



ANÁLISE LINEAR DE PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS DA MECÂNICA DA FRATURA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ESTÁVEL

Thaianne Simonetti de Oliveira

Felício Bruzzi Barros

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Leandro Lopes da Silva

Neimar Aparecido da Silveira Filho

thaiannesimo@gmail.com

feliciobbarros@gmail.com

roque@dees.ufmg.br

leandro.silva_engenhariacivil@yahoo.com.br

neimarsilveira@ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627 – CEP 31270-901 – Escola de Engenharia – Bloco 1 – 4º andar, sala 4215, Pampulha, Belo Horizonte – MG, Brasil

Resumo. *O presente trabalho avalia o desempenho do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) na análise linear de problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura. Para tal, diferentes estratégias de enriquecimento são investigadas, a partir da utilização, enquanto enriquecimento, de funções que simulam descontinuidade (funções de Heaviside, padrão e linearizada) e funções que descrevam o comportamento da trinca. Essas estratégias são empregadas em malhas aninhadas para uma chapa submetida a estado plano de tensões em duas situações distintas. Avaliam-se as taxas de convergência do MEFGE, bem como as normas energia do erro e os valores verificados para o número de condicionamento, contrapondo-os com os resultados obtidos para o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).*

Palavras-chave: *Mecânica Computacional, Mecânica da Fratura, Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável, Método dos Elementos Finitos Generalizados.*

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), entendido aqui como uma abordagem equivalente ao Método dos Elementos Estendidos (MEFE) (Belytschko; Gracie; Ventura, 2009) foi, conforme Gupta *et al.* (2013) intensamente desenvolvido nos últimos dezenove anos. Sua utilização em problemas que escapam à eficiente simulação pela forma tradicional do Método dos Elementos Finitos (MEF) se consolidou de tal forma que hoje o método já é um recurso empregado em softwares comerciais como o Abaqus. Segundo Barros (2002), o MEFG pode ser compreendido como uma formulação não convencional do MEF, uma vez que se utiliza da estrutura deste para definir uma partição de unidade (PU), sobre a qual se realiza o enriquecimento das funções de forma que caracteriza o método e responde por sua qualidade. Tal particularidade permite que a aproximação seja construída de forma a minimizar a importância da malha de elementos finitos (Oliveira; Barros, 2016). Esta relativa independência de malha aproxima o MEFG da vantajosa abordagem dos métodos sem malha (Nguyen *et al.*, 2008). Diferentemente destes, porém, no MEFG a aproximação é construída com base nas funções de forma do MEF convencional, sobre uma malha de elementos, eliminando-se os problemas de integração numérica vivenciados naquelas formulações (Strouboulis; Babuška; Copps, 2000). Ao mesmo tempo, pode-se utilizar o grande arcabouço computacional existente para a forma convencional do MEF, adaptando-o quando pertinente para as particularidades do MEFG.

De acordo com Gupta *et al.* (2013), as propriedades notáveis do MEFG residem numa escolha criteriosa das funções de enriquecimento, de forma a permitir uma aproximação satisfatória da solução esperada. Em muitas aplicações, no entanto, como em problemas da mecânica da fratura, essas funções são necessárias apenas em pequenas sub-regiões do domínio de análise. Consequentemente, nestas situações, haverá elementos da malha apenas parcialmente enriquecidos, que se denominam "*blending elements*" - elementos de mistura. Chessa, Wang e Belytschko (2003) demonstraram que o erro nesses elementos pode ser superior ao verificado nos "*non-blending elements*" (elementos totalmente enriquecidos ou totalmente desprovidos de enriquecimento). Isso afetaria as taxas de convergência do método. Lins (2015) realiza uma breve revisão bibliográfica das técnicas até então propostas para se lidar com esta questão, entre as quais se destaca o *Stable Generalized Finite Element Method* (SGFEM) - Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE), originalmente proposto por Babuška e Banerjee (2012).

O MEFGE é construído a partir de uma simples modificação local (a ser explanada na seção 2.2) do enriquecimento empregado no MEFG, de tal forma que os problemas causados pelo efeito dos elementos de mistura são superados (Gupta *et al.*, 2013). Além deste benefício, o método se torna especialmente atraente por se propor a lidar com outra desvantagem associada ao MEFG: o mal condicionamento de sua matriz de rigidez se comparado ao verificado pela forma tradicional do MEF. Esta foi, segundo Lins (2015), a motivação original para o desenvolvimento do MEFGE. A rigor, um sistema de equações pode ser considerado como mal condicionado se uma pequena perturbação na matriz de coeficientes ou no vetor de termos independentes implica uma grande mudança no vetor solução (Belsley; Kuh; Welsch, 1980). Isso resulta, consequentemente, em perda de precisão na solução do sistema de equações lineares associado ao MEFG (Babuška; Banerjee, 2012). Segundo Gupta *et al.* (2013), no MEFGE, diferentemente do que ocorre no MEFG, o condicionamento verificado para a matriz de rigidez não é inferior ao apresentado pelo MEF tradicional.

Diante do exposto, fica clara a necessidade do estudo do MEFGE, uma vez que o método propõe não somente a manutenção de todas as vantagens apresentadas pelo MEF - contornando, segundo Oliveira e Barros (2016), as limitações oriundas da formulação clássica do MEF e investigando, com flexibilidade, fenômenos que escapam à eficiente simulação de sua forma convencional - mas também a resolução das principais questões negativas que eventualmente afetavam seu desempenho. Para que esse estudo possa ser viabilizado, faz-se necessário dispor de recursos computacionais adequados.

O sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) é, conforme Silva (2016), um projeto de software livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais e disponível em <http://www.insane.dees.ufmg.br>. Este sistema dispõe de diversos recursos para análise estrutural, entre os quais se destaca o arcabouço desenvolvido para o MEFGE (que conta inclusive com interface gráfica) e classes específicas que versam sobre o MEFGE. Este arcabouço previamente disponibilizado, assim como o ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade propiciado pelo INSANE, possibilitou a realização das análises numéricas apresentadas neste trabalho, da mesma forma que viabilizou a implementação das funções de enriquecimento que eventualmente inexistiam no programa. Dispondo de tais recursos, a avaliação do desempenho do MEFGE em problemas lineares bidimensionais da Mecânica da Fratura, que era o objetivo do presente trabalho, foi possível.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

De acordo com Duarte, Babuška e Oden (2000), o MEFGE foi proposto independentemente por:

- Babuška e colaboradores em Babuška, Caloz e Osborn (1994); Babuška e Melenk (1997) e Melenk e Babuška (1996), sob as denominações de Método dos Elementos Finitos Especiais, Método dos Elementos Finitos Generalizados e Método dos Elementos Finitos da Partição da Unidade;
- Duarte e Oden em Duarte e Oden (1995); Duarte e Oden (1996a); Duarte e Oden (1996b) e Duarte (1996) como formulação do método das nuvens; e em Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) como uma formulação híbrida do MEF.

A estratégia utilizada pelo MEFGE consiste em empregar as funções de forma do MEF como funções do tipo Partição da Unidade (PU) (Barros, 2002). O emprego de tais funções como PU, além de facilitar a aplicação do método, garante estabilidade ao problema analisado, verificando diretamente condições de contorno, ao contrário do que ocorre nos métodos sem malha (Alves, 2012). O resultado do produto dessas funções por outras funções especialmente escolhidas define as funções de forma do método.

