



APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO NA DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS EM DOMÍNIOS SETORIALMENTE HETEROGÊNEOS

Carlos Friedrich Loeffler

carlosloeffler@bol.com.br

Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo, UFES – Centro Tecnológico – Av. Fernando Ferrari, 540 – Goiabeiras – 29.075 – 910, Vitória, ES – Brazil.

João Paulo Barbosa

jpbarbosa@ifes.edu.br

Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo, UFES – Centro Tecnológico – Av. Fernando Ferrari, 540 – Goiabeiras – 29.075 – 910, Vitória, ES – Brazil.

Instituto Federal do Espírito Santo – IFES Campus São Mateus - Rodovia BR 101 Norte – Km 58 – Bairro Litorâneo - 29.932-540, São Mateus, ES –Brazil

Resumo. *Uma série de modelos da Física Matemática clássica encontra aplicação em áreas estratégicas da engenharia atual, como na sísmica de prospecção, que engloba diversos problemas relacionados à propagação e ao espalhamento de ondas elásticas e eletromagnéticas no interior da terra. Dentre os diversos segmentos de interesse na análise sísmica incluem-se a busca de métodos eficazes de identificação do espectro de frequências naturais, associadas às propriedades constitutivas do meio rochoso. Neste trabalho, a técnica de superposição do domínio do Método dos Elementos de Contorno é acoplada com a técnica de interpolação direta com funções radiais, calculando as frequências naturais em domínios bidimensionais com contornos não regulares e inclusões internas, que correspondem às heterogeneidades setoriais. Admite-se o modelo escalar acústico e isotrópico, embora este possa estender-se facilmente para a abordagem de materiais anisotrópicos. São incluídos neste trabalho a solução de alguns problemas-teste, cujos resultados são comparados com os obtidos através do Método dos Elementos Finitos, usando malhas bastante refinadas.*

Palavras-chave: *Método dos Elementos de Contorno, Heterogeneidade Setorial, Equação de Helmholtz, Autovalores.*

1 INTRODUÇÃO

A Equação de Helmholtz (Butkov, 1973) surge naturalmente em muitas áreas de engenharia e ciência. É frequentemente usada para analisar problemas de eletromagnetismo, vibração em estruturas e acústica, envolvendo propagação, reflexão e dispersão de ondas. Sua solução numérica tem sido um tópico ainda bastante pesquisado na literatura especializada (Pluymers et al., 2007) e, ao contrário dos outros problemas de simulação numérica, não existe uma técnica dominante neste campo. De modo particular, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é considerado como uma das técnicas numéricas mais efetivas para a solução desses problemas (Jiang et al., 2013).

No próprio contexto do MEC existem diversas metodologias voltadas para a solução dos problemas de Helmholtz. A formulação clássica (Brebbia e Walker, 1980) não obstante sua elegância matemática possui restrições, pois a solução fundamental depende da frequência de excitação. Assim, no caso de se calcular as frequências naturais, tal dependência impede a formação de uma matriz de inércia distinta da matriz de propriedades constitutivas e a solução de um problema de autovalor não pode ser feito diretamente, na forma tradicional (Dominguez, 1993).

Neste trabalho foi utilizada a técnica de interpolação direta com funções radiais, aqui denominada MECID (Loeffler et al., 2017), onde se aproxima diretamente todo o núcleo da integral de domínio, usando apenas um tipo de função de base radial. A modelagem dos setores heterogêneos é feita através da Técnica de Superposição de Domínios (TSD), uma nova opção para tratar problemas setorialmente não homogêneos com relativa simplicidade.

A TSD é uma alternativa a técnica das sub-regiões (Brebbia, 1978). Nesta, considera-se o domínio completo como sendo composto de um domínio homogêneo circundante ao qual se somam subdomínios internos com homogeneidades setoriais. A energia de cada subdomínio ou setor é computada ao sistema como um todo pela superposição, semelhantemente ao que se faz com uma fonte ou ação de domínio em problemas de Poisson (Loeffler e Mansur, 2016). Todos os setores estão ligados matematicamente por meio de coeficientes de influência, que são gerados por integrações realizadas no contorno dos subdomínios, com os pontos fontes localizados em cada ponto nodal gerado pela discretização.

Neste trabalho, diante da ausência de soluções analíticas disponíveis, a comparação de desempenho em cada caso do MEC é realizada considerando os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos - MEF (Becker et al., 1981; Hughes, 1987) com malhas muito refinadas.

1.1 EQUAÇÃO DE GOVERNO

A Equação da Onda Acústica para meios não homogêneos é dada por (Silva, 2011):

$$[K(X)U(X, t),_i]_i = \rho(X)U(X, t) \quad (1)$$

A função $K(X)$ representa respectivamente a propriedade de difusividade ou rigidez enquanto $\rho(X)$ pode significar inércia material ou térmica; o significado destes depende do problema físico associado, de forma que o potencial $U(X, t)$ pode retratar pressão, campo elétrico, deslocamento etc.

A Equação de Helmholtz pode ser interpretada como uma simplificação da Eq. (1) quando se busca uma resposta produzida no sistema por uma excitação variável, cuja frequência ω é conhecida. Nessa condição, o potencial $U(X, t)$ equivale a uma resposta periódica, composta de conteúdo temporal específico:

$$U(X,t)=u(X)e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Na Eq. (2), "i" é a unidade imaginária e $u(X)$ é a amplitude espacial da resposta estacionária do sistema à excitação harmônica, de frequência ω . Em meios setorialmente homogêneos, as propriedades físicas que se apresentam na Eq. (1) podem ser consideradas constantes no interior de cada setor, resultando assim na seguinte expressão:

$$Ku(X)_{,ii} = -\rho \omega^2 u(X) \quad (3)$$

Utilizando-se da Técnica de Superposição de Domínios, a Eq. (3) pode ser desenvolvida para cada setor separadamente, no contexto do modelo matemático usual do MEC, expresso em termos de equações integrais clássicas, conforme mostrado a seguir.

2 TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS

Sem perda de generalidade, considera-se um domínio constituído por duas regiões com diferentes propriedades físicas, conforme mostrado no lado esquerdo da Fig. 1, onde o domínio completo $\Omega(X)$ é composto pela soma dos domínios Ω^e e Ω^i .

