



## **AVALIAÇÃO PARAMÉTRICA COMPUTACIONAL DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO CONSIDERANDO ELU E ELS**

**Alan Barbosa Costa**

**Francisco de Assis Viana Binas Júnior**

**Fábio Martins Gonçalves Ferreira**

**Eduardo Nobre Lages**

alan.costa@ctec.ufal.br

binasjunior@gmail.com

fabio.ferreira@lccv.ufal.br

enl@lccv.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Laboratório de Computação Científica e Visualização – LCCV

Avenida Lourival Melo Mota, 57072-900, Alagoas, Maceió, Brasil

**Resumo.** *A capacidade de modelagem, análise e detalhamento de estruturas está associada ao desenvolvimento de módulos computacionais que disponibilizem cada vez mais recursos aos projetistas, buscando produtividade, qualidade e atendimento às normas. Há uma demanda por sistemas computacionais que realizem o processo de análise, dimensionamento e detalhamento de estruturas de forma acoplada e otimizada. As variáveis que influenciam diretamente no custo das estruturas são a quantidade de armadura e o custo da seção de concreto, que se divide no custo das fôrmas e no volume de concreto. Desenvolve-se neste trabalho um módulo computacional que acopla todas estas etapas para vigas retangulares, realizando a análise estrutural através do método da rigidez direta e o detalhamento conforme a NBR 6118/2014, apresentando relatórios com os esforços de cálculo referentes aos ELU, com as seções geradas (que são obtidas variando-se as dimensões e a resistência do concreto) e com o detalhamento, juntamente com as verificações referentes aos ELS e o custo, através da coleta de preços no ORSE e no SINAPI. Técnicas de penalização no custo final serão adotadas nas seções que infringirem itens normativos para apresentar ao projetista uma série de seções viáveis, organizadas em função do custo final, auxiliando na decisão acerca das seções das vigas a serem utilizadas em seus projetos.*

**Palavras-Chave:** Vigas, Concreto armado, ELU, ELS.

---

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering  
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil,  
November 5-8, 2017.

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, torna-se praticamente inviável a concepção, análise e detalhamento de uma estrutura sem o auxílio de módulos computacionais. A partir do projeto arquitetônico, os projetistas estruturais têm a missão de lançar, dimensionar e detalhar a estrutura da forma mais econômica possível, considerando o custo direto (custos dos materiais, mão de obra e encargos sociais) e as técnicas executivas, de forma que a estrutura obedeça aos requisitos presentes nas normas vigentes. O primeiro passo do projeto consiste no lançamento da estrutura, determinando a locação dos elementos e realizando um pré-dimensionamento destes. Em seguida, parte-se para o processamento dos esforços e análise dos deslocamentos da estrutura. O processamento poderá ser realizado com o auxílio de diversos modelos (vigas contínuas, analogia de grelha, elementos finitos, etc.), a partir de algum dos métodos previstos na NBR 6118 (ABNT, 2014).

Após o processamento, parte-se para o detalhamento e edição final das pranchas de desenho, para a posterior liberação do projeto para a execução. Contudo, caso a etapa de pré-dimensionamento dos elementos não tenha sido realizada satisfatoriamente, corre-se o risco de ter que reprocessar a estrutura em virtude de os elementos não resistirem aos esforços atuantes ou não respeitarem aos estados limites de serviço, representando um retrabalho para o projetista, ou ainda que os elementos estruturais possam estar superdimensionados, ocasionando gastos desnecessários para a obra ou, novamente, retrabalho para o projetista.

Ao longo dos anos, os projetistas têm buscado entregar melhores projetos em prazos menores, a fim de satisfazer perfeitamente as necessidades de seus clientes em um mercado cada vez mais disputado. A fim de reduzir esses prazos, várias ferramentas para a automatização dos projetos têm surgido, com recursos de pré e pós processamentos avançados e modelos de análise estrutural sofisticados. Porém, ainda há uma certa deficiência no tocante à automatização da determinação das dimensões ótimas dos elementos estruturais.

O presente trabalho propõe uma ferramenta que apresenta uma série de soluções viáveis de vigas de concreto armado, muito próximos da seção ótima, sem a utilização de métodos explícitos de otimização. Inicialmente, desenvolve-se um módulo de análise estrutural de vigas retangulares de eixo reto submetidas a diversos tipos de carregamentos, para em seguida realizar o dimensionamento e detalhamento das seções e apresentá-las em função de seu custo, considerando os requisitos relativos aos ELU e ELS preconizados pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

## 2 METODOLOGIA

Inicialmente, um arquivo de dados é passado com a definição das cargas atuantes, comprimentos dos tramos da viga, classe de agressividade ambiental, comprimento das barras que irão discretizar o modelo, etc. A análise estrutural é realizada com as ferramentas do método da rigidez direta, através de conceitos da análise matricial. Em seguida, o dimensionamento, detalhamento e verificação dos estados limites de serviço de uma viga de concreto armado de seção retangular é realizada segundo o preconizado pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Para a avaliação paramétrica insere-se o intervalo de valores no campo em que se trata das dimensões da seção transversal dentro do arquivo de entrada. Deve-se definir também valores para a resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) e seus respectivos custos, custos de formas, aço. A

partir daí o custo das seções viáveis é organizado apresentando as melhores seções para as condições de carregamento definidas inicialmente.

## 2.1 Análise estrutural pelo método da rigidez direta

No método da rigidez direta, a estrutura é discretizada em barras com comprimentos pré-fixados e todos os nós são considerados restritos. A adoção da idealização do comportamento de barra para a análise de vigas de concreto armado, sem a consideração de efeitos de segunda ordem e desconsiderando as não-lineares físicas e geométricas, consiste em uma boa aproximação, em virtude do regime de pequenas deformações presentes nestas estruturas. Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014) os resultados de uma análise linear podem ser empregados para a verificação de estados limites de serviço e últimos, devendo, em princípio, ser utilizado o módulo de elasticidade secante  $E_{cs}$ .

Para este trabalho, foi adotada a hipótese de vigas de Euler-Bernoulli, uma vez que os efeitos de cisalhamento seriam de difícil mensuração, em virtude do exposto anteriormente, já que diversas seções serão analisadas. Segundo Martha (2010), as hipóteses fundamentais para a idealização do comportamento de barras são que as seções permanecem planas após a deformação das vigas; o ângulo de rotação  $\theta$  (mostrado na Figura 1) da seção transversal é muito pequeno e pode ser aproximado por sua tangente; as deformações na direção transversal da barra são desprezadas e pode-se considerar que as barras estão submetidas a um estado plano de tensões. Além do mais, considera-se que as barras têm graus de liberdade apenas verticais e rotacionais, desprezando-se os efeitos axiais.

