\mathbf{u}_l = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{\theta}_j]^T \quad (2)$$

As componentes do vetor de deslocamento naturais podem ser expressas baseadas em termos dos deslocamentos no sistema de referência global, conforme:

$$\bar{u} = l_f - l \quad (3a)$$

$$\bar{\theta}_i = \theta_i - \alpha \quad (3b)$$

$$\bar{\theta}_j = \theta_j - \alpha \quad (3c)$$

sendo l_f o valor do comprimento atualizado, l o valor do comprimento inicial do elemento e α a rotação de corpo rígido.

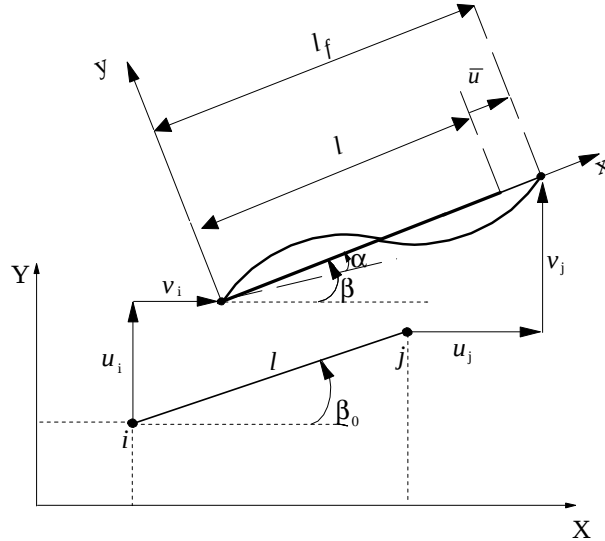


Figura 1. Relação entre sistema local e global

A rotação de corpo rígido, α , pode ser expressa como o incremento de rotação entre a orientação atual e inicial, ou seja:

$$\alpha = \beta - \beta_0 = \arctan \left[\frac{(y_j + v_j - y_i - v_i)}{(x_j + u_j - x_i - u_i)} + \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)} \right] \quad (4)$$

em que β representa o valor do ângulo de orientação do elemento (ângulo entre o eixo axial local e o eixo horizontal global), de modo que na configuração inicial o mesmo é dado por β_0 .

Os deslocamentos naturais virtuais podem ser obtidos através da diferenciação parcial das Eqs. (3a), (3b) e (3c), isto é:

$$\delta \bar{u} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (5)$$

$$\delta \bar{\theta}_i = \delta \theta_i - \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta \mathbf{u}_g \quad (6)$$

$$\delta\bar{\theta}_j = \delta\theta_j - \frac{1}{l_f} [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0] \delta\mathbf{u}_g \quad (7)$$

que são organizados de acordo com:

$$\delta\mathbf{u}_l = \mathbf{B} \delta\mathbf{u}_g \quad (8)$$

sendo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 1 & s/l_f & -c/l_f & 0 \\ -s/l_f & c/l_f & 0 & s/l_f & -c/l_f & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

A relação entre o vetor de forças internas local, $\mathbf{f}_l$, e o global, $\mathbf{f}_g$, é obtida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), ou seja:

$$\delta V = \delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \delta\mathbf{u}_l^T \mathbf{f}_l = \delta\mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (10)$$

Com o emprego da equação anterior, tem-se que a relação entre as forças internas no sistema de referência global e o sistema local é dada por:

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l \quad (11)$$

em que o vetor de forças internas local é $\mathbf{f}_l = [N \ M_i \ M_j]$, onde N , M_i e M_j são as forças internas axial e momentos fletores, respectivamente.

A matriz de rigidez tangente global, $\mathbf{K}_g$, pode ser definida através da diferenciação das forças internas globais em relação aos deslocamentos globais, conforme:

$$\mathbf{K}_g = \frac{\delta\mathbf{f}_g}{\delta\mathbf{u}_g} \quad (12)$$

Assim, fazendo a diferenciação da Eq. (11) em relação aos deslocamentos globais, tem-se:

$$\delta\mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \delta\mathbf{f}_l + N \delta\mathbf{b}_1 + M_i \delta\mathbf{b}_2 + M_j \delta\mathbf{b}_3 \quad (13)$$

em que:

$$\mathbf{b}_1 = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (14a)$$

$$\mathbf{b}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T - \frac{\mathbf{z}}{l_f} \quad (14b)$$

$$\mathbf{b}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T - \frac{\mathbf{z}}{l_f} \quad (14c)$$

São introduzidas as seguintes notações:

$$\mathbf{r} = [-c \ -s \ 0 \ c \ s \ 0]^T \quad (15a)$$

$$\mathbf{z} = [s \ -c \ 0 \ -s \ c \ 0]^T \quad (15b)$$

onde:

$$c = \cos(\beta) = \frac{1}{l_f} (x_j + u_j - x_i - u_i) \quad (16a)$$

$$s = \sin(\beta) = \frac{1}{l_f} (y_j + v_j - y_i - v_i) \quad (16b)$$

Fazendo agora a derivação da Eq. (14a) e (14b), chega-se à:

$$\delta \mathbf{b}_1 = \delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{z} \mathbf{z}^T}{l_f} \delta \mathbf{u}_g \quad (17a)$$

$$\delta \mathbf{b}_2 = \delta \mathbf{b}_3 = -\frac{\delta \mathbf{z}}{l_f} + \frac{\mathbf{z} \delta l_f}{l_f^2} = \frac{1}{l_f^2} [\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T] \delta \mathbf{u}_g \quad (17b)$$

O primeiro termo da Eq. (13) pode ser computado através da relação de equilíbrio local do elemento, isto é:

$$\delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \delta \mathbf{u}_l = \mathbf{K}_l \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_g \quad (18)$$

em que $\mathbf{K}_l$ é a matriz de rigidez no sistema de referência local, onde será adotado a teoria de viga de Euler-Bernoulli. A não linearidade física será incorporada na matriz $\mathbf{K}_l$, detalhada mais adiante.