Na TSD admite-se que o domínio completo $\Omega(X)$ pode ser decomposto pela soma dos domínios Ω^e e Ω^i , sendo K^e, K^i, ρ^e e ρ^i as propriedades físicas, supostas como sendo constantes no interior dos domínios. Tal estratégia é ilustrada na Fig. 1, no que diz respeito às propriedades K e ρ :

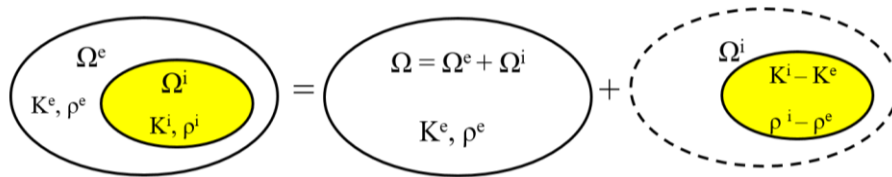


Figura 1. O domínio original modelado como a soma dos domínios circundante e setorial

Utilizando-se uma função auxiliar $u^*(\xi; X)$, admitindo-se que o núcleo das integrais é composto por funções integráveis e considerando ainda que $K^s = K^i - K^e$ e também $\rho^s = \rho^i - \rho^e$, pode-se escrever uma forma integral forte associada à Eq. (3), na seguinte forma:

$$K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega + K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i = -\rho^e \omega^2 \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \rho^s \omega^2 \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i \quad (4)$$

Na Eq. (4), K^e e ρ^e representam as respectivamente as propriedades de rigidez ou difusividade e a inércia do domínio envolvente e K^i e ρ^i correspondem a propriedades similares no domínio interno. Tais propriedades são consideradas constantes em cada subdomínio, de acordo com o modelo de heterogeneidade setorial. Apesar do problema ser governado pela Equação de Helmholtz, usa-se como função auxiliar uma solução fundamental $u^*(\xi; X)$ correspondente ao problema de Laplace, ou seja:

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi; X) \quad (5)$$

Cuja solução fornece:

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (6)$$

onde $r(\xi; X)$ a distância euclidiana entre o ponto fonte ξ e um ponto genérico X do domínio.

Inicialmente, apresenta-se o procedimento TSD para o termo relacionado à difusividade ou rigidez. A primeira integral do lado esquerdo da Eq. (4) pode ser reescrita facilmente de acordo com os procedimentos tradicionais do MEC, resultando em:

$$K^e \int_{\Omega^e} u^e(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^e = -K^e \left[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X) d\Gamma \right] \quad (7)$$

Na Eq. (7) $q^*(\xi; X)$ é a derivada normal da solução fundamental, expressa por:

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n(X)} \quad (8)$$

Da mesma forma, pode-se reescrever a segunda integral do lado esquerdo da Eq. (4) numa forma integral inversa, ou seja:

$$K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i = -K^s \left[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X)q^*(\xi; X) d\Gamma^i - \int_{\Gamma^i} q^i(X)u^*(\xi; X) d\Gamma^i \right] \quad (9)$$

O valor de $c(\xi)$ na Eq. (9) é dependente da posição do ponto de origem em relação ao contorno da região de superposição e da sua suavidade (Loeffler e Mansur, 2016). Ressalta-se que os pontos fonte não estão restritos ao domínio $\Omega^i(X)$, podendo se situar fora deste, no domínio do contorno circundante $\Omega^e(X)$.

Fisicamente, estas integrais estão relacionadas ao equilíbrio entre a energia difusiva, o trabalho do fluxo de calor e a energia de inércia térmica. Em um caso homogêneo, essas energias são computadas pelos valores dos potenciais $u(X)$ e das suas derivadas normais no contorno. Considerando a estratégia de superposição do domínio, as heterogeneidades setoriais têm energias intrínsecas que devem ser computadas na energia total do sistema. Assim, a segunda integral do lado direito da Eq. (9) representa o fluxo de trabalho $q^i(X)$, enquanto os outros termos representam a energia difusiva, que é expressa em função dos potenciais internos.

O objetivo do método proposto é considerar apenas a avaliação da quantidade de energia difusiva presente nos subdomínios internos, como é feito nos problemas de Poisson que computam o trabalho devido a uma fonte ou ação externa (Brebbia e Domínguez, 1998). Tal energia é dada exclusivamente em função dos potenciais nos pontos internos $u^i(X)$, que são muito mais fáceis de lidar.

Assim sendo, a Eq. (9) é reescrita como:

$$K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i = -K^s \left[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X)q^*(\xi; X) d\Gamma^i \right] \quad (10)$$

Sendo assim, o lado esquerdo da Eq. (4) torna-se:

$$K^e \int_{\Omega} u(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega + K^s \int_{\Omega^i} u^i(X)_{,ii} u^*(\xi; X) d\Omega^i = -K^e \left[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X)q^*(\xi; X) - q(X)u^*(\xi; X)] d\Gamma \right] - K^s \left[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X)q^*(\xi; X) d\Gamma^i \right] \quad (11)$$

Como mencionado, o lado direito da Eq. (10) tem o mesmo significado de uma integral de domínio que calcula o trabalho devido a uma fonte aplicada a um setor para os problemas de

Poisson. No entanto, aqui, esta energia é dada diretamente por uma integral de contorno relacionada aos potenciais internos, que são desconhecidos.

Ressalta-se que o trabalho de fluxos no domínio interno não é zero; no entanto, basta calcular a energia difusiva total do subdomínio no balanço energético (Loeffler e Andrade, 2016). Todo o lado esquerdo da Eq. (10) é afetado pela energia difusiva completa introduzida. Assim, o sistema responde como um todo, ou seja, a derivada potencial e normal calculada pelo sistema final de equações leva em consideração o efeito de todos possíveis subdomínios e do domínio circundante também.

O mesmo raciocínio pode ser empregado na operacionalização do termo referente à inércia ou energia cinética, que é expresso pelo lado direito da Eq. (4):

$$\rho\omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega = \rho^e\omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega + \rho^s\omega^2 \int_{\Omega^i} u^i(X)u^*(\xi; X)d\Omega^i \quad (12)$$

Diferentemente do termo difusivo, as integrais referentes à energia cinética são expressas apenas em termos dos potenciais $u(X)$. Contudo, é preciso operacionalizá-las de modo a escrevê-las em termos de integrais de contorno. Com essa finalidade, emprega-se o procedimento MECID, juntamente com um procedimento de regularização para evitar singularidades no núcleo destas integrais.

3 APROXIMAÇÃO DO MECID PARA A INTEGRAL DE DOMÍNIO

Usando o MECID, o núcleo completo da integral do domínio é interpolado diretamente usando funções base radial, sendo assim tem-se:

$$u(X)u^*(\xi; X) = \xi \alpha^i F^i(X^i; X) \quad (13)$$

Como as funções de interpolação usadas F^i pertencem à classe de funções radiais, seu argumento é composto pela distância euclidiana $r(X^i; X)$, que caracteriza as posições dos pontos base X^i em relação ao domínio genérico pontos X .