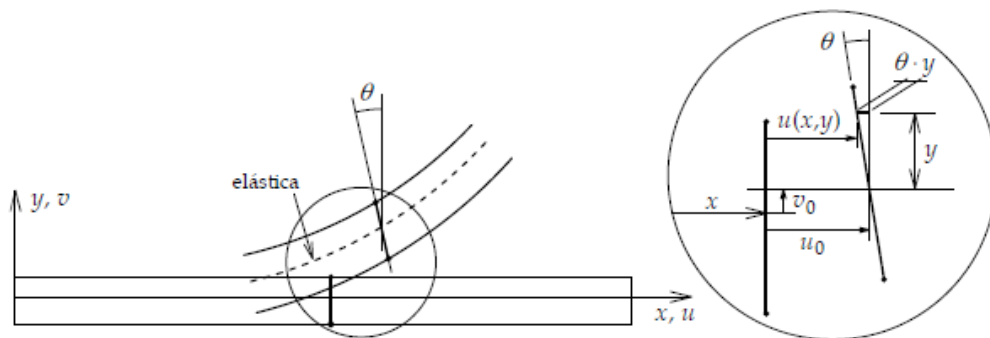


Figura 1. Campo de deslocamento de uma barra. Fonte: Martha (2010).

A essência do método da rigidez direta consiste na determinação da matriz de rigidez local do sistema, que é obtida de acordo com os coeficientes de rigidez das barras quando submetidas a deslocamentos unitários (rotações e deslocamento transversal). A matriz de rigidez local  $[K_{local}]$  de uma barra sem articulações é dada por

$$k = \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 4EI/l & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 2EI/l & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que  $EI$  é a rigidez à flexão e  $l$  é o comprimento da barra. No caso de a barra apresentar uma articulação na extremidade inicial, essa matriz passa a ser dada por

$$k = \begin{bmatrix} 3EI/l^3 & 0 & -3EI/l^3 & 3EI/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3EI/l^3 & 0 & 3EI/l^3 & -3EI/l^2 \\ 3EI/l^2 & 0 & -3EI/l^2 & 3EI/l \end{bmatrix} \quad (2)$$

e no caso da articulação se apresentar na extremidade final da barra, essa matriz passa a ser dada por

$$k = \begin{bmatrix} 3EI/l^3 & 3EI/l^2 & -3EI/l^3 & 0 \\ 3EI/l^2 & 3EI/l & -3EI/l^2 & 0 \\ -3EI/l^3 & -3EI/l^2 & 3EI/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Essas três matrizes foram obtidas na literatura, em especial com o apresentado em Martha (2010).

Os eixos locais das barras e global da estrutura se confundem, de forma a dispensar a necessidade de implementação de uma matriz de rotação, já que apenas vigas de eixo reto estão sendo consideradas. A matriz de rigidez global  $[K]$  é obtida por uma superposição das matrizes de rigidezes locais. Inicialmente, aquela é criada com todos os coeficientes nulos. Em seguida, a contribuição de cada uma das barras, uma de cada vez, é somada na matriz  $[K]$ , como apresentado em Martha (2010). Portanto,

$$[K] = \sum_{n_{barras}} k_{local} \quad (4)$$

O procedimento supracitado é apresentado para uma viga com 3 barras e 4 nós. Os coeficientes da  $[K_{local}]$  de cada barra é descrito pelos índices a, b e c, apresentados na Fig. 2. A montagem esquemática da matriz de rigidez global  $[K]$  é apresentada na Eq. (5). Uma marcante característica desta matriz é sua esparsidade, além da sua simetria. Tais características permitem a utilização de procedimentos para a minimização do custo computacional associado à sua montagem e utilização, como a utilização da matriz triangular (superior ou inferior). Contudo, tais procedimentos não foram adotados neste trabalho, já que o custo da resolução do sistema de equações não é um fator impactante no custo computacional total da análise paramétrica.

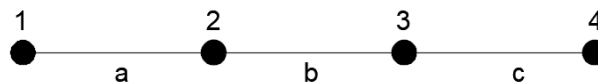


Figura 2. Exemplo da montagem da matriz de rigidez global

$$K = \begin{bmatrix} a & a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+b & a+b & b & b & 0 & 0 \\ a & a & a+b & a+b & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & b+c & b+c & c & c \\ 0 & 0 & b & b & b+c & b+c & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c & c \end{bmatrix} \quad (5)$$

O passo seguinte da análise estrutural consiste na montagem do vetor de forças locais. Os tipos de carregamentos adotados neste trabalho são: cargas e momentos concentrados e cargas uniforme e uniformemente variáveis distribuídas. Conforme apresentado por Martha (2010), o

vetor  $\{fe\}$  de cargas equivalentes nodais de cada barra tem como ordem o número de graus de liberdade de cada barra, que neste trabalho é igual a 4. O vetor  $\{fe\}$  é obtido através do método dos deslocamentos. Para realizar a montagem do vetor  $\{F\}$  de forças globais deve-se proceder de modo semelhante ao apresentado na montagem da matriz  $[K]$ , porém de forma mais simples, visto que aqui se trata da montagem de um vetor. O vetor  $\{P\}$  representa o conjunto de forças e momentos externos que atua diretamente sobre os nós da estrutura. Como no caso anterior,

$$\{F\} = \sum_{n_{forças}} \{fe\} + \{P\} \quad (6)$$

A consideração dos apoios é feita através da inserção de um coeficiente de rigidez fictício com valor muito alto, da ordem de  $10^{10}$ . Assim, a modificação na matriz de rigidez  $[K]$  é feita de forma localizada e rápida.

A partir da montagem da matriz de rigidez e da matriz de forças é montado o seguinte sistema de equações lineares, determinando assim os deslocamentos nodais de cada barra:

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (7)$$

Com a obtenção dos deslocamentos de cada nó e consequentemente de cada barra, procede-se à obtenção dos esforços internos e o consequente tratamento desses esforços para a obtenção deles na convenção usualmente adotada. Como resultado final do módulo de análise estrutural são obtidos deslocamentos e esforços que serão utilizadas na etapa seguinte de dimensionamento das seções e nas verificações relativas aos estados limites de serviço.

## 2.2 Detalhamento das seções de concreto armado

Como preconizado pela NBR 6118 (ABNT, 2014), o detalhamento das estruturas de concreto armado deve ser feito para os estados limites últimos (ELU), que estão relacionados ao colapso ou outra forma de ruína da estrutura, e para os estados limites de serviço (ELS), que neste trabalho foram analisados os estados referentes às deformações excessivas e à abertura de fissuras.

A NBR 6118 (ABNT, 1980) em seu item 4.2.3.1.C apresenta uma recomendação acerca da altura de vigas, para se atender a critérios de deformações excessivas, como forma de pré-dimensionamento, e é dada por

$$d \geq \frac{l}{\omega_2 \cdot \omega_3} \quad (8)$$

em que  $l$  é o vão da viga e  $\omega_2$  e  $\omega_3$  são apresentados nas Tabs. 1 e 2.