Esta estratégia de enriquecimento extrínseco é similar, como apresentado na seção 1, àquela apresentada pelo *eXtended Finite Element Method (XFEM)* - Método dos Elementos Finitos Estendido - introduzido por Moës, Dolbow e Belytschko (1999) e Belytschko e Black (1999) (Alves; Barros; Pitangueira, 2013). Segundo Fries e Belytschko (2010), o que distinguiu a abordagem adotada pelo XFEM dos primeiros trabalhos relacionados ao MEFGE foi sua aplicação a

problemas em que o enriquecimento era necessário apenas em partes do domínio. Essa característica local era alcançada através do enriquecimento de um subconjunto de nós. No entanto, os mesmos autores afirmam que as diferenças entre este método e o MEFG se tornaram nebulosas. De fato, apesar da consideração citada feita por Fries e Belytschko (2010), em Duarte, Babuška e Oden (2000), sob abordagem do MEFG, já são utilizadas funções especiais para enriquecer apenas alguns nós do domínio. Deste modo, os métodos podem ser considerados praticamente idênticos, o que foi assumido neste artigo.

O MEFG apresenta, assim como os métodos sem malha, domínios de influência denominados nuvens (ω_j), que são formados, no caso daquele, por conjuntos de elementos finitos que concorrem nos pontos nodais cujo vetor de coordenadas é $\mathbf{x}_j$. Empregando-se as funções de Lagrange lineares (do MEF), dentro do domínio $\mathbb{R}^2$, representadas por $N_j(\mathbf{x})$, forma-se a Partição de Unidade (PU), assim definida pois para qualquer posição do domínio do problema de n pontos nodais tem-se (Alves, 2012):

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (1)$$

Segundo Barros (2002), o enriquecimento permite a ampliação desse espaço a partir da multiplicação da função base de cada nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$ por um novo conjunto de q_j funções linearmente independentes definidas por:

$$\mathcal{J}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$

As funções de forma $\phi_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, atreladas ao nó de coordenadas $\mathbf{x}_j$ e correspondentes à nuvem ω_j , são definidas pelo produto entre as funções básicas que formam a PU e as funções de enriquecimento:

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (3)$$

sem somatório em j .

A função produto possibilita a descrição precisa da aproximação da solução de alguns trechos do domínio, que devido à complexidade da solução, não poderiam ser descritos, por exemplo, por funções polinomiais. A função enriquecedora é, portanto, selecionada conforme o problema em análise.

Pela maneira como é realizado, o enriquecimento pode variar entre elementos, mas a construção da solução a partir da PU, permite chegar a uma aproximação sem "costura" (Duarte; Babuška; Oden, 2000), verificando o critério de conformidade dos elementos (Alves, 2012).

Finalmente, conforme Barros (2002), obtém-se uma aproximação genérica $\tilde{u}(\mathbf{x})$ pela seguinte combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (4)$$

onde u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados com cada componente $N_j(\mathbf{x})$ do MEF e $N_j(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, respectivamente.

É importante observar que, apesar de superar as limitações relativas à integração numérica (quando as funções de enriquecimento são polinomiais e pelo fato das aproximações serem construídas sobre a malha de elementos), bem como à prescrição das condições de contorno, verificados na abordagem dos métodos sem malha, o MEFGE pode incorrer num conjunto de funções linearmente dependentes (Duarte; Babuška; Oden, 2000). Isso ocorre, basicamente, segundo Oliveira e Barros (2016), quando se enriquece com monômios uma PU polinomial. A consequência imediata desse fato é que o modelo passa a apresentar uma matriz de rigidez semi-definida positiva, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido (Barros, 2002). Em outras palavras, a matriz não pode ser invertida. Além disso, a estratégia de enriquecimento também penaliza o condicionamento do sistema. O primeiro problema pode ser contornado empregando-se as estratégias numéricas sugeridas em Strouboulis, Babuška e Copps (2000). O segundo problema será melhor abordado na seção 2.2.

2.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE)

O MEFGE, como mencionado previamente, foi originalmente proposto por Babuška e Banerjee (2012) para lidar com a questão do mal condicionamento da matriz de rigidez verificado no MEFGE. Adicionalmente, percebeu-se que o método apresentava bom desempenho também nas situações que envolviam elementos de mistura, conduzindo os problemas analisados a taxas ótimas de convergência mesmo sem a utilização de funções rampa. O emprego dessas funções é exigido em outras abordagens que tencionam superar os efeitos negativos dessa classe de elementos, como o *Corrected XFEM* - MEFGE Corrigido (Babuška; Banerjee, 2012). As funções rampa se caracterizam por variarem linearmente de 0 a 1, assumindo, no caso dos elementos de mistura, o valor da unidade nos nós enriquecidos e valor nulo nos nós desprovidos de enriquecimento.

O MEFGE é arquitetado a partir de uma modificação local do enriquecimento característico do MEFGE. Essa modificação consiste basicamente na eliminação dos termos redundantes que aparecem na PU, suprimindo das funções de enriquecimento suas projeções no espaço de funções daquela. Realiza-se então, de modo análogo ao que ocorria no MEFGE, o produto do novo enriquecimento pelas funções de forma que compõem a PU, originando as funções de forma do método como um todo. Matematicamente, o enriquecimento modificado pode ser expresso como (Gupta *et al.*, 2013):

$$\tilde{L}_{ji} = L_{ji} - I_{\omega_j}(L_{ji}) \quad (5)$$

onde I_{ω_j} é a função interpoladora definida por:

$$I_{\omega_j}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x}) L_{ji}(\mathbf{x}_k) \quad (6)$$

onde $\mathbf{x}_k$ é o vetor de coordenadas do nó k do elemento corrente, n se refere ao número de pontos nodais do mesmo e $L_{ji}(\mathbf{x}_k)$ é a função enriquecedora original da equação (2).

Finalmente, são obtidas as funções de forma para o MEFGE:

$$\{\tilde{\phi}_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{\tilde{L}_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (7)$$

sem somatório em j .

Para melhor compreensão do método, a Figura 1 mostra a construção do enriquecimento modificado e sua respectiva aplicação para compor a função de forma do MEFGE como um todo.

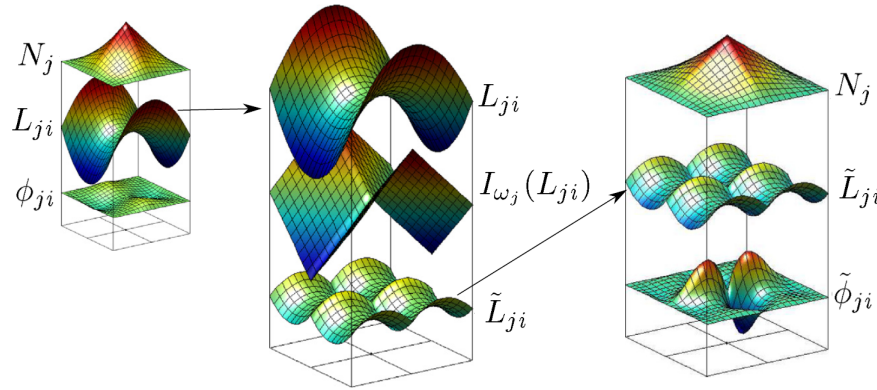


Figura 1: Construção do enriquecimento associado ao MEFGE. À esquerda, esquema do enriquecimento da partição da unidade empregado no MEFGE. No centro, nota-se a arquitetura do enriquecimento modificado. À direita, por sua vez, tem-se o esquema do enriquecimento da PU associada ao MEFGE. (Gupta *et al.*, 2013).