Nas simulações aqui realizadas, em razão do seu bom desempenho em diversas aplicações com o MEC, a função de base radial utilizada é:

$$F^i(X^i; X) = r^2(X^i; X) \ln r(X^i; X) \quad (14)$$

O MECID transforma a integral de domínio em uma única integral de contorno usando uma função de interpolação primitiva Ψ^i . Assim, genericamente, uma integral cujo núcleo seja composto pelo lado direito da Eq. (13) torna-se:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X) d\Omega = \int_{\Omega} (\xi \alpha^i \Psi_{,jj}^i(X^i; X)) d\Omega = \int_{\Gamma} (\xi \alpha^i \Psi_{,j}^i(X^i; X) n_j(X)) d\Gamma = \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \quad (15)$$

Para cada ponto fonte ξ , a interpolação dada pela Eq. (15) corresponde à varredura de todos os pontos X^i em relação aos pontos de domínio X , ponderados pelos coeficientes $\xi \alpha^i$.

Considerando a Eq. (13) e a transformação proposta pela Eq. (15), a equação integral (12) é reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i = \\ \omega^2 \rho^e \left(\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma \right) + \omega^2 \rho^s \left(\xi \alpha^j \int_{\Gamma^i} \eta^j d\Gamma^i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

4 PROCEDIMENTO DE REGULARIZAÇÃO

O procedimento de regularização evita elegantemente a singularidade provocada pela coincidência entre as posições dos pontos fonte e campo na Eq. (13). É baseado no conceito de regularização apresentado por Hadamard, embora este seja aplicado em um contexto diferente (Pessolani, 2002). O procedimento é aplicado no lado direito da Eq. (12), pela adição de duas integrais que se autocompensam tanto para o domínio circundante quanto para o subsetor, ou seja:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i = \\ \omega^2 \rho^e \left\{ \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} + \omega^2 \rho^e \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega + \\ \omega^2 \rho^s \left\{ \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i - \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega^i \right\} + \omega^2 \rho^s \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega^i \end{aligned} \quad (17)$$

Uma das parcelas adicionadas é interpolada juntamente com a integral original, retirando a singularidade:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho^e \left\{ \int_{\Omega} u(X) u^*(\xi; X) d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \right\} \cong \omega^2 \rho^e \left(\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma \right) \\ \omega^2 \rho^s \left\{ \int_{\Omega^i} u^i(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i - \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega^i \right\} \cong \omega^2 \rho^s \left(\xi \alpha^j \int_{\Gamma^i} \eta^j d\Gamma^i \right) \end{aligned} \quad (18)$$

As outras podem ser resolvidas através do Tensor de Galerkin, ou seja:

$$\begin{aligned} \rho^e \omega^2 \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = \rho^e \omega^2 u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \\ \rho^s \omega^2 \int_{\Omega^i} u^i(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega^i = \rho^s \omega^2 u(\xi) \int_{\Gamma^i} G_{,i}^* n_i d\Gamma^i \end{aligned} \quad (19)$$

onde a derivação direcional de $G^*(\xi; X)$ é dada por:

$$G_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) = \xi P^X = \frac{1}{4\pi} (0,5 - \ln[r(\xi; X)]) r_i n_i \quad (20)$$

Neste ponto, que antecede ao processo de discretização, a equação integral de contorno encontra-se na forma:

$$\begin{aligned} K^e \left[c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(X) q^*(\xi; X) - q(X) u^*(\xi; X)] d\Gamma \right] + K^s \left[c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma^i} u^i(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^i \right] = \\ \omega^2 \rho^e \left(\xi \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j d\Gamma + u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i d\Gamma \right) + \omega^2 \rho^s \left(\xi \alpha^j \int_{\Gamma^i} \eta^j d\Gamma^i + u(\xi) \int_{\Gamma^i} G_{,i}^* n_i d\Gamma^i \right) \end{aligned} \quad (21)$$

5 PROCEDIMENTO DE DISCRETIZAÇÃO

Aplicam-se aqui os procedimentos típicos do MEC para discretização. Consideram-se elementos de contorno lineares isoparamétricos, com nos duplos nos cantos. Para cada ponto fonte se faz uma varredura em todos os elementos de contorno. Considerando-se o esquema de interpolação gerado pelo MECID, para cada ponto fonte também é efetuada uma varredura de todos os pontos de interpolação X^i em relação aos pontos de domínio X , ponderados pelos coeficientes ${}^\xi\alpha^i$. Assim, os coeficientes de ${}^\xi\alpha^i$ são obtidos pela resolução de um sistema matricial na forma:

$$[{}^\xi\alpha] = [F]^{-1} [{}^\xi\Lambda] [F]\alpha = [F]^{-1} [{}^\xi\Lambda] [u] \quad (22)$$

Esse procedimento é apresentado com detalhe em trabalhos prévios (Loeffler et al., 2015). Sua aplicação junto às Eq. (18) e Eq. (19) após a discretização resulta em:

$$\rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^m \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_m \end{pmatrix} = \rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} ; \quad \rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^m \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_m \end{pmatrix} = \rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} \quad (23)$$

Cada coeficiente A_ξ é explicitado a partir de:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^\xi\alpha_1 \\ \dots \\ {}^\xi\alpha_m \end{pmatrix} \quad (24)$$

O índice “n” significa o número total de pontos nodais, incluindo pontos no contorno e pontos internos, pode ser encontrada uma forma sintética para o vetor A_ξ , dada por:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-S_2^1 \Lambda^2 - S_3^1 \Lambda^3 \dots - S_n^1 \Lambda^n] & S_2^1 \Lambda^2 & \dots & S_n^1 \Lambda^n \\ S_1^2 \Lambda^1 & [-S_1^2 \Lambda^1 - S_3^2 \Lambda^3 \dots - S_n^2 \Lambda^n] & \dots & S_n^2 \Lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^n \Lambda^1 & S_2^n \Lambda^2 & \dots & [-S_1^n \Lambda^1 - S_2^n \Lambda^3 \dots - S_{n-1}^n \Lambda^{n-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

Pode-se ressaltar que os termos ${}^i\Lambda^i$, que produzem singularidade devido à coincidência entre pontos de campo e fonte, não existem mais na matriz dada pela Eq. (25). As matrizes referentes ao Tensor de Galerkin são mais simples e se reduzem ao seguinte vetor:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\int_1^1 P^1 d\Gamma_1 + \int_1^1 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^1 P^n d\Gamma_n] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\int_1^2 P^1 d\Gamma_1 + \int_1^2 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^2 P^n d\Gamma_n] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [\int_1^n P^1 d\Gamma_1 + \int_1^n P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^n P^n d\Gamma_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (26)$$