Tabela 1. Valores de  $\omega_2$

| Vigas                 | $\omega_2$ |
|-----------------------|------------|
| Simplesmente apoiadas | 1,0        |
| Contínuas             | 1,2        |
| Duplamente engastadas | 1,7        |
| Em balanço            | 0,5        |

Tabela 2. Valores de  $\omega_3$

| Aço  | $\omega_3$ |
|------|------------|
| CA25 | 25         |
| CA50 | 17         |
| CA60 | 15         |

A partir do pré-dimensionamento realizado com a Eq. (8) será necessário realizar o dimensionamento para o ELU da seção e ainda a verificação dos ELS. Tal procedimento nem sempre é efetivo, uma vez que a expressão apresentada apenas leva em consideração a condição de vinculação e o vão dos tramos da viga, não levando em consideração os custos e quantidades

dos insumos em sua construção nem tampouco a magnitude das cargas, além das classes de resistência do concreto. É exatamente neste contexto em que este trabalho se insere, apresentando a seguir um módulo para o dimensionamento e detalhamento de vigas de concreto armado chegando a valores próximos aos ótimos.

A equação básica para o dimensionamento à flexão de vigas de concreto armado é

$$\frac{b_w \cdot d^2}{M_d} = \frac{1}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \varepsilon \cdot (1 - \frac{\lambda \cdot \varepsilon}{2})} \quad (9)$$

em que, conforme a NBR 6118 (ABNT, 2014),  $f_{cd} = f_{ck}/1,4$ .

Tabela 3. Variáveis em função do  $f_{ck}$

| Variável      | $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ | $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$                  |
|---------------|------------------------------|--------------------------------------------|
| $\alpha_c$    | 0,85                         | $0,85 \cdot (1 - \frac{f_{ck} - 50}{200})$ |
| $\lambda$     | 0,80                         | $0,80 - (\frac{f_{ck} - 50}{400})$         |
| $\varepsilon$ | 0,45                         | 0,35                                       |
| $f_{ctm}$     | $0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$     | $2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck})$    |

Conforme o item 14.6.4.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014), a capacidade de rotação dos elementos está ligada à posição da linha neutra no ELU. Além disso, quanto menor for a profundidade da linha neutra, melhor será essa capacidade. Portanto, para proporcionar o adequado comportamento em relação à ductilidade de vigas e lajes, o valor de  $\varepsilon$  deve ser limitado de acordo com o apresentado na Tab. 3.

Ainda de acordo com a Eq. (9), tem-se que  $b_w$  é a largura da seção transversal,  $d$  é sua altura útil e  $M_d$  é o momento fletor de cálculo. A partir da Eq. (9), começa o procedimento efetivo do módulo proposto, de acordo com os seguintes passos:

1. Determina-se, para a largura e classe de resistência do concreto especificado, a altura da viga que resiste ao momento atuante com armadura simples, com a profundidade máxima da linha neutra ( $\varepsilon$ ) apresentada na Tab. 3;
2. A partir deste valor de altura, é definido um intervalo dado por  $(h/2, 2 \cdot h)$  de forma a se gerar um grande intervalo de alturas que possivelmente resistem aos esforços de flexão e de cisalhamento;
3. Para cada tripla  $f_{ck}$ -largura-altura é feito o detalhamento das peças, determinando assim a quantidade de concreto de cada seção, armadura e formas, quantificando assim o seu custo;
4. O custo encontrado anteriormente será penalizado caso alguma restrição de projeto seja violada, a saber: flechas máxima, rompimento das bielas comprimidas no mecanismo da treliça de Morsch (1948), abertura de fissuras maior que a limite, taxa máxima de armadura;
5. Finalmente, os custos são organizados em ordem decrescente, apresentado um rol de seções viáveis que podem ser utilizadas nos projetos.
6. Ressalta-se que o procedimento acima descrito é repetido para cada valor de resistência do concreto, permitindo ao usuário observar a influência de cada resistência e as dimensões das melhores seções em seus projetos.

### 2.2.1 Cálculo e detalhamento à flexão

Como dito anteriormente, a equação básica para o dimensionamento à flexão é a Eq. (9). Além do mais, o momento atuante deve ser comparado a um momento mínimo, dado por

$$M_{d,min} = 0,80 \cdot f_{ctksup} \cdot W_0 \quad (10)$$

em que  $W_0$  é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada e  $f_{ctksup}$  é dado por

$$f_{ctksup} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (11)$$

Conforme Carvalho e Figueiredo Filho (2016), o detalhamento da armadura de flexão deve levar em consideração também a decalagem do diagrama de momentos, que como apresentado pela NBR 6118 (ABNT, 2014) deve ser considerada quando a armadura longitudinal for determinada a partir do equilíbrio da seção indeformada (Eq. (9)). A decalagem consiste na consideração dos efeitos provocados pela fissuração devida ao cisalhamento, que se propagam para além do ponto de máximo esforço de flexão.

Outra consideração importante a ser tratada no detalhamento à flexão refere-se à ancoragem das barras, que neste trabalho foi adotada apenas a ancoragem advinda da aderência entre o aço e o concreto. Como apresentado por Carvalho e Figueiredo Filho (2016), se não houvesse a aderência as barras da armadura não seriam submetidas aos esforços de tração, já que elas simplesmente deslizariam dentro da massa de concreto, não oferecendo nenhuma resistência aos esforços. Assim, tal mecanismo permite que os dois materiais com propriedades distintas possam ser considerados um só, de forma que os esforços resistidos pela armadura e pelo concreto sejam equilibrados e distribuídos segundo as hipóteses básicas de cálculo. Leonhardt e Mönning (1977) apresentam que a aderência é composta por três parcelas, que são a adesão, que tem natureza físico-química e representa o efeito de uma colagem provocada pela nata de cimento na superfície do aço. Outra parcela é dada pelo atrito, que é a força que ocorre na superfície de contato entre os dois materiais e se manifesta quando há tendência ao deslocamento relativo entre a armadura e o concreto. A última parcela refere-se ao engrenamento, que é a resistência mecânica ao arrancamento devida à conformação superficial das barras (nervuras das barras nervuradas).

O comprimento básico de ancoragem reto ( $l_b$ ) é dado por (Carvalho e Figueiredo Filho, 2016):