Finalmente, da Eq. (12) e usando as relações anteriores, chega-se na expressão da matriz de rigidez tangente global do elemento:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B} + \frac{\mathbf{z} \mathbf{z}^T}{l_f} N + \frac{1}{l_f^2} [\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T] (M_i + M_j) \quad (19)$$

As Equações (11) e (19) apresentam a relação entre os valores locais e globais das forças internas e matriz de rigidez tangente, respectivamente. O primeiro termo da Eq. (19) caracteriza a matriz de rigidez inelástica e os últimos três termos representam a matriz de rigidez

geométrica, onde é levado em conta os efeitos de segunda ordem do sistema estrutural. As forças internas do elemento, a matriz de rigidez e a matriz de transformação, $\mathbf{B}$, devem ser atualizadas constantemente durante todo o processo de resolução do sistema (Método de Newton-Raphson), tanto no processo incremental, quanto no processo iterativo.

2.2 Matriz de Rigidez (K_I)

No MEF tradicional baseado em deslocamento, as funções de interpolações são obtidas considerando os graus de liberdade nodais do elemento. A utilização dessas funções de interpolações de deslocamento, que são de baixa ordem, pode apresentar um aumento de rigidez espúria no elemento viga-coluna. Como consequência, quando o elemento estiver sujeito a grandes deformações, pode acontecer o efeito de travamento de membrana, conhecido como “*membrane locking*”. Diferentes estratégias podem ser usadas para eliminar esse travamento, como a integração reduzida e o emprego de uma ordem mais elevada nas funções de interpolação. Esses procedimentos, entretanto, apresentam bons resultados quando geralmente é utilizado um número grande de elementos na modelagem do sistema estrutural.

Um novo elemento de viga-coluna não linear foi então proposto por Tang *et al.* (2015). Com o objetivo de eliminar o “*membrane locking*”, esses pesquisadores usaram as equações diferenciais de equilíbrio de forças para obter as funções de interpolação e um estado de deformação consistente.

Para se estabelecer uma função de interpolação consistente para a componente de deslocamento axial, considera-se inicialmente que a deformação axial seja constante em todo o elemento, de modo que:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad (20)$$

Assume-se então que o deslocamento axial pode ser dividido em um deslocamento puramente extensional, u_a , e um deslocamento induzido pela flexão, u_b , como:

$$u = u_a + u_b \quad (21)$$

sendo:

$$u_a = \frac{x}{l} \bar{u} \quad (22)$$

Já u_b deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$u_b = 0 \text{ em } x = 0, l \quad (23)$$

Para se definir u_b usando a Eq. (20), considera-se, como já mencionado, que a deformação axial seja constante, isto é:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{du_a}{dx} + \frac{du_b}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \text{Constante} \quad (24)$$

Com a integração da equação anterior, e usando as condições de contorno dadas pela Eq. (23), chega-se a:

$$u_b(x) = \frac{x}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \quad (25)$$

Portanto, as novas funções de interpolações de deslocamento são (se adotada a teoria de viga de Euler-Bernoulli):

$$v(x) = x \bar{\theta}_i - \frac{x^2(2\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)}{l} + \frac{x^3(\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j)}{l^2} \quad (26)$$

$$u(x) = \frac{x}{l} \bar{u} + \frac{x}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx - \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (27)$$

Através dessas novas aproximações para u e v , escreve-se para a deformação axial:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}}{l} + \frac{2\bar{\theta}_i^2 - \bar{\theta}_i \bar{\theta}_j + 2\bar{\theta}_j^2}{30} \quad (28)$$

Considerando a energia potencial de um elemento viga-coluna prismático, com cargas conservativas aplicadas nos pontos nodais, onde a energia interna de deformação pode ser obtida através da introdução da deformação axial e da curvatura, integrando-a ao longo do comprimento da viga, escreve-se:

$$\Pi = U - V = \frac{1}{2} EA \int_0^l \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} EI \int_0^l \kappa^2 dx - \sum \mathbf{f}_{el} \mathbf{u}_l \quad (29)$$

em que U é a energia interna de deformação e V o potencial das cargas externas; EA e EI são, respectivamente, a rigidez axial e à flexão do elemento; e ε e κ são a deformação axial e a curvatura, respectivamente.

Pelo princípio da estacionaridade da energia potencial, considerando que a derivada de U com relação aos deslocamentos locais são as forças internas locais ($\partial U / \partial \mathbf{u}_l = \mathbf{f}_{il}$), tem-se:

$$\delta \Pi = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_{el} \right) \delta \mathbf{u}_l = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_{el} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{f}_{il} - \mathbf{f}_{el} = 0 \quad (30)$$

A derivada de segunda ordem da energia interna de deformação (U) fornece a matriz de rigidez linear do elemento, assim:

$$\mathbf{K}_{lij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}_i^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_{li}}{\partial \mathbf{u}_{lj}} \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 3 \quad (31)$$

Através da expressão anterior, obtém-se as componentes da matriz de rigidez tangente local do elemento, isto é:

$$K_{h_{11}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{l} \quad (32a)$$

$$K_{h_{12}} = K_{l_{21}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (4\bar{\theta}_i - \bar{\theta}_j) \quad (32b)$$

$$K_{h_{13}} = K_{l_{31}} = \frac{\partial N}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{u}} = \frac{EA}{30} (-\bar{\theta}_i + 4\bar{\theta}_j) \quad (32c)$$

$$K_{l_{22}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{900} (24\bar{\theta}_i^2 - 12\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 9\bar{\theta}_j^2) \quad (32d)$$

$$K_{l_{23}} = K_{l_{32}} = \frac{\partial M_i}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_i} = \frac{2EI}{l} + \frac{EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{450} (-3\bar{\theta}_i^2 + 9\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j - 3\bar{\theta}_j^2) \quad (32e)$$

$$K_{l_{33}} = \frac{\partial M_j}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EA\bar{u}}{30} + \frac{EAl}{900} (9\bar{\theta}_i^2 - 12\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j + 24\bar{\theta}_j^2) \quad (32f)$$

3 FORMULAÇÃO FÍSICAMENTE NÃO LINEAR

No contexto do MEF, duas abordagens são usualmente empregadas na simulação da não linearidade física em sistemas estruturais retilíneos. São elas: o método da zona plástica (MZP) e o método da rótula plástica (MRP).