Assim, as matrizes referentes à inércia podem ser construídas na forma:

$$\rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} (A_1 + Z_1) \\ \dots \\ (A_n + Z_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \rho^e \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} \dots M_{1n} \\ \dots \\ M_{n1} \dots M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} (A_1 + Z_1) \\ \dots \\ (A_n + Z_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \rho^s \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} \dots M_{1n} \\ \dots \\ M_{n1} \dots M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Uma vez que a energia de cada partição é representada exclusivamente por meio de valores potenciais nos pontos internos, esses pontos devem aparecer explicitamente no sistema matricial, ou seja, o potencial associado a eles é calculado simultaneamente com pontos nodais do contorno. Então, o sistema matricial MECID após o procedimento de discretização é assim dado por:

$$[H]\{u\} + [H^s]\{u^s\} - [G]\{q\} = \omega^2 [M]\{u\} + \omega^2 [M^s]\{u^s\} \quad (28)$$

Na Fig. 2, descreve-se a convenção utilizada para expandir a forma matricial de modo a melhor compreendê-la. Desta forma os subscritos c indicam os pontos no contorno externo, os subscritos i indicam os pontos base externo ao subdomínio, os subscritos i' indicam os pontos base internos ao subdomínio e os subscritos s indicam os pontos no contorno do subdomínio.

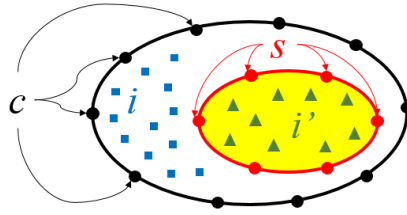


Figura 2. Nomenclatura dos pontos nodais.

Para maior clareza, examinam-se as colunas de cada matriz referente à Eq. (28). Para todas as matrizes, têm-se coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte que podem se posicionar no contorno envolvente, nos contornos dos setores internos e nos pontos base situados tanto no interior dos setores quanto fora dele.

$$[H]\{u\} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{cc} & 0_{ci} & 0_{ci'} & 0_{cs} \\ \hat{H}_{ic} & \hat{H}_{ii} & 0_{ii'} & 0_{is} \\ \hat{H}_{i'c} & 0_{i'i} & \hat{H}_{i'i'} & 0_{i's} \\ \hat{H}_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & \hat{H}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$\underbrace{A1} \quad \underbrace{A2} \quad \underbrace{A3} \quad \underbrace{A4}$

Para a matriz H da Eq. (29), a coluna $A1$ é gerada pela integração ao longo do contorno externo. As matrizes $\hat{H}_{ii}$, $\hat{H}_{i'i'}$ e $\hat{H}_{ss}$ são matrizes diagonais.

$$[H^s]\{u^s\} = \begin{bmatrix} 0_{ci'} & \bar{H}_{cs} \\ 0_{ii'} & \bar{H}_{is} \\ \bar{H}_{i'i'} & \bar{H}_{i's} \\ 0_{si'} & \bar{H}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A5} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A6}$

Para a matriz H^s da Eq. (30) os coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte geram a coluna $A5$ que é composta de uma única submatriz diagonal e por $A6$ que é relacionada à integração ao longo dos contornos dos subdomínios.

$$[G]\{q\} = \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \\ G_{i'c} & 0_{i'i} \\ \underbrace{G_{sc}}_{B1} & \underbrace{0_{si}}_{B2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Para a matriz G da Eq. (31) a coluna $B1$ é gerada pela integração dos pontos fonte ao longo do contorno externo.

$$[M]\{u\} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{cc} & \hat{M}_{ci} & \hat{M}_{ci'} & \hat{M}_{cs} \\ \hat{M}_{ic} & \hat{M}_{ii} & \hat{M}_{ii'} & \hat{M}_{is} \\ \hat{M}_{i'c} & \hat{M}_{i'i} & \hat{M}_{i'i'} & \hat{M}_{i's} \\ \underbrace{\hat{M}_{sc}}_{C1} & \underbrace{\hat{M}_{si}}_{C2} & \underbrace{\hat{M}_{si'}}_{C3} & \underbrace{\hat{M}_{ss}}_{C4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Para a matriz M da Eq. (32) os coeficientes de influência gerados pela ação dos pontos fonte por colunas são: $C1$ pela integração ao longo do contorno externo; $C2$ pela relação dos com os pontos internos do domínio externo; $C3$ pela relação com os pontos internos do domínio interno; $C4$ pela integração no contorno dos subdomínios.

$$[M^s]\{u^s\} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ci'} & \bar{M}_{cs} \\ \bar{M}_{ii'} & \bar{M}_{is} \\ \bar{M}_{i'i'} & \bar{M}_{i's} \\ \underbrace{\bar{M}_{si'}}_{D1} & \underbrace{\bar{M}_{ss}}_{D2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i'} \\ u_s \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Por fim, para a matriz M^s da Eq. (33) os coeficientes de influência por colunas são: $D1$ pela relação com os pontos internos dos subdomínios; $D2$ pela integração ao longo dos contornos dos subdomínios.

A forma expandida das matrizes do MEC, conforme Eq. (28) mostra que muitas submatrizes de G são nulas, o mesmo acontecendo com algumas submatrizes de H .

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0 & 0_{ci'} & H_{cs} \\ H_{ic} & H_{ii} & 0_{ii'} & H_{is} \\ H_{i'c} & 0_{i'i} & H_{i'i'} & H_{i's} \\ H_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & H_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} & 0_{ci'} & 0_{cs} \\ G_{ic} & 0_{ii} & 0_{ii'} & 0_{is} \\ G_{i'c} & 0_{i'i} & 0_{i'i'} & 0_{i's} \\ G_{sc} & 0_{si} & 0_{si'} & 0_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ q_i \\ q_{i'} \\ q_s \end{pmatrix} = \quad (34)$$

$$\omega^2 \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} & M_{ci'} & M_{cs} \\ M_{ic} & M_{ii} & M_{ii'} & M_{is} \\ M_{i'c} & M_{i'i} & M_{i'i'} & M_{i's} \\ M_{sc} & M_{si} & M_{si'} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \\ u_{i'} \\ u_s \end{pmatrix}$$

Na Eq. (34), matriz H é a soma das Eq. (29) e Eq.(30) e a matriz M é a soma das matrizes dadas pelas Eq. (32) e Eq. (33).

6 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR

O problema do autovalor pode ser facilmente formulado com formulações MEC que utilizam funções base radiais. Os procedimentos matemáticos podem ser encontrados em muitas referências (Nardini e Brebbia, 1983) e (Loeffler e Mansur, 1986).