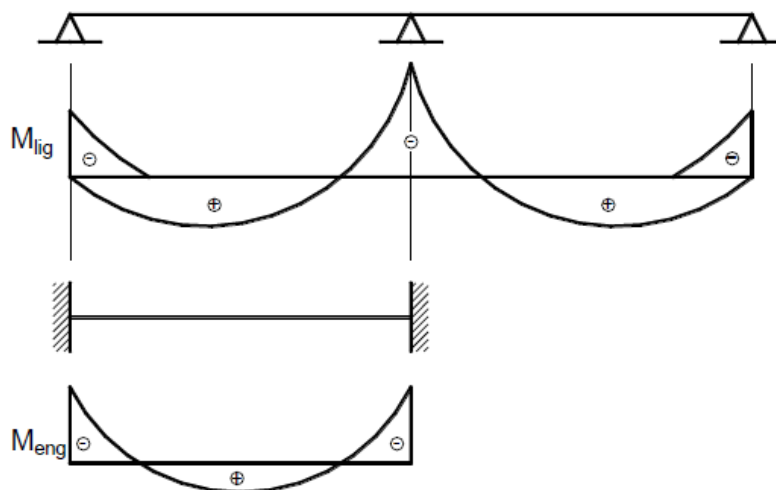
$$l_b = \frac{\emptyset}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \quad (12)$$

em que  $\emptyset$  é o diâmetro da barra,  $f_{yd}$  é a tensão de escoamento do aço e  $f_{bd}$  é função da conformação mecânica das barras (lisas, entalhadas ou nervuradas), da situação de aderência das barras (boa ou má) e do diâmetro da barra (a aderência fica dificultada para barras com bitola maior do que 32 mm). Com o comprimento básico de ancoragem determina-se o comprimento necessário de ancoragem, que pode ser reduzido caso exista uma maior área de armadura que a efetivamente necessária. Ressalta-se que a ancoragem pode ser reta ou com ganchos, ou ainda com o uso de grampos, contudo tal procedimento não está previsto pela NBR 6118 (ABNT, 2014), mas é utilizado por módulos computacionais comerciais, a exemplo do TQS©. Além do mais, deve-se considerar uma área mínima de armadura junto aos apoios, de forma a realizar a ancoragem das bielas comprimidas do mecanismo de treliça.

Carvalho e Figueiredo Filho (2016) apresentam que depois de se garantir a ancoragem das barras ao longo das peças e junto aos apoios deve-se levar em conta, principalmente em apoios extremos, a solidariedade dos pilares com a viga, que permite uma transmissão parcial de momentos. De acordo com o item 14.6.6.1 da NBR 6118 (ABNT, 2014) a consideração dos pilares nas vigas pode ser feita através de um momento dado por:

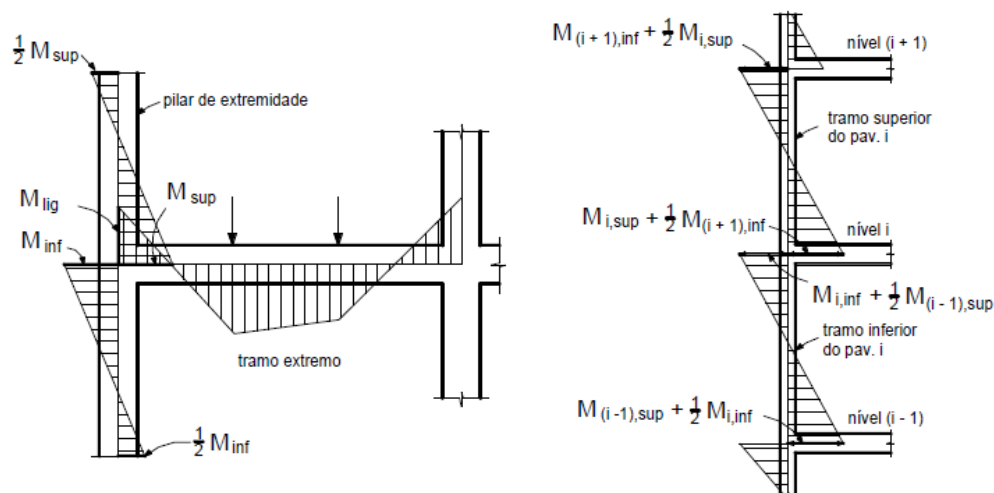
$$M_{lig} = \frac{r_{inf} + r_{sup}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{viga}} \cdot M_{eng} \quad (13)$$

Bastos (2017) apresenta, na Fig. 3, a distribuição de momentos conforme a Eq. (13).



**Figura 3. Consideração simplificada dos momentos de engastamento.** Fonte: Bastos (2017).

A Fig. 4, também de Bastos (2017), apresenta a distribuição dos momentos fletores considerando um pórtico de um edifício em um pilar de extremidade.



**Figura 4. Distribuição simplificada dos momentos em um pilar extremo.** Fonte: Bastos (2017).

Deve-se ressaltar que a inclusão da consideração dos momentos de engastamento de forma simplificada mostrada acima levaria a uma inclusão de mais itens no arquivo de entrada, como o comprimento e a seção transversal dos pilares de extremidade, o que tornaria o arquivo muito

carregado. Em virtude disso, neste trabalho foi adotada uma verificação explícita dos momentos de engastamento em apoios simples, de forma que é permitido ao usuário definir o apoio simplesmente apoiado ou ainda o definir desta mesma forma acrescido de um percentual de engastamento, o que reduz os momentos ao longo da viga e transfere-os aos apoios.

A bibliografia define um parâmetro  $\gamma$ , denominado fator de rigidez, que relaciona a rigidez da ligação com a rigidez do elemento a ele ligado, variando entre 0 (ligação simplesmente apoiada ou rotulada) e 1 (engaste perfeito). Ferreira, El Debs e Elliot (2002) propuseram um sistema de classificação para a rigidez das ligações que pode ser usado na utilização desta ferramenta (Fig. 5). Observa-se que valores de percentuais de engastamento da ordem de 14% permitem classificar as ligações como articuladas (apoio simples), ao passo que valores superiores a 89% classificam as ligações como rígidas (engaste perfeito).

| REGIÃO                                                        | LIMITES                |
|---------------------------------------------------------------|------------------------|
| Zona I – ligação articulada                                   | $0 \leq \gamma < 0,14$ |
| Zona II – ligação semi-rígida com baixa resistência à flexão  | $0,14 < \gamma < 0,40$ |
| Zona III – ligação semi-rígida com média resistência à flexão | $0,40 < \gamma < 0,67$ |
| Zona IV – ligação semi-rígida com alta resistência à flexão   | $0,67 < \gamma < 0,89$ |
| Zona V – ligação rígida                                       | $0,89 < \gamma \leq 1$ |

**Figura 5. Classificação das ligações em função de sua rigidez.** Fonte: Ferreira, El Debs e Elliot (2002).

A NBR 6118 (ABNT, 2014) em seu item 17.3.5.2.4 determina um valor máximo para a armadura de tração em vigas, que é de 4%, considerando a armadura tracionada e comprimida, na região fora de emendas. Esta imposição normativa representa uma penalização no custo das seções que a ultrapassarem, como apresentado no item 2.2 deste trabalho.

Outras recomendações normativas deverão ser atendidas, em especial a armadura de pele. Verifica-se que para seções com altura igual ou maior a 60 cm (item 17.3.5.2.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014)) deverá ser disposta uma armadura lateral de  $0,10\% \cdot A_c$  (área bruta da seção de concreto) em cada face da viga e composta por barras de aço CA-50 ou CA-60, com espaçamento não superior a 20 cm. Além do mais, pode-se adotar como limite superior a esta armadura a área de 5 cm<sup>2</sup>. Ressalte-se que a armadura de tração ou de compressão não podem ser levadas em consideração no cômputo da armadura de pele.