Segundo Gupta *et al.* (2015), a questão do mal condicionamento da matriz de rigidez associada ao MEFGE é bem conhecida desde os primórdios do desenvolvimento deste método - uma breve revisão bibliográfica das tentativas realizadas para se lidar com a mesma pode ser encontrada em Lins (2015). De fato, como visto na seção anterior, o enriquecimento que se utiliza de funções polinomiais conduz a uma dependência linear que exige a utilização de processos iterativos para sua solução. A dependência linear está, como se explana posteriormente no texto, negativamente associada ao condicionamento de uma matriz. Lins (2015) destaca que o emprego de outros tipos de enriquecimentos, embora não conduza em geral a um condicionamento tão prejudicial, também produz um efeito desfavorável sobre este aspecto. A consequência deste fato é que os resultados obtidos pelo MEFGE podem se tornar poluídos por erros de arredondamento no caso de se utilizarem procedimentos de solução diretos ou terem as taxas de convergência significativamente afetadas quando são empregados procedimentos iterativos (Gupta *et al.*, 2015), comprometendo sua precisão.

Tradicionalmente, quantifica-se o grau de condicionamento de uma matriz por um escalar denominado número de condicionamento. Szabó e Babuška (1991) definem o número de condicionamento de uma matriz $\mathbf{K}$ simétrica como sendo a razão entre o maior (λ_{max}) e o menor (λ_{min}) de seus autovalores:

$$C(\mathbf{K}) \stackrel{def}{=} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq 1 \quad (8)$$

Quanto maior o valor deste escalar, pior condicionada está a matriz. Por convenção, o número de condicionamento de uma matriz singular é infinito. Babuška e Banerjee (2012) demonstram que a taxa de variação do número de condicionamento associado à matriz de rigidez do MEFGE é da ordem de h^{-4} , enquanto no MEF convencional se obtém h^{-2} , onde h é o diâmetro do elemento. Dito de outro modo, percebe-se que, à medida em que a malha é refinada, ou seja, que o diâmetro dos elementos se reduz, o número de condicionamento associado ao

MEFG cresce vertiginosamente se comparado ao apresentado pelo MEF. Os mesmos autores demonstram, para um caso unidimensional, que a taxa relacionada ao MEFGE é da mesma ordem de grandeza da verificada pelo MEF tradicional: h^{-2} . Posteriormente, Gupta *et al.* (2013) e Gupta *et al.* (2015) comprovaram que isso também acontece para os casos bi e tridimensionais, porém sob determinadas condições que exigiram adaptações na forma como os mesmos organizaram suas estratégias de enriquecimento, de forma a garantir a manutenção de taxas ótimas de convergência. Pode-se perceber, portanto, que o método tem sido bem sucedido em estabilizar o condicionamento da matriz de rigidez a ele associada, embora tenha apresentado também particularidades para se alcançar tal fim que merecem um estudo mais aprofundado.

No que concerne aos elementos de mistura, Fries e Belytschko (2010) apontam que as desvantagens associadas aos mesmos foram percebidas desde os primeiros trabalhos envolvendo o MEFGE. Como visto na seção 1, os elementos de mistura se caracterizam por apresentarem enriquecimento parcial, não contemplando todos os nós que os constituem (Figura 2). Isso faz com que a função enriquecedora não possa mais ser plenamente reproduzida, além de permitir a adição de termos parasitas à aproximação. Fries e Belytschko (2010) exemplificam esse último caso imaginando um elemento com apenas um dos nós enriquecido por uma função não polinomial, e concluem que surgirão termos que não poderão ser compensados pela aproximação polinomial padrão do MEF. Os mesmos autores afirmam, no entanto, que o efeito negativo à aproximação causado pela presença dos elementos de mistura não é facilmente previsível. De acordo com Fries (2008), o tipo de enriquecimento empregado pode servir como indicativo de alerta para as futuras limitações provocadas. Por exemplo, o emprego de *abs-enrichments* - enriquecimentos que envolvem funções que empregam valor absoluto - quando ocorrerem elementos de mistura, em geral, conduzirá à redução das taxas de convergência. Por sua vez, a utilização do enriquecimento de ponta da trinca (Fries, 2008) usualmente apenas amplia o valor absoluto do erro, enquanto as taxas de convergência permanecem inalteradas.

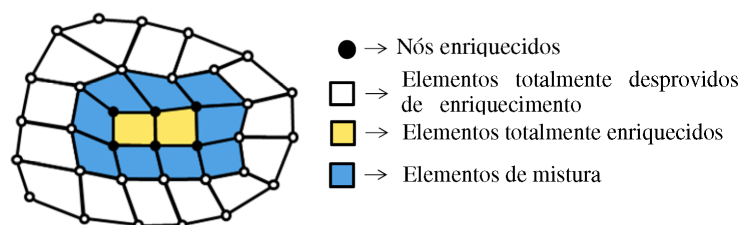


Figura 2: Diferentes tipos de elementos classificados conforme a quantidade de nós enriquecidos. Adaptado de Lins (2015).

Gupta *et al.* (2013) realizam diversas análises numéricas de um problema envolvendo uma chapa quadrada com trinca horizontal em uma de suas bordas. Os autores mostram que, nos diversos experimentos, o erro verificado quando empregado o MEFGE é superior na zona de enriquecimento, próxima à ponta da trinca. Este comportamento é atribuído à presença dos elementos de mistura nos contornos dessa zona. Para o MEFGE, os autores demonstram graficamente que a redução do erro nessa zona em relação ao MEFG é significativa, comprovando o bom desempenho do método nessa situação e indicando que o mesmo pode prover resultados mais precisos para o fator de intensidade de tensão. Resultados similares são obtidos em Babuška e Banerjee (2012) e Gupta *et al.* (2015).

Fica claro o potencial do MEFGE, bem como sua aplicabilidade ao fenômeno que se de-

seja estudar no presente artigo: a análise linear de problemas bidimensionais que possuam trinca(s). Observa-se também a necessidade de avaliar a eficácia do MEFGE e até que ponto o cumprimento dos fins para os quais foi projetado está limitado a estratégias específicas de enriquecimento no caso bidimensional.

3 MODELAGEM DO PROBLEMA

3.1 Geometria, Carregamento, Dados do Material e Condições de Contorno

Para a avaliação do desempenho do MEFGE, contraposto em relação ao verificado pelo MEFGE, se utilizou do problema que se segue: uma chapa, de espessura unitária, submetida a Estado Plano de Tensões, com carregamento de tração também unitário aplicado em sua extremidade superior. A chapa possui ainda uma trinca em sua estrutura, cuja ponta se localiza em seu centro geométrico. O deslocamento nas direções vertical e horizontal é restringido no nó mais a esquerda da extremidade inferior, enquanto os demais nós da mesma extremidade têm restritos apenas os deslocamentos na direção vertical. Além disso, as características do material empregado (em unidades consistentes) são Módulo de Elasticidade $E = 1,0$ e Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A chapa descrita pode ser visualizada na Figura 3.