Os sistemas de equações mostrados tanto na Eq. (34) que são similares, precisam ser adequadamente manipulados para se formular o problema de autovalor, nas quais se destacam os valores nodais de u e q prescritos:

$$\begin{pmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \bar{q} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ u \end{pmatrix} \quad (35)$$

Considerando que os valores nodais prescritos de $u(X)$ e $q(X)$ para este tipo de problema são nulos:

$$H_{u\bar{q}}u - G_{u\bar{u}}q = \omega^2 M_{u\bar{q}}u \quad (36)$$

$$H_{q\bar{q}}u - G_{q\bar{u}}q = \omega^2 M_{q\bar{q}}u \quad (37)$$

Eliminando-se a derivada do potencial q das Eq. (35) e Eq. (36), encontra-se:

$$[\bar{H}]\{u\} = \omega^2 [\bar{M}]\{u\} \quad (38)$$

onde:

$$\begin{aligned} [\bar{H}] &= [H_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[H_{uq}] \\ [\bar{M}] &= [M_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[M_{uq}] \end{aligned} \quad (39)$$

7 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Um problema teste com heterogeneidade setorial foi escolhido para ilustrar a consistência do modelo matemático e seu bom desempenho numérico. Para uma melhor comparação, foram tomados resultados obtidos com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

No estabelecimento da medida da diferença de erro relativo, no denominador foi tomado o módulo do valor obtido com a malha refinada do MEF; já no numerador foi inserido o módulo da diferença entre os valores do MEF e o do MEC.

7.1 Exemplo 1

Considera-se uma membrana quadrada de dimensão unitária com um quadrado no seu interior de propriedades distintas, conforme mostra a Fig.3. Calculam-se as frequências naturais para a condição de fixação completa da membrana.

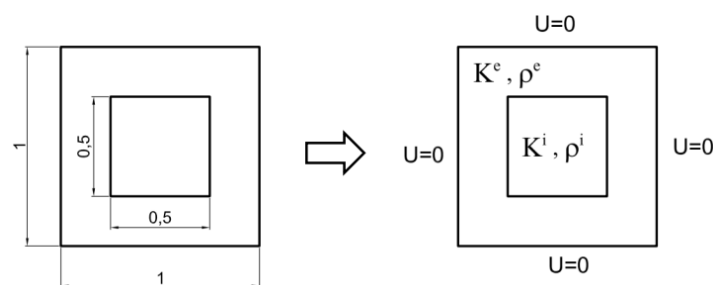


Figura 3. Características geométricas e condições de contorno para os testes.

Nestas primeiras simulações o valor das propriedades físicas foram: $K^e=1$, $\rho^e=1$, $k^i=2$ e $\rho^i=0,5$. Consideram-se três malhas com o mesmo número de pontos nodais nos contornos, mas com diferentes quantidades de pontos base no interior, para se avaliar a importância destes na melhoria dos resultados. Na Tabela 1 é mostrada a quantidade de pontos nodais e pontos base.

Tabela 1. Quantidade de pontos nodais nas malhas do MEC para o primeiro teste.

	Pontos no Contorno externo	Pontos no Contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao setor	Total
Malha 1 (i)	164	80	240	81	565
Malha 1 (ii)	164	80	380	144	768
Malha 1 (iii)	164	80	1080	361	1685

A malha de referência do MEF é uma malha bastante refinada construída com 43.028 elementos isoparamétricos lineares e tendo 21.771 pontos nodais.

Os resultados são mostrados no gráfico da Fig. 4. Verifica-se que a inserção de pontos base internos faz a diferença relativa reduzir-se praticamente em toda a faixa de frequências examinada. Contudo, a eficiência da inserção exclusiva de pontos base tem seus limites e observa-se o cometimento de erros relativos mais pronunciados no cálculo das primeiras frequências, cuja razão não foi claramente identificada.

Certas oscilações na curva da diferença relativa com o aumento da frequência são aceitáveis porque para cada conjunto de malha a posição dos pontos internos é alterada. Por outro lado, sabe-se que certos modos vibracionais são mais difíceis de serem representados por um determinado arranjo de pontos do que outros modos mais elevados. Também a simples

introdução de novos pontos base a partir dos já existentes em certas regiões não implica proporcionalmente numa melhoria dos resultados.

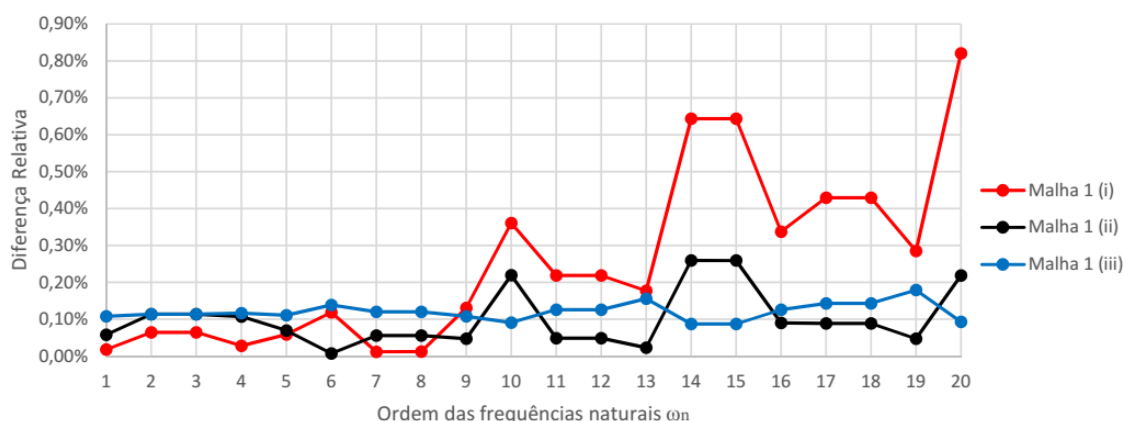


Figura 4.Diferença relativa dos Autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 1.

No próximo teste, é ampliada a quantidade de pontos nodais nos contornos externo e interno, considerando o arranjo de pontos base mais numeroso conforme Tabela 2. Os resultados são apresentados na Fig. 5.

Tabela 2. Quantidade de pontos nodais nas malhas do MEC para o segundo teste.