Outros itens normativos devem ser obedecidos, a exemplo do espaçamento mínimo entre as barras, cobrimentos mínimos em função da classe de agressividade e recomendações de ordem prática, como: não utilizar barras de diâmetro inferior a 10 mm para a armadura comprimida e utilizar ao menos duas barras para a armadura tracionada ou comprimida.

## 2.2.2 Cálculo e detalhamento ao cisalhamento

O cálculo e detalhamento da armadura de combate ao cisalhamento é feito, como citado anteriormente, com o auxílio da analogia da treliça de Mörsch (1948) que propôs uma teoria em que o mecanismo resistente da viga no estágio II (fissurada) pudesse ser associado ao de uma treliça de banzos paralelos, em que o banzo superior é representado pelo concreto comprimido e o banzo inferior pela armadura tracionada, sustentada pelos pendurais (armadura de cisalhamento) e pelas bielas de concreto comprimidas.

Neste trabalho foi adotado o Modelo de Cálculo I proposto pela NBR 6118 (ABNT, 2014), que verifica se o mecanismo resistente das bielas é maior que o esforço atuante (este item é mais uma penalização no custo final das peças). Além do mais, considera que as diagonais de compressão (bielas) são inclinadas de 45° e admite ainda uma parcela complementar,  $V_c$ , constante independentemente de  $V_{sd}$ . Portanto, as equações que regem o problema são:

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \frac{(1 - f_{ck})}{250} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (14)$$

$$V_c = 0,60 \cdot \frac{0,7 \cdot f_{ctm}}{1,40} \cdot b_w \cdot d \quad (15)$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sd} - V_c}{0,90 \cdot d \cdot f_{ywd}} \quad (16)$$

Na Eq. (16)  $f_{ywd}$  é equivalente a  $f_{yk}/1,15$ , onde  $f_{yk}$  é a tensão de escoamento do aço. Deve-se ressaltar que o máximo valor de  $f_{ywd}$  é de 435 MPa = 43,5 kN/cm<sup>2</sup>. A variável  $A_{sw}$  é a área de cada estribo e  $s$  é o espaçamento.

A NBR 6118 (ABNT, 2014) ainda fixa valores máximos para o espaçamento entre os estribos e entre as pernas dos estribos. Uma observação conjunta das Eqs. (15) e (16) permite concluir que existem casos em que a armadura de cisalhamento poderia ser desprezada (casos em que  $V_c > V_{sd}$ ), porém a citada norma também estabelece limites mínimos para a armadura de cisalhamento. Observa-se que em função das limitações de espaçamento máximo e armadura mínima, seções com grandes dimensões levam a altos valores de  $V_c$  e pequenos valores para a armadura, de forma que ainda seria necessário o atendimento à armadura mínima, demonstrando que o aumento das dimensões da seção pode levar a um aumento do custo desta armadura, já que os estribos são dispostos ao longo de todo o perímetro das peças. Alguns trabalhos ao realizarem a otimização de vigas de concreto armado levaram em consideração apenas a armadura de flexão, desprezando os efeitos do cisalhamento, a exemplo de Soares (1997) e Klein (2008).

## 2.3 Verificação dos estados limites de serviço

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os estados limites de serviço são aqueles que se relacionam com a durabilidade, conforto, aparência e boa utilização das estruturas, com relação aos usuários e possíveis equipamentos que estejam sobre elas.

Neste trabalho, são considerados os estados limites de deformação excessivas e os de formação de fissuras. As deformações são consequência imediata do comportamento do material concreto armado, que durante a análise estrutural é considerado um material elástico linear perfeito. Já as fissuras são consequência da baixa resistência à tração deste material, que se apresenta como um efeito inevitável nas estruturas, mas que deve ser mantido a níveis prescritos em normas.

Como apresentado por Carvalho e Figueiredo Filho (2016), em estruturas bem projetadas e construídas com cargas atuantes previstas, quando as fissuras apresentarem valores que respeitem os limites do item 13.4.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014) apresentados na Fig. 7 não haverá perda da durabilidade ou da segurança quanto aos estados limites últimos.

| Tipo de concreto estrutural | Classe de agressividade ambiental (CAA) e tipo de protensão | Exigências relativas à fissuração | Combinação de ações em serviço a utilizar |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------|
| Concreto simples            | CAA I a CAA IV                                              | Não há                            | –                                         |
| Concreto armado             | CAA I                                                       | ELS-W $w_k \leq 0,4$ mm           | Combinação frequente                      |
|                             | CAA II e CAA III                                            | ELS-W $w_k \leq 0,3$ mm           |                                           |
|                             | CAA IV                                                      | ELS-W $w_k \leq 0,2$ mm           |                                           |

**Figura 6. Abertura máxima de fissuras.** Fonte: NBR 6118 (2014).

Como apresentado na Fig. 6, a combinação a ser utilizada para verificação da abertura de fissuras é a frequente. O parâmetro  $\omega_k$  está presente no arquivo de entrada, mas geralmente equivale a 0,40 (Tabela 11.2 da NBR 6118 (ABNT, 2014)).

Já para limites relativos à deformação excessiva, este é tomado como um percentual do vão da viga. Tal parâmetro está presente na Tabela 13.3 da NBR 6118 (ABNT, 2014). A combinação a ser utilizada para a verificação deste estado limite de serviço é a quase permanente. A partir da determinação da deformada elástica com a devida combinação, deve-se partir para a consideração de outros efeitos importantes no processo de deformação, a exemplo o da não homogeneidade da seção proveniente da fissuração e da retração.

Branson (1968) propôs um modelo para a determinação da inércia média de uma viga, que representa os trechos fissurados e não fissurados. É baseado em um modelo semiprobabilístico, no qual a variação da tensão ao longo da seção e do comprimento é tomada de forma simplificada, com o apoio de expressões empíricas que fornecem essa inércia média. Desta forma, ele buscou traduzir, de forma aproximada, o efeito da fissuração do concreto, quando submetido à flexão, na determinação das flechas imediatas.

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2016), a fluência é o fenômeno em que surgem deformações ao longo do tempo em um corpo solicitado por uma tensão constante. Parte desta deformação é reversível, enquanto que outra parte não o é. A NBR 6118 (ABNT, 2014) considera que a flecha final, juntamente com os efeitos da fluência, pode ser obtida, de maneira aproximada, pela multiplicação da flecha imediata (já com os efeitos da fissuração incluídos) por um fator  $\alpha_f$  dado por:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \quad (17)$$

em que  $\Delta\xi$  é função da idade de retirada do escoramento (parâmetro informado no arquivo de entrada) e  $\rho'$  é a taxa de armadura comprimida.

### 3 RESULTADOS

Esta seção será dividida em duas, uma que apresenta a comparação de resultados obtidos pela ferramenta proposta com resultados da literatura e a outra seção com resultados da avaliação paramétrica.