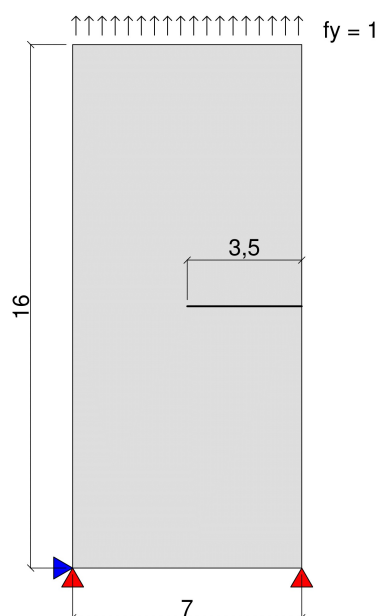


Figura 3: Geometria, carregamento e condições de contorno do problema utilizado nas simulações numéricas (dimensões em unidades consistentes).

3.2 Malhas e Estratégias de Enriquecimento Empregadas

As simulações realizadas no presente artigo visavam a comparar o MEFGE e o MEFGE, como já citado, em relação às taxas de convergência de uma determinada solução, às normas energia do erro e aos números de condicionamento verificados para as matrizes de rigidez escalonadas de cada um dos métodos. Para avaliar em particular as taxas de convergência, bem como

a taxa de crescimento do número de condicionamento, faz-se necessário trabalhar com malhas aninhadas. Nesse sentido, optou-se pela análise de duas situações distintas, considerando o problema apresentado na seção 3.1: em uma das situações, a trinca atravessa os elementos da malha (caso I, figura 4), enquanto na outra a trinca é coincidente com a(s) aresta(s) do(s) elemento(s) finito(s) (caso II, figura 5). Cada uma dessas situações, como visto nas figuras citadas, conta com três malhas aninhadas entre si. Para o primeiro caso (trinca cortando elementos), as malhas posteriores à primeira são geradas a partir da divisão do elemento finito original em 9 outros de mesma dimensão, enquanto que, para o segundo caso (trinca coincidente com a aresta), as malhas posteriores são geradas a partir da divisão do elemento original em outros 4 idênticos.

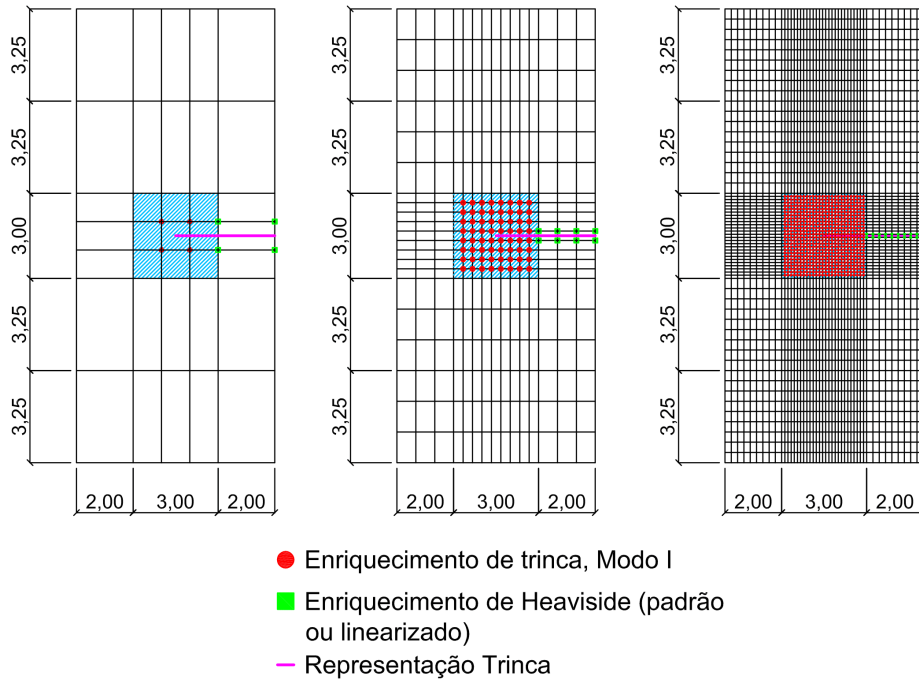


Figura 4: Malhas utilizadas na análise do problema apresentado para o caso em que a trinca atravessa os elementos (caso I), bem como estratégia de enriquecimento adotada.

Além disso, para simular de forma eficiente a descontinuidade forte (trinca) existente no problema, foram empregadas combinações de funções de enriquecimento que representassem seu comportamento. Particularmente, tanto na estratégia estável quanto na forma tradicional do MEF, se utilizou uma combinação de funções que representam a solução exata, para o Modo I de abertura, nas vizinhanças de uma singularidade, conforme desenvolvido por Szabó e Babuška (1991):

$$u_{xi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(k - Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \cos \lambda_i^{(1)} \theta - \lambda_i^{(1)} \cos(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta] \quad (9)$$

$$u_{yi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(k + Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \sin \lambda_i^{(1)} \theta + \lambda_i^{(1)} \sin(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta] \quad (10)$$

onde G é o Módulo de Elasticidade Transversal; $Q = 1/3$; $\lambda = 0, 5$; (para as análises deste trabalho), $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ no Estado Plano de Tensões e θ e r variam conforme a posição do

ponto de integração; e funções que incorporam a descontinuidade geométrica. No caso, para tal, foram empregadas as funções de Heaviside, em sua forma padrão:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \geq 0 \\ 0, & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (11)$$

e também, no caso das análises que utilizavam a estratégia estável, na forma linearizada apresentada por Gupta *et al.* (2013), para o nó $\mathbf{x}_j$, de coordenadas (x_j, y_j) :

$$\mathcal{H}_L^j(x, y) = \left\{ \mathcal{H}, \mathcal{H} \frac{(x - x_j)}{h_j}, \mathcal{H} \frac{(y - y_j)}{h_j} \right\} \quad (12)$$

com $\mathcal{H}$ definido pela equação (11) e h_j sendo o fator de escala determinado a partir do diâmetro do maior elemento que concorre no nó $\mathbf{x}_j$.

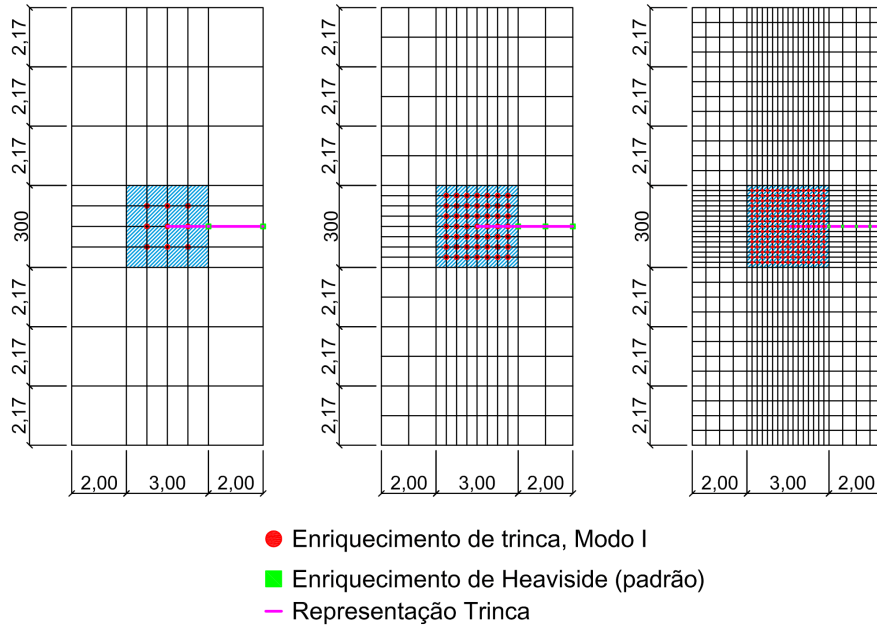


Figura 5: Malhas utilizadas na análise do problema apresentado para o caso em que a trinca coincide com as arestas dos elementos (caso II), bem como estratégia de enriquecimento adotada para o MEFGE.