	Pontos no Contorno externo	Pontos no Contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao setor	Total
Malha 1 (iii)	164	80	1080	361	1685
Malha 2 (iii)	204	100	1080	361	1745
Malha 3 (iii)	324	160	1080	361	1925

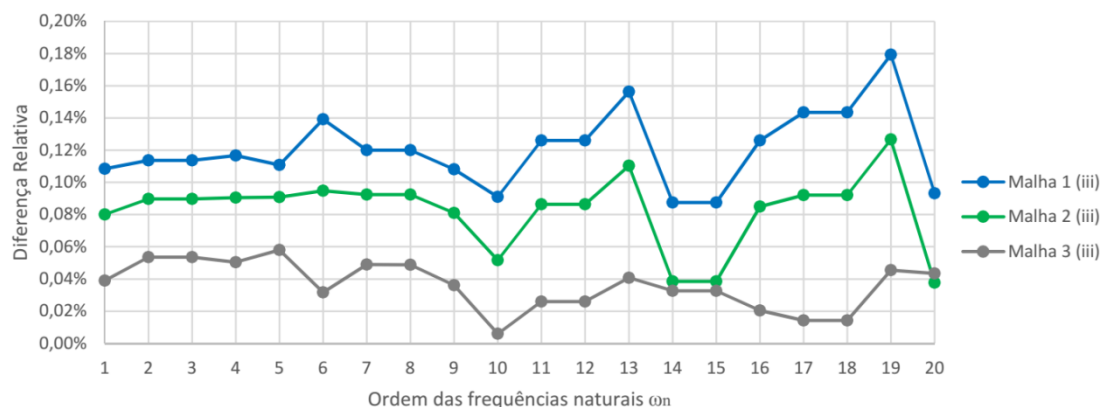


Figura 5.Diferença relativa dos Autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 1.

As diferenças erro relativas ficaram numa faixa bastante reduzida, conforme se pode perceber nas ordenadas dos gráficos da Fig. 5. O efeito da inserção de maior número de pontos no contorno foi mais efetivo especialmente para a faixa de frequências mais elevada.

Com base em simulações similares já realizadas em problemas fisicamente homogêneos, nos quais o contorno externo da membrana também se encontrava completamente fixado, observou-se que a importância dos pontos fonte no interior na precisão dos resultados é muito mais pronunciada do que a dos pontos de contorno, cujo aumento não introduz acréscimo na

quantidade de graus de liberdade do problema, quesito fundamental para boa representação da dinâmica do sistema. Por outro lado, é sensível que a MECID requer um grande número de pontos no interior, em razão da transformação realizada para escrever o termo de inércia em integrais de contorno.

No último teste, tomou-se a malha mais rica, malha 3 (iii) na Tabela 2, para se aquilatar o impacto numérico de uma variação no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos com $k^i/\rho^i=4$, foram simuladas situações com $k^i/\rho^i=25$ e $k^i/\rho^i=100$. Os gráficos das diferenças relativas estão apresentados na Fig. 6.

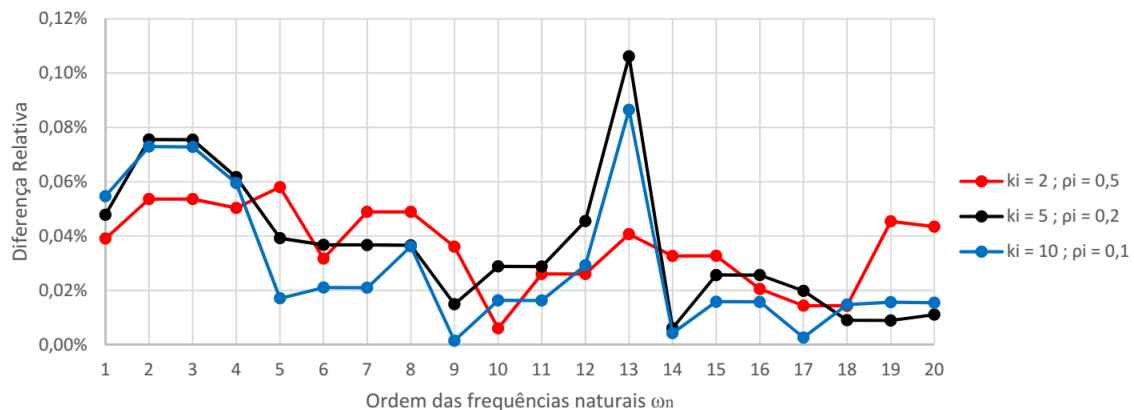


Figura 6. Diferença relativa dos Autovalores para malhas com diferentes propriedades do exemplo 1.

Pode-se perceber que os resultados foram bastante razoáveis, pois a maior diferença relativa foi cometida no cálculo da décima terceira frequência em todos os casos, com uma diferença relativa de aproximadamente no valor de 0,1% para as relações $k^i/\rho^i=25$ e $k^i/\rho^i=100$. Contrariando as expectativas, globalmente não se percebeu qualquer redução na precisão do modelo com o aumento na diferença dos valores das propriedades, dentro da faixa examinada nestes testes, o que é bastante positivo. Permanece, contudo, sem explicação inequívoca o fato do cálculo das primeiras frequências apresentarem diferenças relativas maiores do que outras mais altas.

7.2 Exemplo 2

Neste segundo exemplo considera-se uma geometria trapezoidal com um círculo no centro do seu interior de propriedades distintas, conforme mostra a Fig. 7. Calculam-se as frequências naturais para as condições de contornos indicadas.

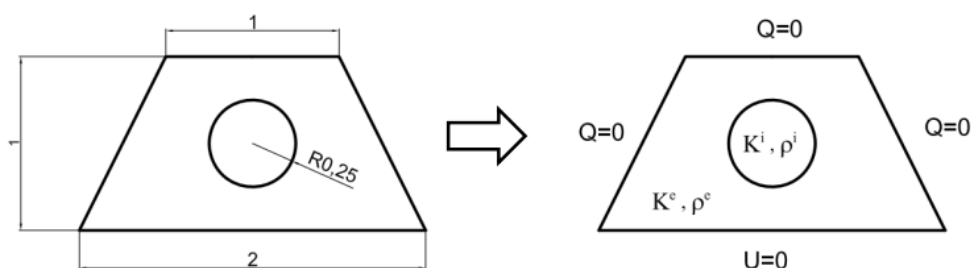


Figura 7. Características geométricas e condições de contorno para os testes do exemplo 2.

Assim como foi feito no exemplo anterior, o valor das propriedades físicas para as primeiras simulações foram os seguintes: $K^e=1$, $\rho^e=1$, $k^i=2$ e $\rho^i=0,5$. Da mesma forma consideram-se três malhas com o mesmo número de pontos nodais nos contornos, mas com diferentes quantidades de pontos base no interior, para se avaliar a importância destes na melhoria dos resultados. A quantidade de pontos nodais e pontos base é mostrada na Tabela 3.