No MZP, os efeitos da plasticidade são considerados ao longo do comprimento do elemento (plasticidade distribuída). Chen e Kim (1997) definem o MZP como "exato". Nessa abordagem, as tensões residuais são consideradas explicitamente na análise. Porém, o MZP requer um esforço computacional bastante elevado.

Para se obter resultados numéricos de forma mais eficiente computacionalmente, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) surge como alternativa. No MRPR, a plasticidade é avaliada apenas nos pontos nodais do modelo estrutural. Neste trabalho, o MRPR será acoplado ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD). Esse último será usado na avaliação da capacidade resistente da seção transversal e das rigidezes axial e à flexão do elemento finito (Caldas, 2004; Chiorean, 2013).

3.1 Método da Compatibilidade das Deformações (MCD)

Ao submeter um elemento estrutural a esforços externos, este se deforma gerando forças internas para equilibrar o sistema. Essa deformação, a nível da seção transversal, é abordada no MCD. Supõe-se que o campo de deformações é linear, e que a seção permanece plana após a deformação, como ilustrado na Fig. 2 (Lemes *et al.*, 2017).

Para fazer a análise da condição deformada da seção transversal e obter a capacidade resistente e sua rigidez, uma discretização da seção é feita. Será realizado uma discretização em fibras, onde as tensões residuais serão introduzidas explicitamente no perfil metálico.

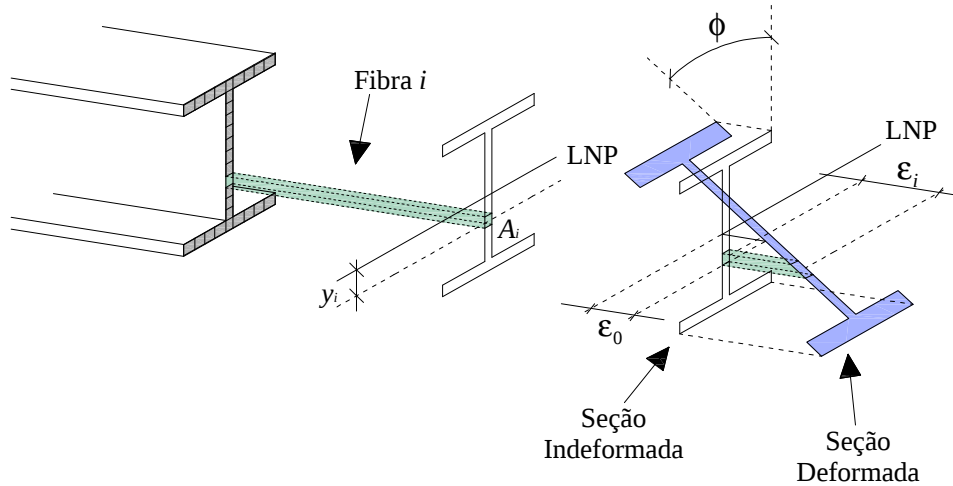


Figura 2. Campo linear de deformações sem curvatura no eixo y

3.2 Relação Constitutiva

O comportamento estrutural dos materiais é descrito através das respectivas relações constitutivas. O comportamento do aço será descrito através do modelo constitutivo trilinear, com possibilidade de consideração do encruamento do material, como ilustrado na Fig. 3. Uma característica do aço dos perfis é a isotropia, ou seja, seu comportamento à tração é igual ao de compressão. Assim, na Fig. 3 é mostrado apenas o trecho referente ao primeiro quadrante da relação constitutiva.

Deve-se ressaltar que após o processo de fabricação, o elemento de aço sofre um resfriamento desigual originando as tensões residuais. Assim, considera-se que ocorram deformações prescritas na seção. Neste trabalho, a distribuição das tensões residuais, σ_r , segue o modelo ilustrado na Fig. 4a para perfis I, que é fornecido pelo Eurocode 3 (2005). No caso de seções tubulares retangulares, faz-se uma adaptação da distribuição utilizada por Mathur (2011), que se baseou em Salmon *et al.* (2009). Descreve-se então o comportamento do aço da seguinte forma (Lemes *et al.*, 2017):

$$\sigma = \begin{cases} \text{sgn}(\varepsilon) f_2 + E_{s3} [\varepsilon - \text{sgn}(\varepsilon) \varepsilon_2], & \text{if } \varepsilon_2 \geq |\varepsilon| > \varepsilon_u \\ \text{sgn}(\varepsilon) f_y + E_{s2} [\varepsilon - \text{sgn}(\varepsilon) \varepsilon_y], & \text{if } \varepsilon_y \geq |\varepsilon| > \varepsilon_2 \\ E_a \varepsilon, & \text{if } -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \end{cases} \quad (33)$$

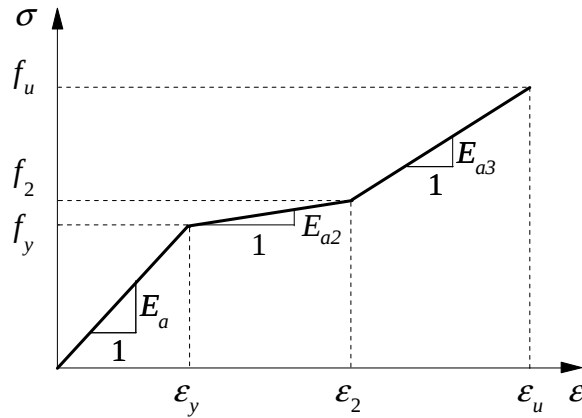


Figura 3. Relação tensão-deformação aço dos perfis

em que f_y , f_2 , f_u , ε_y , ε_2 e ε_u , são, respectivamente, as tensões e deformações que delimitam os trechos lineares da relação constitutiva, já os parâmetros E_a , E_{a2} e E_{a3} são os módulos de elasticidade. Vale ressaltar que ε_y é determinado pela relação entre f_y e E_a , e ε_2 é tomado igual a $10\varepsilon_y$.