As figuras 4 e 5 expõem ainda os nós enriquecidos de acordo com as funções de enriquecimento adotadas. Deve-se observar que o enriquecimento de trinca, modo I, atua como um enriquecimento geométrico em ambos os casos, mantendo sempre a região hachurada nas figuras como região de enriquecimento em todas as malhas para cada situação. Os nós enriquecidos com Heaviside (padrão ou linear), por sua vez, simulam a descontinuidade após o término dos nós enriquecidos pelo enriquecimento de trinca, modo I.

Faz-se notar ainda que, apesar de a figura 4 representar as estratégias de enriquecimento adotadas tanto para as análises via MEFGE quanto para as análises via MEFGE, a figura 5 o faz apenas para a forma padrão do MEFGE. Isso porque, nessa situação, enriquecer apenas a linha

da trinca com Heaviside na abordagem estável não é suficiente para produzir uma boa aproximação, como já foi apontado em Gupta *et al.* (2013). A exigência do cálculo do interpolante para produzir a modificação na função enriquecedora original faz com que tal função tenha que ser calculada nos nós, justamente onde existe a descontinuidade. Portanto, para representá-la corretamente, faz-se necessário enriquecer também ou a linha imediatamente acima da trinca ou imediatamente abaixo. Por coerência com a equação (11) aqui apresentada, adotou-se neste artigo o enriquecimento da linha imediatamente abaixo da trinca. Os nós enriquecidos pelo enriquecimento de trinca, modo I se mantêm os mesmos na abordagem estável. Um detalhe da região enriquecida para o MEFGE nesta situação pode ser visto na figura 6.

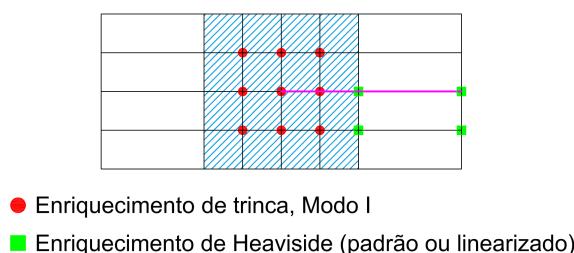


Figura 6: Detalhe da estratégia de enriquecimento utilizada nas análises empregando o MEFGE no caso II (Malha 1).

Além das estratégias de enriquecimento ilustradas nas figuras 4, 5 e 6, no caso II foram modeladas também malhas sem o enriquecimento de Heaviside, a partir da duplicação dos nós para descrever geometricamente a trinca. Empregou-se, portanto, nessas malhas apenas o enriquecimento de trinca, modo I em ambas as abordagens (MEFGE e MEFGE). Tal modelagem se destinou a avaliar a qualidade do enriquecimento de Heaviside na situação citada.

3.3 Solução de Referência

A solução de referência, utilizada como parâmetro para avaliação e cálculo da norma energia do erro nas simulações numéricas realizadas, foi obtida também numericamente a partir da modelagem do problema apresentado em 3.1 no software ANSYS MECHANICAL APDL 17.1. Para tal, foi empregado o elemento SOLID183, e, na vizinhança da ponta da trinca, elementos do tipo quarter-point.

A partir disso, a malha inicialmente empregada foi refinada até que se atingisse a convergência. Na malha em que a convergência se verificou, com 40.930 nós, obteve-se, como referência para a energia de deformação o valor de $U = 130,74931$.

3.4 Implementação

Como mencionado previamente, as simulações numéricas realizadas neste artigo foram efetuadas no âmbito do sistema INSANE. Esse sistema, em linhas gerais, pode ser dividido em três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. Conforme Alves (2012), o pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que fornecem ferramentas para construir as diversas representações discretas de um problema estrutural, além de visualização de resultados. O processador, por sua vez, constitui o núcleo numérico e é responsável

pela obtenção de resultados dos modelos. As modificações realizadas em termos de código para o presente trabalho foram realizadas nesta aplicação.

Em linhas gerais, o núcleo numérico do INSANE é estruturado em interfaces e classes abstratas que representam as diversas abstrações da solução por modelos discretos. Sua organização é centrada nas relações entre as interfaces *Assembler* e *Persistence*, além das classes abstratas *Model* e *Solution* (Alves, 2012). A Figura 7 apresenta o diagrama *Unified Modeling Language* (UML) das classes citadas, destacando a comunicação entre as mesmas.

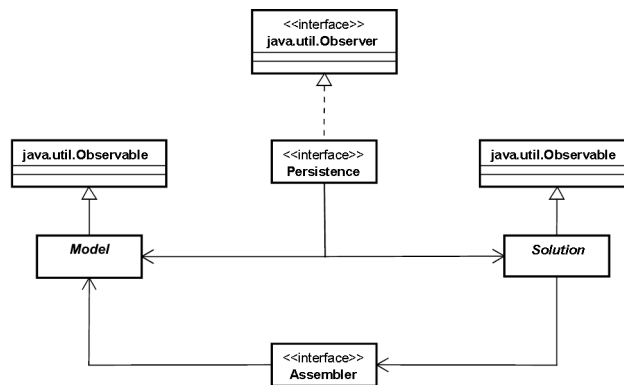


Figura 7: Organização do núcleo numérico do INSANE (Alves, 2012).

Segundo Alves (2012), a interface *Assembler* é responsável pela montagem do sistema que representa genericamente a forma discreta de um problema de valor de contorno expresso por:

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = D \quad (13)$$

onde X é o vetor solução; A , B e C são matrizes e D é um vetor.

A classe abstrata *Solution*, por sua vez, desencadeia o processo de solução e detém os recursos necessários para a resolução do sistema, seja ele linear ou não-linear. A classe abstrata *Model* contém todos os dados do modelo discreto, e fornece à interface *Assembler* as informações necessárias para a montagem da equação (13). *Model* e *Solution* se comunicam com a interface *Persistence*, que interpreta os dados de entrada e provê os dados de saída para outras aplicações, sempre que alterações no estado do modelo discreto são realizadas (Alves, 2012).

Para que as simulações numéricas aqui apresentadas fossem viabilizadas, fez-se necessário implementar as funções de enriquecimento de Heaviside (padrão e linearizada) para a estratégia estável. Tal implementação se fundamentou principalmente em dois trabalhos: no arcabouço desenvolvido para as análises via MEFGE por Alves (2012) e no sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas elaborado por Silva (2016). O trabalho de Alves (2012) se deu de tal forma que garantiu um código genérico para o MEFGE, adequando a entrada de dados, modificando e criando as classes pertinentes para que as funções de forma fossem construídas de forma correta e adequando as classes *Assembler* e *Solution* para a montagem das matrizes de rigidez dos problemas simulados segundo essa abordagem, bem como inserindo métodos de solução compatíveis com as particularidades do MEFGE. Isso permitiu que a implementação das funções citadas se desse rapidamente, uma vez que, com essa estrutura montada, foi necessário apenas criar as classes relativas aos enriquecimentos desejados, além de adequar a leitura de dados (visto que o MEFGE oriunda de uma simples modificação local

do enriquecimento do MEFGE, como explanado na seção 2.2). Estas foram criadas como filhas da classe abstrata *EnrichmentType* (situada no contexto de *Model*), que governa as funções de enriquecimento.