Tabela 3. Quantidade de pontos nodais nas malhas do MEC para o primeiro teste.

	Pontos no Contorno externo	Pontos no Contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao setor	Total
Malha 1 (i)	104	40	294	45	483
Malha 1 (ii)	104	40	449	65	658
Malha 1 (iii)	104	40	957	141	1242

A malha de referência do MEF foi construída com 38.912 elementos isoparamétricos lineares tendo 19.617 pontos nodais.

Os resultados são mostrados no gráfico da Fig.8. Verifica-se que a crescente inserção de pontos internos não fez a diferença relativa reduzir-se tão significativamente como no exemplo 1, embora tenha ocorrido uma ligeira melhoria em praticamente toda a faixa de frequências examinada.

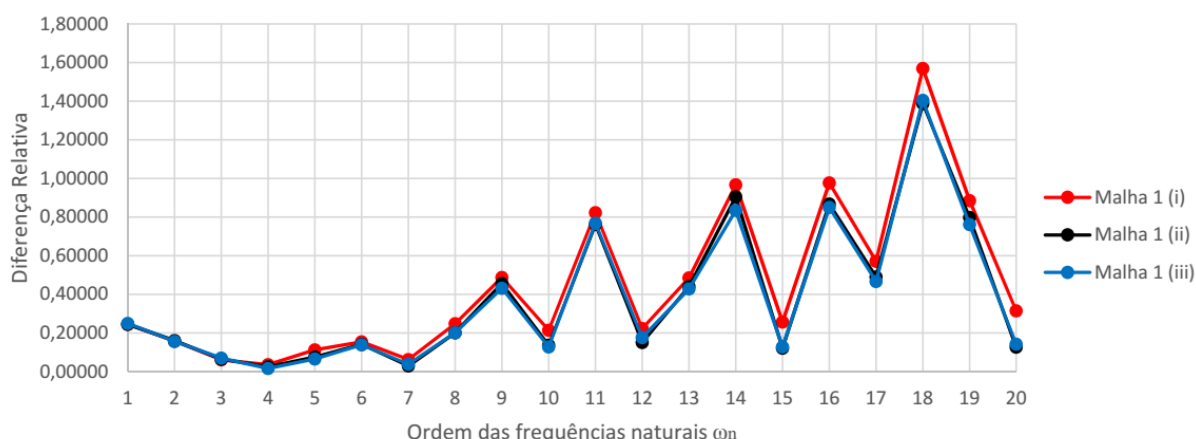


Figura 8. Diferença relativa dos Autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos base do exemplo 2.

No próximo teste, a quantidade de pontos nodais no contorno externo e interno é ampliada, de acordo com a Tabela 4, junto ao arranjo de pontos base internos mais numeroso.

Tabela 4. Quantidade de pontos nodais nas malhas do MEC para o segundo teste.

	Pontos no Contorno externo	Pontos no Contorno interno	Pontos base externos ao subdomínio	Pontos base internos ao setor	Total
Malha 1 (iii)	104	40	957	141	1242
Malha 2 (iii)	204	70	957	141	1372
Malha 3 (iii)	404	200	957	141	1702

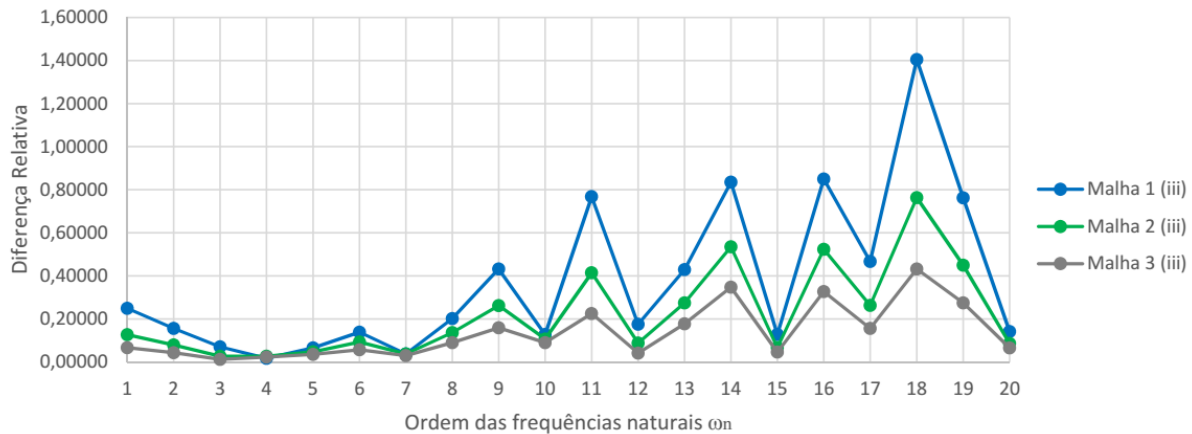


Figura 9.Diferença relativa dos Autovalores para malhas com diferentes quantidades de pontos nos contornos do exemplo 2.

Com a inserção de pontos nodais no contorno as diferenças relativas ficaram numa faixa bastante reduzida, conforme se pode perceber na Fig.9. O efeito desta inserção foi mais efetivo especialmente na faixa de frequências mais alta.

Diferentemente do exemplo 1, onde o contorno externo da membrana se encontrava completamente fixado, neste exemplo apenas um lado da geometria está prescrito. Assim, a importância dos pontos fonte no contorno tornou-se mais pronunciada neste exemplo com relação à precisão dos resultados do que os pontos base internos. Contudo, é sensível que a MECID requer um grande número de pontos no interior, em razão da transformação realizada para escrever o termo de inércia em integrais de contorno.

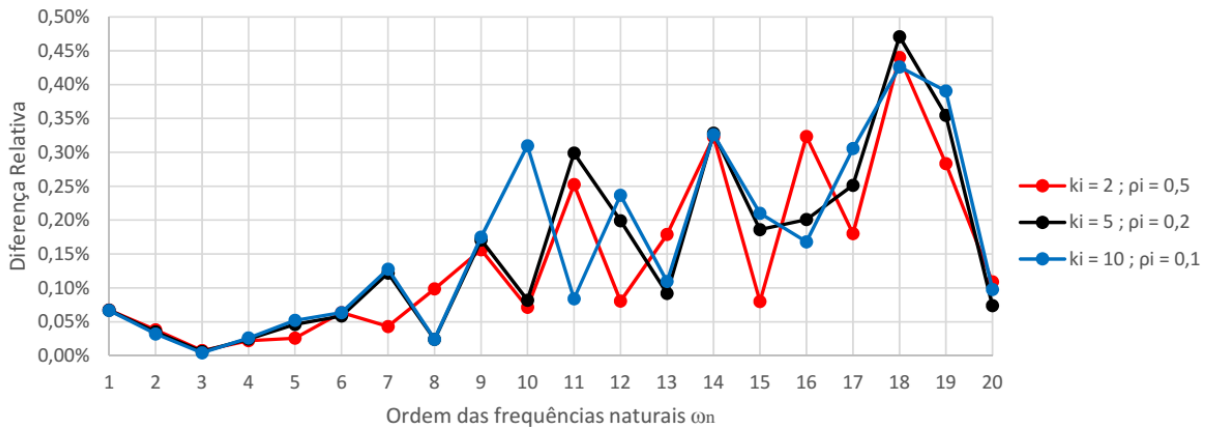


Figura 10.Diferença relativa dos Autovalores para malhas com diferentes propriedades do exemplo 2.