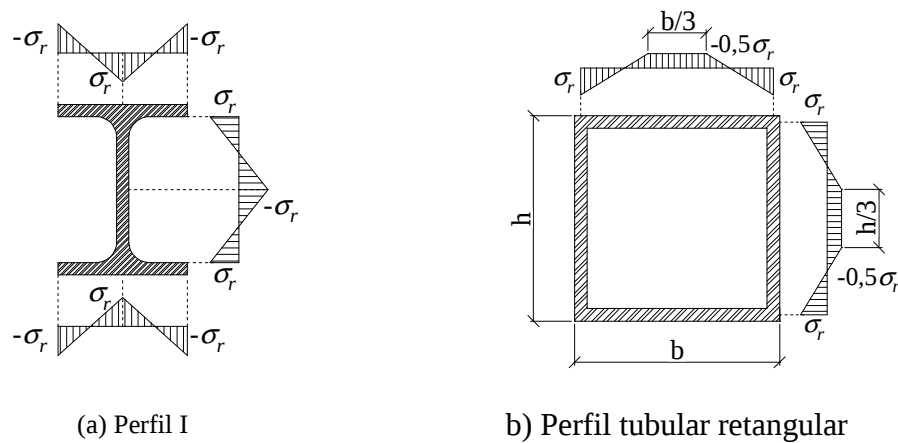


Figura 4. Distribuição das tensões residuais

3.3 Relação Momento-Curvatura

Para obtenção da relação momento-curvatura optou-se por utilizar o método de Newton-Raphson. Para um valor fixo de esforço axial, N , são dados incrementos no momento fletor solicitante, M , até que o momento último resistente seja atingido. O propósito dessa divisão é captar a deformação axial, ε , no centroide plástico CP de cada fibra e então, através das relações constitutivas dos materiais, obter as respectivas tensões, σ_i , e os módulos de elasticidade tangentes em cada fibra.

Para descrever a distribuição de deformações, a discretização da seção em fibras é bastante eficiente. Assim, a deformação axial na i -ésima fibra, ε_i , é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \varepsilon_{ri} + \phi y_i \quad (34)$$

em que y_i é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, ε_0 é a deformação axial no CP da seção, ε_r é a deformação devido às tensões residuais, e ϕ a respectiva curvatura.

Para a notação matricial adotada a seguir, as variáveis ε_0 e ϕ serão posições do vetor de deformações $\mathbf{X} = [\varepsilon_0 \quad \phi]^T$. Numericamente, pode-se dizer que o equilíbrio da seção é obtido quando a seguinte equação é satisfeita:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} N_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{int} \\ M_{int} \end{bmatrix} \cong \mathbf{0} \quad (35)$$

em que o vetor de forças externas $\mathbf{f}_{ext}$ é dado pelo esforço axial, N_{ext} , e pelo momento fletor, M_{ext} . Os esforços internos são obtidos a partir da configuração deformada da seção transversal através de integrais clássicas, sendo os termos N_{int} e M_{int} os esforços internos normal e momento fletor, respectivamente.

Assim, para a iteração seguinte, $k+1$, o vetor de deformações é calculado como:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \mathbf{F}'(\mathbf{X}^k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (36)$$

na qual $\mathbf{F}$ é a matriz Jacobiana do problema não linear expresso na Eq. (35), isto é:

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (37)$$

O critério de convergência adotado neste trabalho é baseado na razão das normas Euclidianas do vetor de forças desequilibradas, $\mathbf{F}$, e do vetor de forças externas, $\mathbf{f}_{ext}$. Assim, escreve-se:

$$\frac{\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{f}_{ext}\|} \leq Tol \quad (38)$$

com Tol sendo uma dada tolerância, que é assumida aqui 10^{-5} .

O processo iterativo descrito nessa seção, para um dado valor de esforço externo, é ilustrado na Fig. 5.

3.4 Rigidezes Generalizadas e Curva NM

Uma vez satisfeito o critério de convergência de forças (Eq. 38), buscam-se os parâmetros de rigidezes generalizadas. Nesse ponto pode-se obter a configuração deformada da seção transversal. Por sua vez, as deformações nas fibras são utilizadas para o cálculo da matriz Jacobiana no ponto em questão, como ilustrado na Fig. 6, e os termos EA_t e EI_t são descritos da seguinte forma:

$$EA_t = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}} \quad EI_t = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} \quad (39, 40)$$

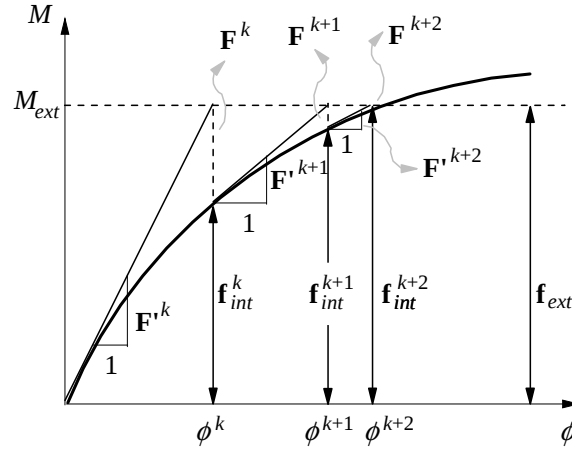


Figura 5. Relação momento-curvatura: ciclo iterativo

Quando, para um dado esforço axial, é atingido o momento máximo da relação momento-curvatura, tem-se a plastificação total da seção. Define-se então que esse par de esforços é um ponto da curva de interação NM (Fig. 7).

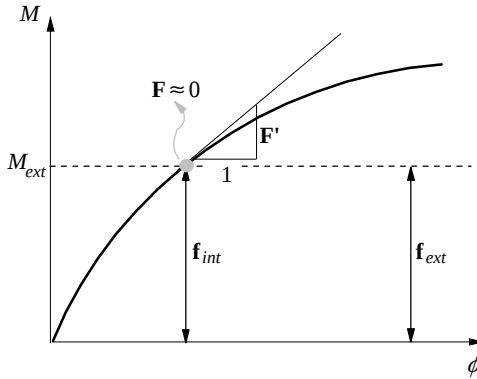


Figura 6. Construção da matriz Jacobiana no ponto de equilíbrio

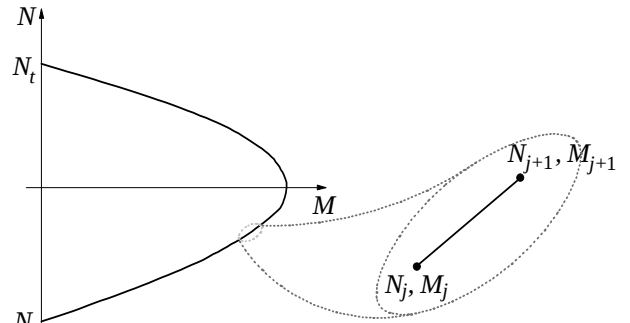


Figura 7. Conjunto de pontos NM para curva de interação

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Devido a generalidade da formulação apresentada é possível a realização da análise estrutural de elementos com diferentes seções transversais e considerando a flexão em torno do eixo de menor inércia nos perfis metálicos I. A mesma será testada nesta seção, com a análise de alguns problemas clássicos apresentados na literatura, tanto no âmbito numérico quanto experimental. Os exemplos aqui abordados são: o pórtico de Vogel de seis andares, um pilar