### 3.1 Validação

Carvalho e Figueiredo Filho (2016) apresentam um exemplo completo em que indica os esforços atuantes e o detalhamento de uma viga contínua, sendo dois tramos com 8 m de vão e uma carga uniformemente distribuída de 51,1 kN/m, com seção de 25 x 90 cm. Foi utilizado um concreto de 20 MPa. A Tab. 4 apresenta os resultados obtidos, para o detalhamento, por Carvalho e Figueiredo Filho (2016) e pela ferramenta desenvolvida neste trabalho.

Tabela 4. Resultados comparativos

| Variável                  | Carvalho e Figueiredo Filho (2016) | Ferramenta proposta   | Engastamento de 10%   |
|---------------------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Máximo momento positivo   | 230 kN·m                           | 229,95 kN·m           | 218,28 kN·m           |
| Máximo momento negativo   | 408,8 kN·m                         | 408,8 kN·m            | 395,17 kN·m           |
| Momento de engastamento   | -                                  | -                     | 27,25 kN·m            |
| Área da armadura positiva | 10,18 cm <sup>2</sup>              | 9,60 cm <sup>2</sup>  | 9,07 cm <sup>2</sup>  |
| Armadura utilizada        | 8 Ø 12,5 mm                        | 8 Ø 12,5 mm           | 8 Ø 12,5 mm           |
| Área da armadura negativa | 20,05 cm <sup>2</sup>              | 18,63 cm <sup>2</sup> | 17,87 cm <sup>2</sup> |
| Armadura utilizada        | 16 Ø 12,5 mm                       | 6 Ø 20,0 mm           | 6 Ø 20,0 mm           |
| Massa total de aço        | 385 kg                             | 380,18 kg             | 377,91 kg             |

Parte da diferença observada na Tab. 4 deve-se à consideração, por parte de Carvalho e Figueiredo Filho (2016), do método simplificado de engastamento apresentado na Eq. (9). Além do mais, em virtude de neste trabalho terem sido adotadas 6 (seis) barras para a armadura de flexão, resultou em uma maior altura útil, reduzindo a área necessária da armadura positiva. A última coluna da Tab. 4 apresenta os resultados para uma consideração explícita de engastamento de 10%. A redução da massa de aço quando da consideração do percentual de engastamento deve-se, primordialmente, pela diferença nas quantidades da armadura guia para os estribos, já que a consideração do engastamento reduz o comprimento dessa armadura no detalhamento. Carvalho e Figueiredo Filho (2016) ainda adotam procedimentos para a decalagem para a armadura negativa, o que acabou gerando um menor comprimento para as barras e, conseqüentemente, uma menor quantidade de armadura necessária.

Bastos (2017) apresentou um modelo de uma viga contínua com dois tramos de 7,19 m e uma carga uniformemente distribuída de 25,04 kN/m, com uma seção de 19 x 60 cm. Adotou-se um concreto de 25 MPa. A Tab. 5 apresenta os resultados obtidos por Bastos (2017) e pela ferramenta aqui proposta.

Bastos (2017) considera um modelo com apoios elásticos em suas extremidades. A ferramenta aqui proposta, através da consideração do engastamento parcial, adotou um percentual de 23%, de forma a obter o momento de engastamento parcial semelhante ao obtido pelo outro autor. Deve-se ressaltar que o autor utilizou uma redistribuição de momentos, reduzindo o negativo intermediário em 10% no detalhamento, o que proporcionou uma alteração no detalhamento e explica parte da diferença observada na Tab. 5, o que não está

disponível neste trabalho. Além disso, Bastos (2017) também realiza o detalhamento da peça de forma manual, o que possibilita uma melhor distribuição das armaduras, reduzindo a quantidade necessária.

Tabela 5. Resultados comparativos

| Variável                  | Bastos (2017)           | Ferramenta proposta   |
|---------------------------|-------------------------|-----------------------|
| Máximo momento positivo   | 80,54 kN·m              | 80,57 kN·m            |
| Máximo momento negativo   | 149,22 kN·m             | 149,24 kN·m           |
| Momento de engastamento   | 25,17 kN·m              | 25,13 kN·m            |
| Área da armadura positiva | 5,33 cm <sup>2</sup>    | 5,18 cm <sup>2</sup>  |
| Armadura utilizada        | 3 Ø 12,5 mm + 2 Ø 10 mm | 5 Ø 12,5 mm           |
| Área da armadura negativa | 8,89 cm <sup>2</sup>    | 10,41 cm <sup>2</sup> |
| Armadura utilizada        | 7 Ø 12,5 mm             | 6 Ø 16,0 mm           |
| Massa total de aço        | 136,28 kg               | 145,22 kg             |

A partir das duas comparações distintas, observa-se a semelhança nas respostas obtidas pela ferramenta desenvolvida neste trabalho e a solução de detalhamento manual apresentada pelos autores. Embora tenha sido obtida uma diferença percentual da ordem de 6% na quantidade final de armadura, observa-se que a ferramenta se encontra apta a produzir resultados realistas na próxima etapa de avaliação paramétrica.

### 3.2 Avaliação paramétrica

Junior Muñiz e Oliveira (2014) apresentam um estudo acerca da otimização de vigas de concreto armado, biapoiadas, submetidas a um carregamento uniformemente distribuído, seguindo os preceitos da NBR 6118 (ABNT, 2007). No trabalho citado, o detalhamento das barras não foi levado em consideração, apenas restrições relativas à taxa máxima de armadura e tensão máxima atuante nas bielas comprimidas do mecanismo de treliça. Além disso, a otimização foi realizada através do Excel, com a utilização do *Solver*. Foi analisada uma viga com 8 m de vão e uma carga uniformemente distribuída de 25 kN/m. A largura da viga foi adotada constante e igual a 12 cm. Os parâmetros das melhores seções obtidas neste trabalho e no trabalho de referência estão apresentados na Tab. 6.

Tabela 6. Resultados comparativos

| Variáveis   | Junior Muñiz e Oliveira (2014) | Ferramenta proposta |
|-------------|--------------------------------|---------------------|
| Altura (cm) | 97                             | 84                  |
| Custo (R\$) | 1.510,69                       | 1.623,36            |

Observa-se que a altura da viga do presente trabalho resultou menor que a do trabalho de referência, porém o custo apresentou-se ligeiramente maior. Uma explicação para as diferenças reside no fato de que considerações relativas ao detalhamento não foram avaliadas no trabalho de referência, tais como decalagem e ancoragem das barras, além de não ter sido levado em consideração a perda usualmente adotada nos projetos de concreto armado (10% da quantidade de aço). No contexto da ferramenta proposta, a solução apresentada no trabalho de referência foi a segunda melhor, com um custo de R\$ 1.643,43.

Os custos adotados para os insumos estão apresentados na Tab. 7.