No último teste, tomou-se a malha mais rica, malha 3 (iii) na Tabela 4, para se proceder de forma a se aquilatar o impacto numérico de uma variação no valor das propriedades físicas. Além dos resultados já obtidos com $k^i/p^i=4$, foram simuladas situações com $k^i/p^i=25$ e $k^i/p^i=100$. Os gráficos das diferenças relativas estão apresentados na Fig. 10.

Pode-se perceber que os resultados foram bastante razoáveis, pois a maior erro relativo foi cometido no cálculo da décima oitava frequência em todos os casos, com uma diferença relativa de aproximadamente no valor de 0,45%. Do mesmo modo que no exemplo anterior, globalmente não se detectou uma queda de precisão com o aumento na diferença dos valores das propriedades, dentro da faixa examinada nestes testes.

8 CONCLUSÕES

A solução do problema de autovalor permite uma identificação clara da precisão do modelo numérico proposto, uma vez que os valores obtidos no cálculo das frequências naturais indicam inequivocamente se a constituição das matrizes relacionadas à rigidez e a inércia do sistema está satisfatória. Assim, conforme os resultados apresentados, o acoplamento da técnica de superposição de domínios com a técnica de integração direta com uso de funções radiais do MEC foi bem sucedido nestes testes iniciais, envolvendo problemas setorialmente heterogêneos. Não obstante a relativa simplicidade dos dois exemplos em termos de conformação geométrica, a ausência de consistência da formulação seria identificada claramente pela diferença entre os seus resultados e aqueles oferecidos pela solução de referência, que usou o MEF com malhas de alto grau de refinamento. Ao contrário, os resultados mostraram diferenças muito pequenas entre o modelo proposto e as soluções de referência.

As experiências numéricas também mostraram que o modelo requer numerosos pontos base internos, especialmente se as condições na fronteira envolverem prescrição do potencial, que eliminam graus de liberdade no sistema, fundamentais no estudo vibracional. Contudo, o modelo mostrou-se convergente tanto para o acréscimo de pontos base quanto para o aumento do número de pontos nodais no contorno, sem qualquer tendência a instabilidade. Naturalmente, sua precisão se reduz quanto mais elevada for a faixa de frequências calculadas; entretanto, dentro do espectro de vinte frequências examinadas a precisão foi bastante satisfatória, pois que a diferença relativa entre o modelo proposto e os resultados do MEF foram muito reduzidos.

Não houve identificação de perda de precisão quando a relação entre propriedades dos meios setoriais e do meio circundante foi ampliada, mostrando robustez por parte do modelo proposto, que acopla duas novas técnicas do MEC. A falta de monotonicidade nas curvas de erro com o aumento da frequência é justificada pelo remanejamento da posição dos pontos base internos para cada nova malha, que pode ser mais ou menos sensível a determinada configuração modal.

Não se pode identificar com precisão qual a razão para faz com que os valores das primeiras frequências naturais tenham apresentado precisão inferior à observada em frequências mais altas, embora tais diferenças sejam bastante reduzidas. Isto foi detectado nos dois testes aqui apresentados. Há ainda a necessidade de se fazer estudos com relação ao condicionamento matricial do sistema de equações e à otimização do tempo computacional. Tais estudos podem auxiliar a entender a peculiaridade citada, em que as frequências mais altas foram calculadas com melhor precisão do que as frequências primordiais.

Por fim, o desempenho aqui mostrado no acoplamento destas duas novas técnicas do MEC credencia o modelo proposto a ser utilizado em simulações futuras com conformações geométricas mais intrincadas e também a abordagem de problemas pertinentes à Equação da Onda, ou seja, casos em que se deseja determinar a resposta dinâmica ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS

- Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T., 1981. *Finite Elements: An Introduction, Volume 1*. Prentice Hall.
- Brebbia, C. A., 1978. *The Boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press.
- Brebbia, C. A., Walker S., 1980. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Boston, Massachusetts: Newnes-Butterworth.

- Brebbia, C. A., Domínguez J., 1998. *The Boundary Element Method – An Introductory Course*. WIT Press.
- Butkov, E., 1973. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley.
- Dominguez, J., 1993. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science.
- Hughes, T.J.R., 1987. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall.
- Jiang X., Chen W., Chen C.S., 2013. Fast multipole accelerated boundary knot method for inhomogeneous Helmholtz problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.37 pp. 1239-1243.
- Loeffler C. F., Mansur W. J., 1986. Free Vibration in Bars and Membranes modeled by Boundary Element Method (in portuguese). *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Civil*, vol. 4, n.2, pp. 5-23.
- Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J. A., Bulcão, 2015. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 61, pp. 218-225.
- Loeffler, C. F., Mansur, W. J., 2016. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 71, pp. 169-173.
- Loeffler, C. F., Andrade, A. J. C., 2016. Comparison Between the classical Sub Regions Technique and a new Approach with Domain Superposition to solve Sectorial Inhomogeneous Laplace's Problems. In: *XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – Revista Interdisciplinar de pesquisa em Engenharia*, vol. 1, pp. 1-14.
- Loeffler, C. F., Mansur, W.J., 2017. A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 74, pp. 14-18.
- Nardini, D., Brebbia, C. A., 1983. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. in *C.A. Brebbia ed, Proceedings of BEM V*, pp. 719-730.
- Pessolani, R.V. 2002. An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, vol. 24, n.1, pp. 23-45.
- Pluymers B, van Hal B, Vandepitte D, Desmet W., 2007. Trefftz-based methods for time-harmonic acoustics. *Arch Comput Methods Eng*, vol. 14, n.4, pp. 343-381.
- Silva, V. F., 2011. *Estratégias para Estudos de iluminação Sísmicas Baseadas na equação Acústica da Onda*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, COPPE.