com a flexão em torno do eixo de menor inércia e, por fim, um pilar com a seção transversal retangular vazada.

4.1 Pórtico de Vogel

O pórtico analisado nessa seção está ilustrado na Fig. 8. A geometria, os perfis (I ou H), o carregamento e a malha de elementos finitos utilizada são mostrados nessa mesma figura. Todas as cargas atuantes são incrementais. A estrutura apresenta uma imperfeição global igual a $\Delta = 1/450$. O aço dos perfis apresenta tensão de escoamento igual a 235 MPa e módulo de elasticidade tomado como 205 GPa na fase elástica. O modelo de tensões residuais utilizado é o mesmo proposto pelo Eurocode 3 (Fig. 4a).

O pórtico já foi estudado por Vogel (1985) considerando os efeitos da plasticidade de forma distribuída. Posteriormente, vários autores também analisaram essa estrutura, dentre eles: Ziemian (1993), Barsan and Chiorean (1999), Chan e Chui (2000) e Machado (2005).

A Figura 9 traz a trajetória de equilíbrio do pórtico, onde se observa a boa concordância entre os resultados obtidos via CS-ASA e os encontrados na literatura (Vogel, 1985; Chan e Chui, 2000). Vogel (1985) considerou a plasticidade de forma distribuída no elemento (MZP), já Chan e Chui (2000) simulou a inelasticidade do aço através de molas fictícias nas extremidades do elemento finito, e ainda, considerou uma imperfeição geométrica inicial maior que a utilizada no presente trabalho, $\Delta = 1/300$. No início do trecho não linear da trajetória de equilíbrio (Fig. 9) pode-se observar uma pequena diferença nos resultados apresentados, que pode ser explicada devido a variação da rigidez à flexão obtida via MCD e por molas fictícias. Quando a curva carga deslocamento aproxima-se do valor da carga limite as mesmas se aproximam novamente.

4.2 Pilar Engastado-Livre: Flexão em Torno do Eixo de Menor Inércia

Geralmente, nos projetos estruturais, a flexão em torno do eixo de menor inércia está relacionada com os pilares da estrutura. O conhecimento do comportamento deste membro estrutural nessa situação é de fundamental importância. Este exemplo tem como objetivo validar a estratégia proposta neste trabalho através da análise inelástica de um pilar engastado livre que atua de maneira isolada, sendo a seção transversal um perfil laminado I.

O pilar engastado-livre está submetida a uma carga vertical permanente P , e uma carga horizontal incremental, H . A carga H está aplicada no plano da seção transversal, perpendicularmente ao eixo de menor inércia, conforme ilustra a Fig. 10. Esse exemplo também foi estudado por Zubyan (2011) para validar suas formulações numéricas. Na Figura 10 são mostrados também os dados referentes ao material e à geometria do pilar, além da discretização em elementos finitos. Investigou-se o comportamento do pilar para três níveis do carregamento permanente P : 20%, 40% e 60% da carga axial de escoamento, P_y .