Tabela 7. Custos adotados

|                                |        |
|--------------------------------|--------|
| Aço (R\$/kg)                   | 5,82   |
| Concreto (R\$/m <sup>3</sup> ) | 348,71 |
| Forma (R\$/m <sup>2</sup> )    | 42,93  |

Outro estudo feito refere-se ao modelo apresentado por Carvalho e Figueiredo Filho (2016), em que foi adotado um intervalo para variação do  $f_{ck}$  e da largura da viga. O  $f_{ck}$  foi adotado igual a 25, 35 e 45 MPa, a largura foi variada de 3 em 3 cm entre 12 e 42 cm e com os preços coletados no ORSE (Sistema de Orçamento de Obras de Sergipe) e SINAPI (Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil) no mês de abril/2017. Os custos adotados estão apresentados na Tab. 8 e os resultados comparativos das seções encontram-se na Tab. 9.

Tabela 8. Custos adotados

|                                                    |        |
|----------------------------------------------------|--------|
| Aço (R\$/kg) - 92763/SINAPI                        | 6,45   |
| Concreto 25 MPa (R\$/m <sup>3</sup> ) - 00098/ORSE | 301,71 |
| Concreto 35 MPa (R\$/m <sup>3</sup> ) - 00105/ORSE | 323,17 |
| Concreto 45 MPa (R\$/m <sup>3</sup> ) - 08288/ORSE | 440,61 |
| Forma (R\$/m <sup>2</sup> ) - 07396/ORSE           | 44,83  |

Tabela 9. Avaliação paramétrica

| $f_{ck}$ (MPa) | Largura (cm) | Altura (cm) | Custo (R\$) |
|----------------|--------------|-------------|-------------|
| 35             | 12           | 102         | 4403,62     |
| 35             | 12           | 105         | 4465,13     |
| 35             | 12           | 120         | 4487,68     |
| 45             | 12           | 102         | 4510,00     |
| 35             | 12           | 108         | 4536,16     |
| 35             | 15           | 102         | 4541,83     |
| 35             | 12           | 123         | 4543,77     |
| 45             | 12           | 105         | 4578,82     |
| 35             | 12           | 111         | 4586,37     |
| 35             | 18           | 96          | 4598,50     |

Esta Tab. 9 apresenta os 10 melhores custos encontrados. Observa-se a partir dela que as melhores seções são para concreto com  $f_{ck} = 35$  MPa e com a mínima largura disponível (12 cm). Além do mais, não foram encontradas seções com  $f_{ck} = 25$  MPa entre as melhores, em virtude de seu custo ser bem semelhante ao adotado para concretos de maiores resistências. Depreende-se da mesma tabela que a ferramenta gera uma série de seções disponíveis para o usuário, todas atendendo às prescrições normativas, permitindo-o escolher a melhor que se adapta ao seu projeto. Além do mais, a ferramenta disponibiliza um relatório com um

detalhamento prévio das armaduras, apenas de forma textual, auxiliando desta forma no processo de detalhamento final das peças.

As Figs. 7, 8 e 9 apresentam a comparação para uma viga biapoiada submetida a diversos carregamentos e vãos variados, de forma que o produto carga pelo vão ao quadrado permanecesse constante para cada curva. Além do mais, tal procedimento foi realizado para concretos com resistência de 25, 35 e 45 MPa, adotando-se os preços apresentados na Tab. 8. Observa-se que, como previsto, a altura necessária para as vigas decai à medida que sua largura aumenta, além do mais a utilização de um concreto de maior resistência conduz a menores alturas. As curvas apresentadas permitem, entre outros recursos, ao usuário escolher a altura que resulta no menor custo para sua viga, em função do  $f_{ck}$  e da largura disponível no projeto arquitetônico.

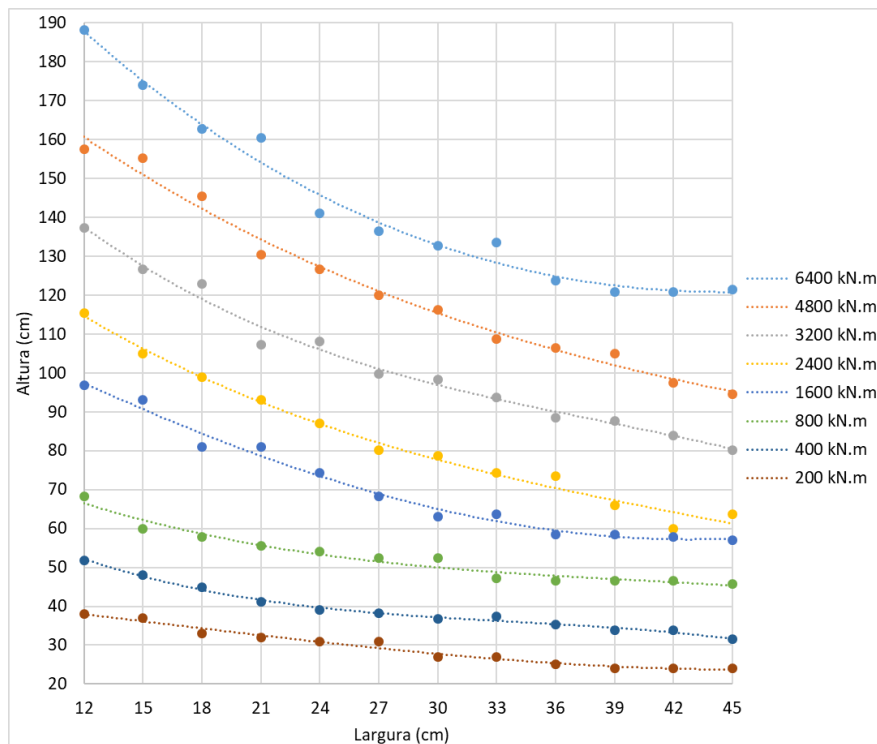


Figura 7. Curvas de melhores alturas em função da largura,  $f_{ck} = 25$  MPa.

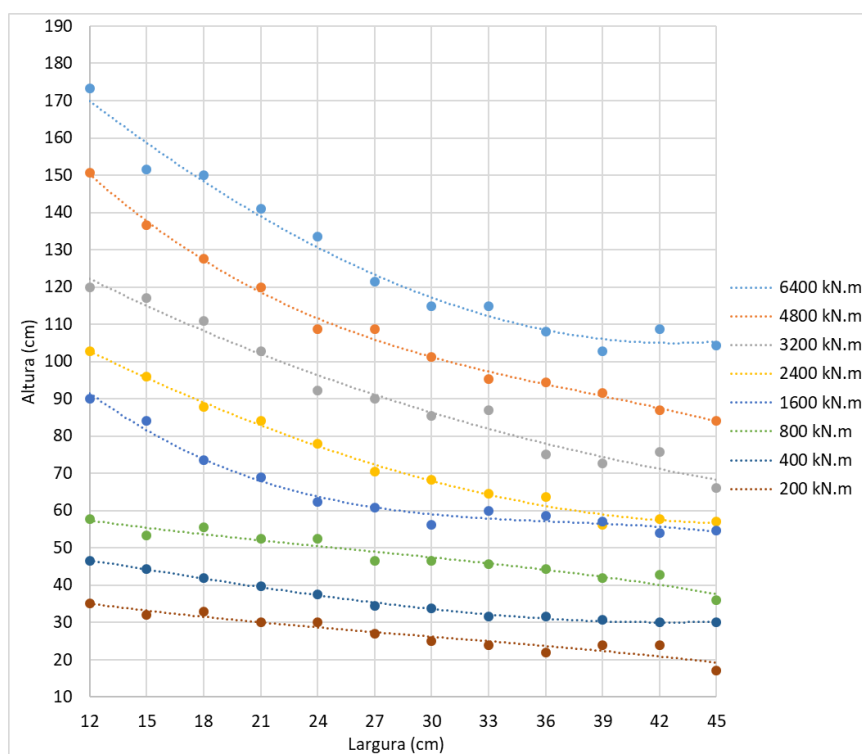


Figura 8. Curvas de melhores alturas em função da largura,  $f_{ck} = 35$  MPa.