Em Silva (2016), por outro lado, foi construído um sistema que simulasse a nucleação e propagação de trincas. Neste, por sua vez, a incorporação da descontinuidade forte (trinca) se dava a partir do enriquecimento dos nós do elemento que a continha por funções de Heaviside. As trincas foram modeladas como instâncias de uma classe denominada *DiscontinuityByGfem* (também presente em *Model*), tendo uma instância correspondente na classe que implementava o cálculo da função de enriquecimento propriamente dito (*DiscontinuousEnrichment*). Para retornar um multiplicador adequado, procede-se à investigação da posição do ponto em análise em relação à trinca. Para tal, verifica-se o sinal do produto vetorial entre o segmento de trinca e o vetor definido pelo ponto inicial deste segmento e o ponto em análise (Silva, 2016).

A lógica de Silva (2016) foi expandida para a abordagem estável, a partir da criação de uma classe filha de *DiscontinuityByGfem*, denominada *DiscontinuityBySGfem*. A entrada de dados para a incorporação da trinca sob essa estratégia também foi adequada, além de serem criadas, como mencionado previamente, as classes *StableDiscontinuousEnrichment* e *StableLinearDiscontinuousEnrichment* para representar, respectivamente, os enriquecimentos de Heaviside padrão e linear para o MEFGE. Todas estas classes se inserem no contexto de *Model*. Além disso, foi modificada, como mencionado previamente, uma classe no âmbito de *Persistence*, a fim de adequar a entrada de dados às novas implementações.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Caso I: Trinca Atravessa Elementos

Nesta seção, são apresentados e discutidos os resultados para as estratégias de enriquecimento distintas empregadas nas análises envolvendo as malhas da figura 4. As diferentes combinações de enriquecimento utilizadas podem ser divididas por abordagem: nas simulações que empregaram o MEFGE, houve, como citado previamente, a combinação do enriquecimento de Heaviside padrão (equação 11) com enriquecimento de trinca, Modo I (equações 9 e 10), denominado Heav MEFGE + Crack1. De forma análoga, na estratégia estável, foram combinadas as funções de Heaviside padrão com o enriquecimento de trinca, modo I, sob mesma abordagem (Heav MEFGE + SCrack1), e também as funções de Heaviside linearizadas (equação 12) com o enriquecimento de trinca, modo I (Heav Linear MEFGE + SCrack1). Os resultados para a energia de deformação obtidos para as combinações citadas, bem como o número de graus de liberdade verificado para cada uma das malhas, podem ser visualizados na tabela 1. Os dados relativos ao número de condicionamento para cada uma das matrizes de rigidez pré-condicionadas das respectivas malhas, por sua vez, podem ser observados na tabela 2. Deve-se notar que, apesar de a definição empregada na equação 8 atender o caso em questão, a determinação do número de condicionamento, no presente trabalho, se dá a partir de uma definição mais genérica apresentada por Strang (1976):

$$C(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (14)$$

onde $\|\mathbf{A}\|$ é a norma de $\mathbf{A}$ e $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ é a norma da inversa de $\mathbf{A}$.

Isso se deveu ao fato de que o sistema INSANE já possuía um método que proviesse tal cálculo segundo essa abordagem, a partir da decomposição da matriz em análise em valores singulares (em inglês, *Singular Value Decomposition*, SVD).

Tabela 1: Energia de deformação (U) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da figura 4, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	U			NGL		
	1	2	3	1	2	3
Heav MEFGE + Crack1	115,5290	128,6514	130,6093	112	848	7280
Heav MEFGE + SCrack1	109,8542	124,5499	128,7791	112	848	7280
Heav Linear MEFGE + SCrack1	125,1104	130,3774	130,8245	128	880	7360

Tabela 2: Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da figura 4, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	NC		
	1	2	3
Heav MEFGE + Crack1	8,52E+03	9,09E+04	8,68E+05
Heav MEFGE + SCrack1	8,32E+03	8,90E+04	8,62E+05
Heav Linear MEFGE + SCrack1	1,66E+04	1,42E+05	1,32E+06

Os resultados apresentados nas tabelas 1 e 2 foram avaliados graficamente nas figuras 8 e 9, a partir, respectivamente, da plotagem do logaritmo da norma energia do erro pelo logaritmo do número de graus de liberdade e do logaritmo do número de condicionamento também pelo logaritmo do número de graus de liberdade. Observa-se que, para a norma energia do erro, adotou-se a definição exposta por Szabó e Babuška (1991), segundo a qual:

$$\|u_{ex} - \tilde{u}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{2(U(u_{ex}) - U(\tilde{u}))} \quad (15)$$

onde u_{ex} é a solução exata, aqui substituída pela energia de referência, $\tilde{u}$ é a solução aproximada numericamente e U é a energia de deformação do sistema.

Pode-se notar, na figura 8, que em geral as combinações adotadas atingem taxas ótimas de convergência β - para o problema em questão (bem como para o caso II), tais taxas deveriam se aproximar de 0,5, uma vez que é o parâmetro de suavidade λ o responsável por governar a convergência nesta situação (Szabó; Babuška, 1991) - com exceção da combinação Heav MEFGE + SCrack1. O emprego das funções de Heaviside padrão sob abordagem do MEFGE já havia sido contraindicada por Gupta *et al.* (2013), uma vez que, em tal situação, este enriquecimento não seria capaz de aproximar apropriadamente o erro $u - I_{\omega_j}(u)$, condição fundamental para conseguir um bom desempenho no MEFGE. Além disso, pode-se constatar que, apesar de as diferentes estratégias de enriquecimento apresentarem comportamentos semelhantes, a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1 é a que apresenta, a princípio, o menor erro em relação

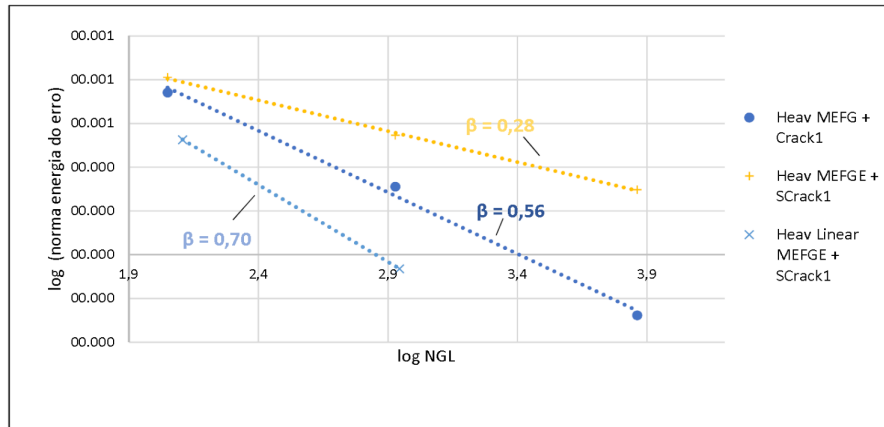


Figura 8: Análise de convergência da solução, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