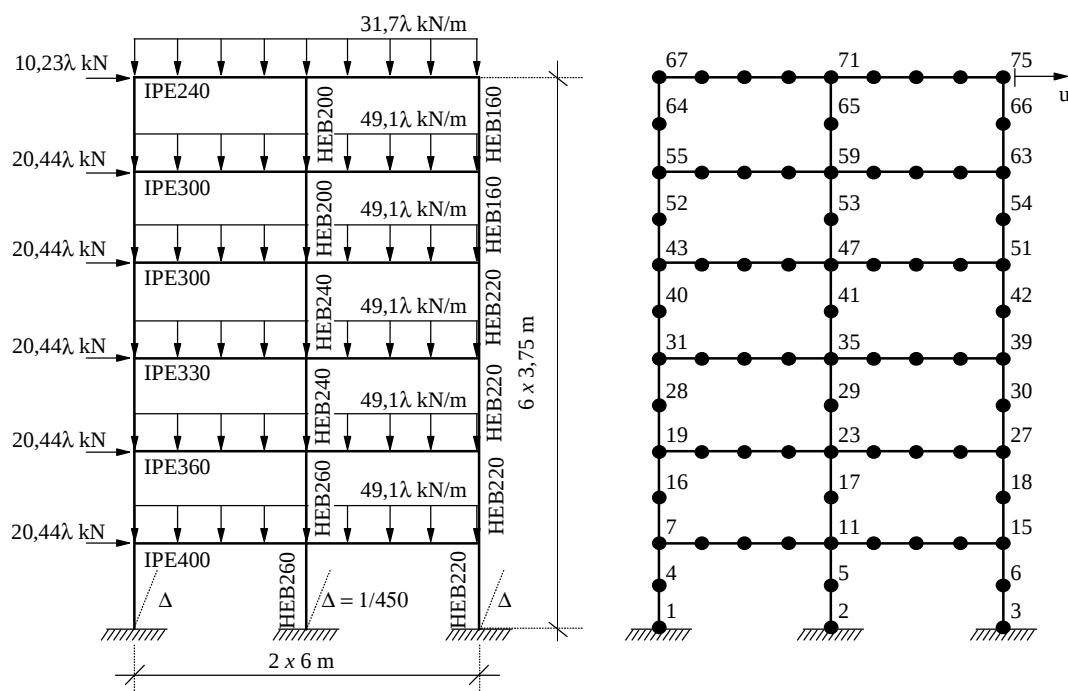


Figura 8. Pórtico de 6 andares: geometria, carregamentos e discretização adotada

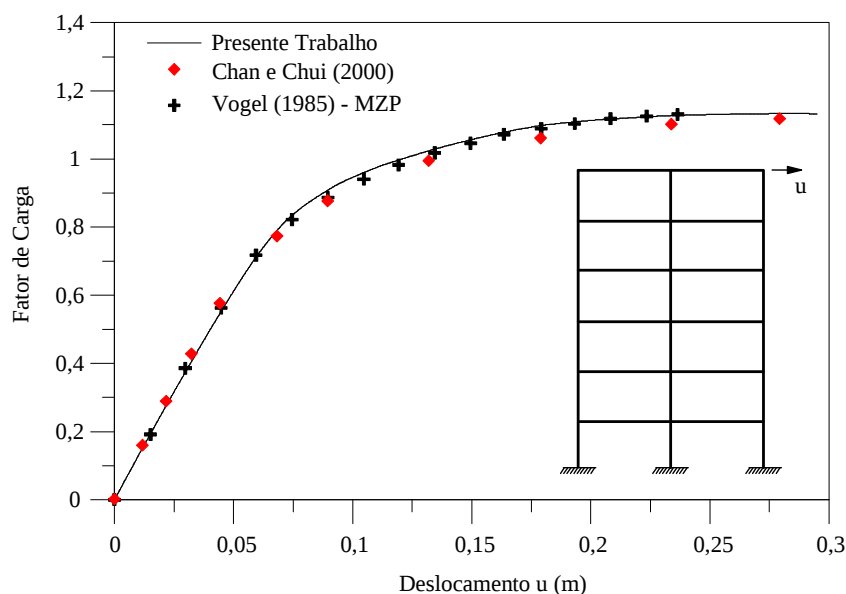


Figura 9. Trajetória de equilíbrio: pórtico de 6 andares

Através do controle do deslocamento horizontal u no topo da coluna chegou-se nas trajetórias de equilíbrio ilustradas na Fig. 11. Para validar os resultados encontrados plotou-se os valores obtidos por Zubyan (2011), que analisou a não linearidade física de forma distribuída com o MZP. Observa-se que para os três níveis de carregamento aplicado os resultados são coincidentes, comprovando a eficiência da formulação usada.

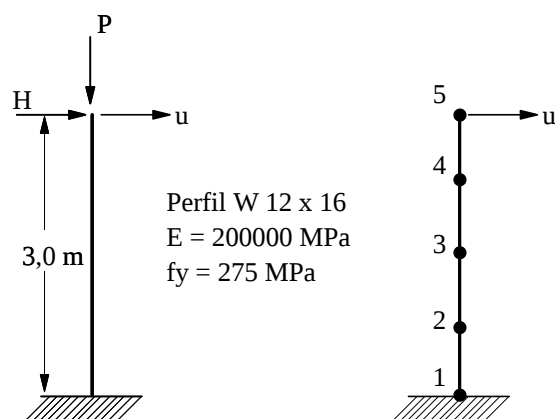


Figura 10. Pilar engastado-livre e sua discretização em elementos finitos

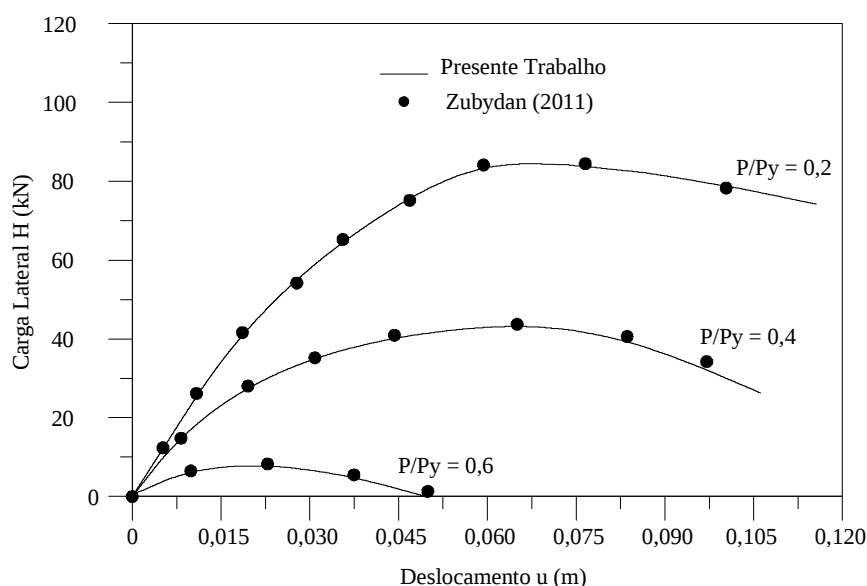


Figura 11. Trajetória de equilíbrio do pilar engastado-livre

Na sequência, faz-se um estudo do índice de degradação da seção transversal (plastificação) da coluna nos pontos nodais do modelo para as 3 relações de carregamento consideradas. Esses resultados são apresentados na Fig. 12. Os valores dos índices de degradação foram captados ao final de cada análise, ou seja, quando o deslocamento atingiu para a carga de $P/P_y = 0,2$ o valor de $u = 0,115 \text{ m}$, para $P/P_y = 0,4$ o deslocamento de $u = 0,106 \text{ m}$ e para $P/P_y = 0,6$ o valor de $u = 0,049 \text{ m}$.

4.3 Pilar com Seção Tubular Vazada e Aço de Alta Resistência

O último exemplo aborda, como ilustrado na Fig.13, um pilar biapoado de seção transversal tubular retangular vazado (caixa) com aço de alta resistência, submetido a uma carga axial. Essa estrutura foi testada experimentalmente por Wang *et al.* (2014) e analisada numericamente por Li *et al.* (2015). A geometria e as dimensões do pilar-caixa são apresentadas na Fig. 13. A tensão de escoamento foi tomada como 505,8 MPa e o módulo de elasticidade como 207,8 GPa. As imperfeições geométricas utilizadas foram retiradas de Wang *et al.* (2014),

que considerou uma pequena carga excêntrica nas extremidades ($M = 0.019 P$) e uma curvatura inicial de 3 mm. O modelo de tensões residuais utilizado é uma adaptação da distribuição utilizada por Mathur (2011), que usou a proposta de Salmon *et al.* (2009), como apresentado em Fig. 4 (b).