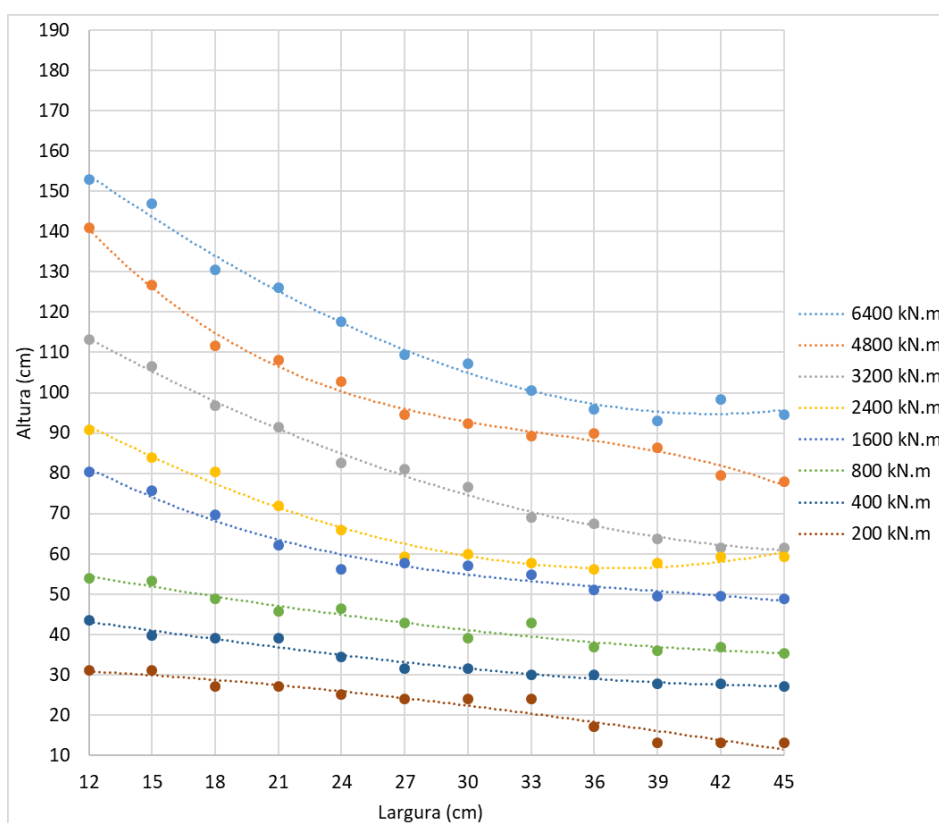


Figura 9. Curvas de melhores alturas em função da largura,  $f_{ck} = 45$  MPa.

## 4 CONCLUSÕES

A utilização do método da rigidez direta para a análise estrutural de vigas de concreto armado mostra-se como uma alternativa viável, por ser um método de fácil interpretação e implementação computacional, sem um grande custo computacional, mesmo nos casos em que é adotada uma alta discretização para o modelo. Além do mais, tal método permite a incorporação de considerações usualmente utilizadas em peças de concreto armado, tais como a semi-rigidez das ligações e a redistribuição dos esforços.

A implementação dos requisitos normativos acerca do detalhamento das peças mostra-se facilitado em virtude da resposta gerada pelo método da rigidez, em que os esforços e deslocamentos são apresentados por nós e a busca por máximos e mínimos é feita de forma intuitiva.

A ferramenta proposta apresentou resultados semelhantes aos obtidos na literatura quando se utiliza métodos de detalhamento manual, mostrando seu potencial de aplicação. Além do mais, as respostas obtidas foram também semelhantes nos casos de avaliação paramétrica.

Como resultado principal da ferramenta, foram obtidas curvas de dimensionamento ótimo de vigas de concreto armado, segundo os requisitos normativos na NBR 6118 (ABNT, 2014). Além do mais, a ferramenta apresenta outras funcionalidades, tais como a possibilidade de sua utilização apenas para obtenção de deslocamentos e esforços em estruturas lineares sujeitas a uma variedade de carregamentos e condições de vinculação, e a possibilidade de sua utilização como ferramenta de dimensionamento, detalhamento e verificação dos estados limites para vigas de concreto armado.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão das Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) e de Produtividade em Pesquisa (PQ).

## REFERÊNCIAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. NBR 6118. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2007. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. NBR 6118. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1980. *Projeto e execução de obras de concreto armado*. NBR 6118. Rio de Janeiro.
- Bastos, P. S. S., 2017. *Vigas de concreto armado*. Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Faculdade de Engenharia – Departamento de Engenharia Civil. Bauru – São Paulo. 60 f. Notas de Aula. Disponível em <<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto2/Vigas.pdf>>. Acesso em: 04 out. 2017.
- Branson, D. E., 1968. *Design procedures for computing deflections*. ACI Journal, Proceedings vol. 65, n. 9, p. 730-742.

- Carvalho, R. C.; Figueiredo Filho, J. R., 2016. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014. 4a ed. São Carlos: EdUFSCar.
- Ferreira, M. A., El Debs, M. K., Elliot, K. S. 2002. Modelo teórico para projeto de ligações semi-rígidas em estruturas de concreto pré-moldado. In: Anais do 44º Congresso brasileiro do concreto – IBRACON, Belo Horizonte, MG. Anais ... São Paulo: IBRACON (CD-ROM).
- Junior Muñiz, F. H. M., Oliveira, D. M. 2014. Otimização de vigas de concreto armado com seção retangular submetidas à flexão normal simples. *Construindo*. v. 6. Belo Horizonte/MG.
- Klein, H. W. 2008. Otimização de vigas de concreto armado: dimensionamento à flexão. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação – Bacharelado em Engenharia Civil). Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí.
- Leonhardt, F.; Mönning, E., 1977. *Construções de concreto*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Martha, L. F. Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- Mörsch, E. 1948. *Teoría y práctica del hormigón armado*. v. 6. Barcelona: Editorial Gustavo Gili.
- Soares, R. C. 1997. *Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação à pavimentos*. Dissertação (Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo). Universidade de São Paulo, USP, São Carlos.