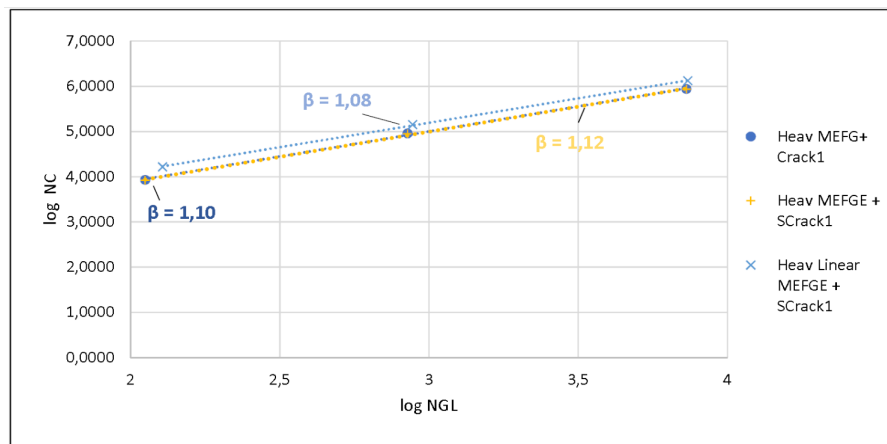


Figura 9: Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

à solução de referência. Nota-se inclusive que na última malha a análise que empregou essa combinação ultrapassou tal valor. No presente trabalho, considerou-se que essa superação da solução de referência significou que a mesma foi atingida, e o que a excedeu seria oriundo de erros numéricos (relativos à integração no elemento, por exemplo). Por isso, apenas os pontos relativos às análises das malhas 1 e 2 (figura 4) foram representados graficamente para a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1. No que concerne ao número de condicionamento, a figura 9 revela que tanto os comportamentos quanto as taxas de crescimento apresentadas pelas combinações distintas estão bastante próximas, enquanto na tabela 2 se pode notar que os valores apresentados pela estratégia de enriquecimento que utiliza as funções de Heaviside padrão sob abordagem do MEFGE são apenas ligeiramente inferiores aos verificados por seu par no MEFGE. Por outro lado, a estratégia que utiliza a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1 apresenta seus números de condicionamento ligeiramente superiores às demais combinações. Supõe-se, a partir disso, que a suposta vantagem apresentada pelo MEFGE neste quesito não pôde ser avaliada, uma vez que as matrizes de rigidez do MEFGE já apresentavam um número de condicionamento possivelmente próximo do que seria verificado caso se utilizasse a aproximação padrão do MEF. Isso se fundamenta no fato de que as taxas de crescimento verificadas para

o MEFGE são próximas do esperado para o MEFGE se comparadas ao exposto no trabalho de Gupta *et al.* (2013). De fato, espera-se para o MEF uma taxa em h^{-2} , o que corresponderia em termo de graus de liberdade em algo da ordem de NGL. Observa-se, pelo gráfico da figura 9, que em todos os modelos a convergência apresentou taxa unitária, sendo assim, a ótima esperada.

4.2 Caso II: Trinca Coincidente com a Aresta

Nesta seção, por sua vez, são apresentados e discutidos os resultados para as estratégias de enriquecimento distintas empregadas nas análises envolvendo as malhas da figura 5. As diferentes combinações de enriquecimento utilizadas são as mesmas descritas na seção 4.1, com dois acréscimos. Além das estratégias já explicitadas, foram também realizadas simulações utilizando apenas o enriquecimento de trinca, modo I, na conformação demonstrada na figura 5, com nós duplicados para descrever geometricamente a trinca (Crack1, nós duplicados). Como mencionado anteriormente, tais simulações se destinaram a avaliar a eficácia do enriquecimento de Heaviside utilizado. De forma análoga, na estratégia estável, sob mesma justificativa, foram também efetuadas análises utilizando apenas o enriquecimento de trinca, modo I com nós duplicados para atingir o mesmo fim (SCrack1, nós duplicados). Os resultados para a energia de deformação obtidos para as combinações citadas, bem como o número de graus de liberdade verificado para cada uma das malhas, podem ser visualizados na tabela 3. Os dados relativos ao número de condicionamento para cada uma das malhas, por sua vez, podem ser observados na tabela 4.

Tabela 3: Energia de deformação (U) e número de graus de liberdade (NGL) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da figura 5, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	U			NGL		
	1	2	3	1	2	3
Heav MEFGE + Crack1	123,5823	128,6124	130,2091	176	650	2510
Heav MEFGE + SCrack1	123,9149	128,9255	130,3277	180	656	2520
Heav Linear MEFGE + SCrack1	126,8912	129,7281	130,5265	196	680	2560
Crack1, nós duplicados	124,8612	128,9767	130,3004	180	662	2538
SCrack1, nós duplicados	126,9056	129,7403	130,5338	180	662	2538

As taxas de convergência da solução do problema em análise, bem como as taxas de crescimento dos números de condicionamento para as distintas estratégias de enriquecimento, podem ser observadas, respectivamente, nas figuras 10 e 11.

Mais uma vez, as diferentes combinações de enriquecimento empregadas demonstraram taxas ótimas de convergência, incluindo desta vez a combinação Heav MEFGE + SCrack1. Nota-se também pela figura 10 que a melhor solução, neste caso, foi a que descreveu a descon continuidade geometricamente a partir da duplicação dos nós da malha e se utilizou do enriquecimento de trinca, modo I, sob abordagem estável (SCrack1, nós duplicados), como era esperado. É interessante notar, entretanto, que a solução mais próxima desta não foi a que se utilizou do mesmo artifício via MEFGE, mas a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1, validando a

Tabela 4: Números de Condicionamento (NC) obtidos para as malhas 1, 2 e 3 da figura 5, conforme as estratégias de enriquecimento adotadas.

Estratégia de Enriquecimento	NC		
	1	2	3
Heav MEFGE + Crack1	1,32E+04	5,83E+04	2,47E+05
Heav MEFGE + SCrack1	1,32E+04	5,65E+04	2,35E+05
Heav Linear MEFGE + SCrack1	1,11E+17	1,00E+17	1,04E+17
Crack1, nós duplicados	1,34E+04	6,17E+04	2,63E+05
SCrack1, nós duplicados	1,18E+04	5,30E+04	2,31E+05

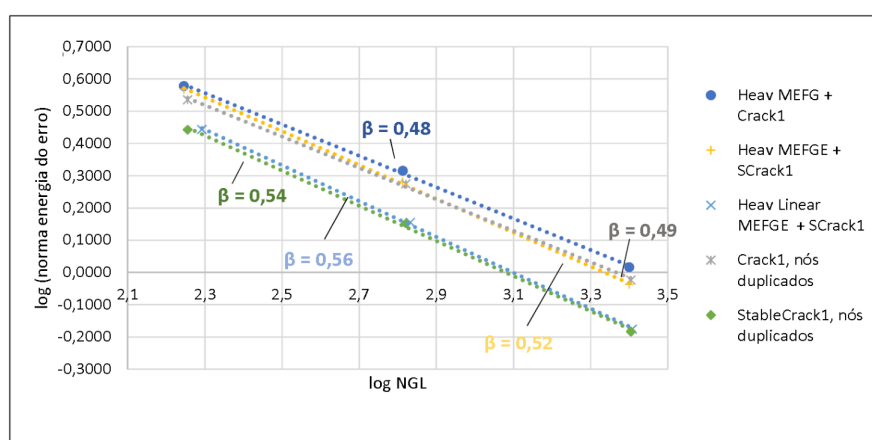


Figura 10: Análise de convergência da solução, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