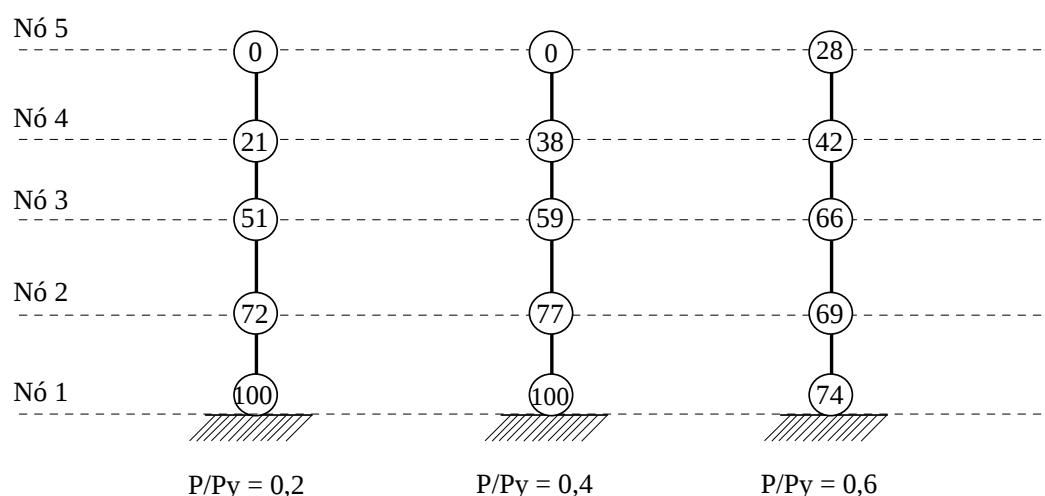


Figura 12. Relação $EIt/EIt,i$ (%) nos pontos nodais

A Figura 14 ilustra a trajetória de equilíbrio obtida via CS-ASA e os resultados do teste de Wang *et al.* (2014). A capacidade final do pilar obtida através da abordagem numérica proposta foi 2702 kN, que é relativamente próxima do valor experimental de 2591 kN.

Na Figura 15 é destacada a curva de interação esforço normal-momento fletor (NM) para a seção transversal tubular retangular vazada da coluna, bem como os valores retirados de Li *et al.* (2015). Percebe-se, mais uma vez, uma boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura. Nesta mesma figura pode ser vista a variação das forças internas dentro do domínio resistente até se atingir a plastificação total da seção.

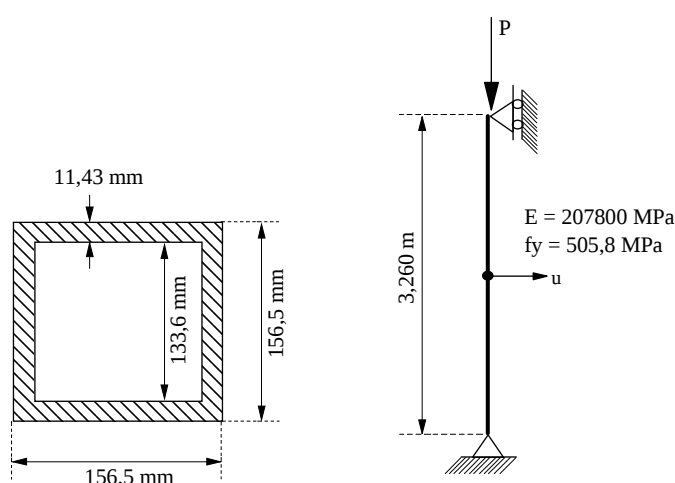


Figura 13. Pilar biapoiado com seção transversal tubular vazada

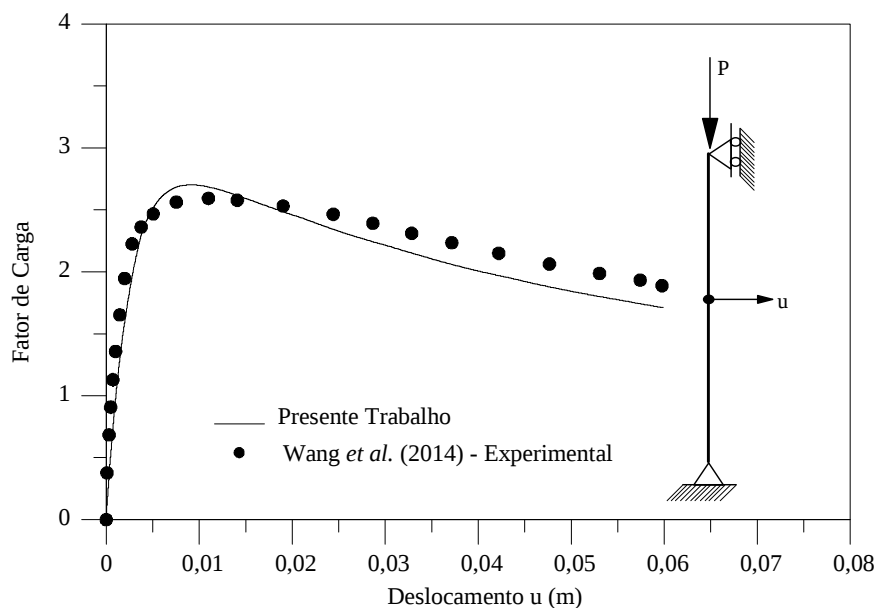


Figura 14. Trajetória de equilíbrio do pilar biapoado

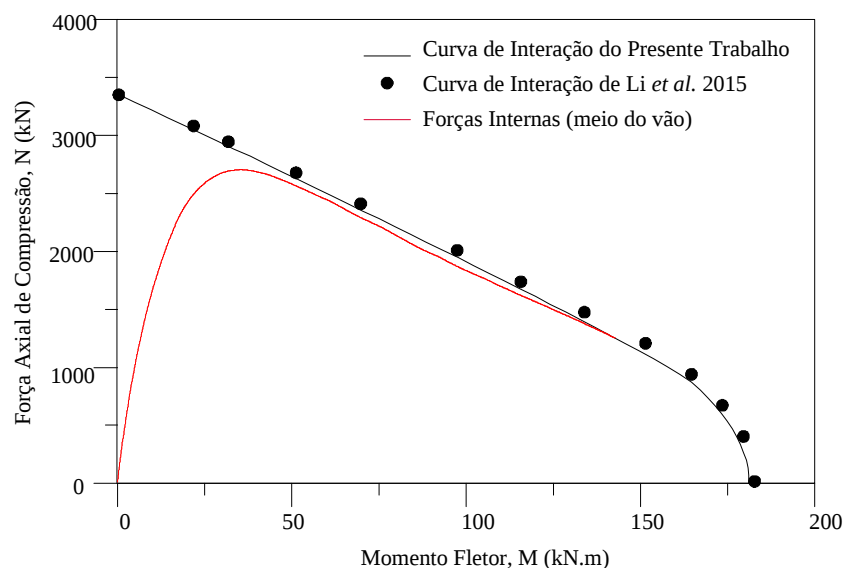


Figura 15. Curva de interação esforço NM fletor e forças internas no meio do vão

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia numérica generalizada para análise inelástica de segunda ordem de estruturas metálicas. Essa metodologia empregou o MCD, que foi usado na avaliação da capacidade resistente e das rigidezes axial e à flexão de estruturas de aço, e acoplado ao MRPR para simulação da plasticidade de forma concentrada. A não linearidade geométrica foi considerada através de uma formulação corrotacional (RCR) que utilizou funções de interpolação consistentes com a teoria de deformação não linear.

Nos exemplos apresentados, vê-se que o acoplamento proposto representa de forma eficiente o comportamento inelástico de segunda ordem das estruturas. A comparação com resultados experimentais presentes na literatura valida a formulação implementada e destaca sua precisão perante o comportamento real de estruturas avaliadas em laboratório. Vale destacar os bons resultados obtidos ao se considera a flexão em torno do eixo de menor inércia, para diferentes níveis de carregamento permanente. Outra contribuição do presente trabalho é a capacidade de retratar o comportamento inelástico de elementos metálicos com qualquer seção transversal.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e CNPq (agências federais), FAPEMIG (fundação estadual), PROPEC e PROPP da UFOP e à FG o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Barsan, G.M. & Chiorean, C.G., 1999. Influence of residual stress on the carrying-capacity of steel framed structures. Numerical investigation, In D. Dubina & M. Ivany, eds, *Stability and Ductility of Steel Structures*, pp. 317-324.
- Battini, J.M., 2002. *Co-rotational beam elements in instability problems*. Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology – Department of Mechanics, Stockholm / Sweden.
- Caldas, R.B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Chan, S.L. & Chui, P., 2000. Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections. Oxford, Elsevier.
- Chen, W. & Kim, S, 1997. *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*. Boca Raton, Florida, EUA: CRC Press.
- Chiorean, C.G., 2013. A Computer Method for Nonlinear Inelastic Analysis of 3D Composite Steel-Concrete Frame Structures. *Engineering Structures*, vol. 57, pp. 125-152.
- EC3, 1992. Cen eurocode 3 design of steel structures. vol. part 1. *European Committee for Standardization*.
- Gonçalves, G.A., 2013. Modelagem do Comportamento Inelástico de Estruturas de Aço: Membros sob Flexão em Torno do Eixo de Menor Inércia. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Hsiao, K.M.; Horng, H.J. & Chen, Y.R., 1987. A co-rotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. *Computers & Structures*, vol. 27 n° 6, pp. 769-781.
- King, W.S., White, D.W., & Chen, W.F., 1992. On second-order inelastic analysis methods for steel frame design. *Journal of Structural Engineering ASCE*, vol. 118(2), pp. 408– 428.

- Lemes, Í.J.M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Lemes, Í.J.M.; Silveira, R.A.M.; Silva, A.R.D. & Rocha, P.A.S., 2017. Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, vol. 147, pp. 12-26.
- Li, T.J.; Liu, S.W. & Chan, S.L., 2015. Direct analysis for high-strength steel frames with explicit model of residual stresses. *Engineering Structures*, vol. 100, pp. 342-355.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., & Chen, W.F., 1993a. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 1. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3196-3216.
- Liew, J.Y.R., White, D.W., & Chen, W.F., 1993b. Second-order refined plastic hinge analysis for frame design: part 2. *Journal of Structural Division*, vol. 119(11), pp. 3217-3237.
- Machado, F.C.S., 2005. *Análise Inelástica de Segunda Ordem de Sistemas Estruturais Metálicos*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Mathur, K., 2011. *Effects of residual stresses and initial imperfections on Earthquake response of steel moment frames*. Thesis, Graduate College of the University of Illinois Urbana-Champaign, Illinois, United States of America.
- Salmon, C.G.; Johnson J.E. & Malhas, F.A., 2009. *Steel Structures: Design and Behavior*. 5th ed. Prentice Hall, New York.
- Santana, M.V.B., 2015. *Desenvolvimento de sistema computacional via MATLAB/GUI para análise geometricamente não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PROPEC/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- Tang, Y.Q.; Zhou, Z.H. & Chan, S.L., 2015. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. *World Scientific Publishing Company*, vol. 15, n° 5, pp. 1450068.
- Vogel, U., 1985. *Calibrating Frames*. *Stahlbau*, vol. 54, pp. 295-311.
- Wang, Y.B; Li, G.Q.; Chen, S.W. & Sun, F.F., 2014. Experimental and numerical study on the behavior of axially compressed high steel box-columns. *Engineering Structures*, vol. 58, pp. 79-91.
- Ziemian, R.D., 1993. Examples of Frame Studies Used to Verify Advanced Methods of Inelastic Analysis. In: *Plastic Hinge Based Methods for Advanced Analysis and Design of Steel Frames*. *Structural Stability Research Council*, SSRC, Lehigh Univ., Bethlehem, PA.
- Zubydan, H.A., 2011. Inelastic second order analysis of steel frame elements flexed about minor axis. *Engineering Structures*, vol. 33, pp. 1240-1250.