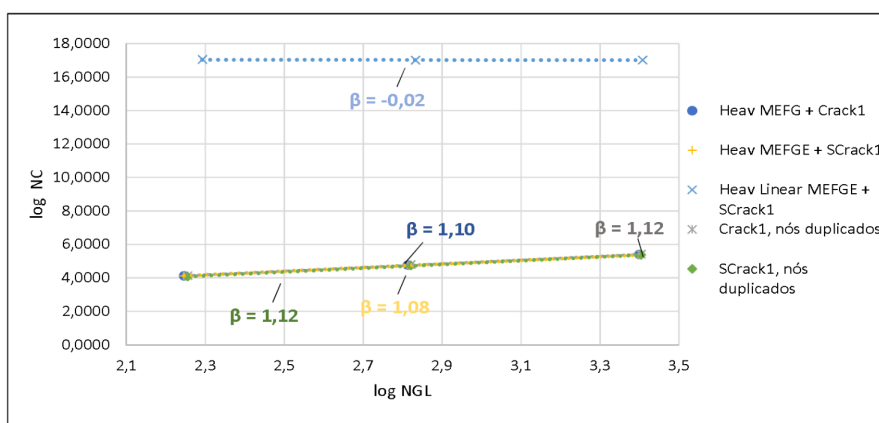


Figura 11: Crescimento dos números de condicionamento das respectivas matrizes de rigidez escalonadas, conforme as estratégias de enriquecimento, para o problema em análise.

implementação realizada e demonstrando também o bom desempenho da estratégia estável. As tendências observadas para o número de condicionamento neste caso (figura 11) se mantiveram as mesmas relatadas para o caso I, excetuando-se a anomalia que ocorreu com a combinação

Heav Linear MEFGE + SCrack1, na qual o número de condicionamento apresentado em todas as malhas foi significativamente superior ao verificado para as outras combinações, embora tenha apresentado uma taxa de crescimento praticamente nula. Tal resultado atípico indica a necessidade de mais estudos sobre o tema.

5 CONCLUSÃO

A partir das simulações realizadas, foi possível verificar o bom desempenho do MEFGE na análise linear de problemas bidimensionais envolvendo uma trinca. Em particular, a combinação Heav Linear MEFGE + SCrack1 rendeu taxas de convergência ótimas e um comportamento satisfatório no que concerne ao erro da aproximação. Constatou-se, assim como em Gupta *et al.* (2013), a instabilidade envolvendo a utilização, sob abordagem do MEFGE, do enriquecimento de Heaviside padrão, devido à impossibilidade de bem reproduzir o erro $u - I_{\omega_j}(u)$. Neste trabalho, contudo, além de se considerar a trinca coincidente com a aresta do elemento com em Gupta *et al.* (2013) foram analisadas as situações em que a trinca atravessa o elemento e também a descrição geométrica da trinca com a utilização de nós duplos.

Em relação ao número de condicionamento, com o problema em análise, não se pôde avaliar se há vantagem perceptível, no que concerne a esse aspecto, na utilização do MEFGE, uma vez que os valores obtidos para o MEFGE já se encontravam suficientemente próximos do que seria verificado a partir do MEF. Tal constatação fomenta a necessidade de maiores estudos acerca do tema. Além disso, como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a análise do comportamento das duas abordagens (MEFG e MEFGE) no que diz respeito aos elementos de mistura, a partir da determinação, para diferentes malhas, do(s) fator(es) de intensidade de tensão.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem e agradecem o importante apoio das agências de pesquisa brasileiras FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (projeto 308932/2016-1).

REFERÊNCIAS

- Alves, P. D. *Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Maio 2012.
- Alves, P. D.; Barros, F. B.; Pitangueira, R. L. S. An object-oriented approach to the Generalized Finite Element Method. *Advances in Engineering Software* 59, p. 1-18, 2013.
- Babuška, I.; Banerjee, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 201-204, p. 91-111, 2012.
- Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM J Numerical Analysis* 31 (4), p. 745-981, 1994.
- Babuška, I.; Melenk, J. M. The partition of unity finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40, p. 727-758, 1997.

Barros, F. B. *Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Tese (Doutorado) — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, 2002.

Belsley, D. A.; Kuh, E.; Welsch, R. E. The Condition Number. In: *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1980, p. 100-104. ISBN 0-471-05856-4.

Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45, p. 601-620, 1999.

Belytschko, T.; Gracie, R.; Ventura, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering* 17 (4): 24, 2009.

Chessa, J.; Wang, H.; Belytschko, T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57, p. 1015-1038, 2003.

Duarte, C. A. *The hp cloud method*. Tese (Doutorado) — University of Texas, Austin, TX, EUA, Dezembro 1996.

Duarte, C. A.; Babuška, I.; Oden, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computer & Structures* 77 (2), p. 215-232, 2000.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. *H_p clouds - A meshless method to solve boundary-value problems*. Technical Report 95-05, TICAM — University of Texas, Austin, TX, EUA, Maio 1995.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. An *hp* adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, p. 237-262, 1996.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. *H_p clouds - an hp meshless method*. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 12, p. 673-705, 1996.

Fries, T-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75, p. 503-532, 2008.

Fries, T-P.; Belytschko, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84, p. 253-304, 2010.

Gupta, V.; Duarte, C. A.; Babuška, I.; Banerjee, U. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 266, p. 23-39, 2013.

Gupta, V.; Duarte, C. A.; Babuška, I.; Banerjee, U. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 289, p. 355-386, 2015.

Lins, R. M. *A Posteriori Error Estimations for the Generalized Finite Element Method and Modified Versions*. Tese (Doutorado) — EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil, Agosto 2015.

Melenk, J. M. *On Generalized Finite Element Methods*. Tese (Doutorado) — University of Maryland, College Park, MD, EUA, 1995.

Melenk, J. M.; Babuška, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, p. 289-314, 1996.

- Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T. A Finite element method for crack growth without re-meshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46, p. 131-150, 1999.
- Nguyen, V. P.; Rabczuk, T.; Bordas, S.; Duflot, M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation* 79, p. 763-813, 2008.
- Oden, J. T.; Duarte, C. A.; Zienkiewicz, O. C. A new cloud-based *hp* finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 153, p. 117-126, 1998.
- Oliveira, T. S.; Barros, F. B. Avaliação do Enriquecimento Polinomial no Método dos Elementos Finitos Generalizados. *Anais do XII Simpósio de Mecânica Computacional*, p. 484-491, 2016, Diamantina, MG, Brasil.
- Silva, L.L. *Sistema Gráfico Interativo para Análise de Nucleação e Propagação de Trincas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2016.
- Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications*. New York, NY, USA: Academic Press, Inc., 1976. ISBN 0-12-673650-2.
- Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181 (1-3), p. 43-69, 2000.
- Szabó, B. A.; Babuška, I. *Finite Element Analysis*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1991. ISBN 0-471-50273-1.