



FE MODEL FOR PHYSICAL AND GEOMETRICAL NONLINEAR ANALYSIS OF THREE DIMENSIONAL FRAMES OF REINFORCED CONCRETE BUILDINGS

Elisabeth Junges

bethjunges@gmail.com

Dept. of Civil Engineering – Federal University of Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, s/n, CEP 29060-970, Goiabeiras, Vitória, Brasil

Henriette Lebre La Rovere

henriettelarovere@gmail.com

Dept. of Civil Engineering – Federal University of Santa Catarina

Rua João Pio Duarte Silva, 294, CEP 88037-000, Florianópolis, Brasil

Abstract. *This paper presents a refined model for analysis of reinforced concrete (RC) spatial frames and building frames, taking into account both material and geometric nonlinearities. The 3D model is based on the finite element method and it is implemented into a computer program called ANEST/CA. The structures are discretized using 3-node bar elements, by neglecting shear deformation. Material nonlinearity is considered along the element length and over its section area, which is divided into filaments, by assuming that each filament is under a uniaxial stress-state. Nonlinear constitutive laws based on stress-strain relationships are used for both concrete and reinforcement filaments. A refined tension-stiffening model is considered for concrete and a bi-linear stress-strain law is adopted for the reinforcing steel. Torsion is considered decoupled from the other internal forces, and a trilinear constitutive model is adopted to represent the element torsional stiffness. The geometric nonlinearity follows the Total Lagrangean Formulation. Rigid diaphragms constraints can be considered in the modelling. The ANEST/CA program is validated by comparison with experimental tests on RC structures, and also by comparison with CONS program. Results from the analyses show that ANEST/CA program is indeed capable of reproducing the complete nonlinear structural behaviour of RC building structures.*

Keywords: *nonlinear analysis. 3D frames. reinforced concrete. finite elements.*

1 INTRODUÇÃO

Existem diversos modelos de elementos finitos (EF) para análise não linear de estruturas de concreto armado (CA), podendo-se consultar as revisões de literatura contidas em Stramandinoli (2007), Junges (2016) e Stramandinoli e La Rovere (2017). Porém, ainda há uma carência de modelos para análise de pórticos de edifícios de CA em que se considere os principais aspectos que influenciam seu comportamento estrutural, como as não linearidades física e geométrica e consideração da influência das lajes no comportamento destes pórticos. Neste trabalho apresenta-se um modelo de EF de barra tridimensional (3D) para análise não linear física e geométrica de pórticos de CA, desenvolvido pelas autoras. A vantagem deste modelo em comparação aos modelos de EF sólidos é que resulta em um número reduzido de graus de liberdade, viabilizando a análise de estruturas maiores, tais como edifícios de CA.

O modelo, apresentado no item 2, foi desenvolvido a partir do modelo de barra bidimensional (2D) elaborado por Stramandinoli (2007) e é semelhante ao modelo de Holzer et al. (1979), para vigas e colunas, e ao de Marí (1984) para barras tridimensionais. Posteriormente Marí (2000) aprimorou seu modelo inicial, incluindo um modelo de tension-stiffening (TS) desenvolvido por Carreira e Chu (1986). A vantagem do modelo deste trabalho em relação aos modelos semelhantes está na inclusão de um novo modelo de TS, proposto por Stramandinoli e La Rovere (2008), que apresenta uma lei constitutiva para o concreto tracionado entre fissuras que é função da taxa de armadura no elemento de barra, enquanto que, nos modelos usuais de TS, como o de Carreira e Chu (1986), a mesma equação constitutiva é utilizada independentemente da taxa de armadura. Com isto o modelo proposto consegue representar mais realisticamente o comportamento não linear das estruturas de CA após a fissuração, sobretudo no caso de barras subarmadas em que o efeito de TS é mais acentuado. Outro ponto é a adição de um modelo de diafragma rígido para simulação da presença das lajes em edifícios de concreto armado. O modelo apresentado foi implementado computacionalmente em um programa denominado ANEST/CA, sendo que, para estruturas planas, este já foi verificado extensivamente em comparação com ensaios experimentais e outros programas, mostrando excelente correlação (Stramandinoli, 2007; Stramandinoli e La Rovere 2017; Junges e La Rovere, 2017).

Na ausência de resultados experimentais para estruturas tridimensionais, verifica-se o modelo não linear desenvolvido, implementado no programa ANEST/CA, em comparação com o programa CONS, desenvolvido por Marí (2000). A comparação entre os programas é mostrada no item 3, sendo selecionado para este trabalho, dentre alguns exemplos realizados por Junges (2016), um pórtico espacial de CA de um pavimento. No item 3 também comparam-se os resultados numéricos dos programas com ensaios experimentais para o caso de estruturas planas, apenas para um tirante e um pórtico plano de CA, de maneira a ressaltar a diferença entre os diferentes modelos de TS utilizados nos programas ANEST/CA e CONS. Algumas conclusões são extraídas no item 4.

2 MODELO NÃO LINEAR DE ELEMENTO DE BARRA 3D

2.1 Formulação do modelo não linear de elementos finitos de barra 3D

O modelo não linear desenvolvido é baseado no Método dos Elementos Finitos com formulação isoparamétrica, em que a estrutura é discretizada em elementos finitos de barra

tridimensional (3D). Admite-se a hipótese de Euler-Bernoulli, pela qual se desprezam as deformações por cisalhamento. O elemento de barra 3D, ou de pórtico espacial, possui três nós, sendo dois nós nas extremidades com seis graus de liberdade (GL) cada (três de translação: u , v , w ; e três de rotação: θ_x , θ_y , θ_z), e um nó interno localizado no meio do comprimento com apenas um grau de liberdade (deslocamento axial $u_3(13)$), conforme mostra a Fig. 1-a. A seção transversal do elemento pode ter formato retangular ou seção T, de forma a permitir, na modelagem de edifícios, a contribuição da laje na rigidez à flexão das vigas de forma simplificada. Para consideração da não linearidade física, a seção transversal dos elementos é discretizada em filamentos, considerando-se que cada filamento está submetido a um estado uniaxial de tensões (Fig. 1-b).

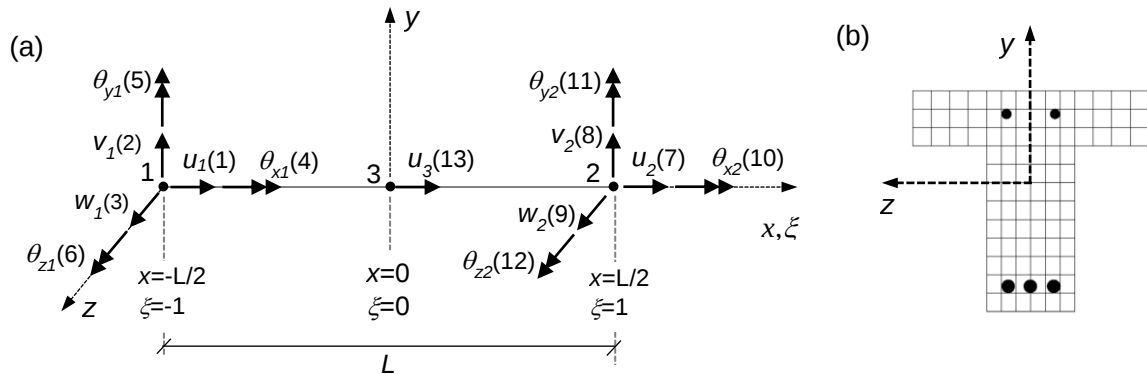


Figura 1. a) Elemento de barra 3D de três nós e 13 GL; b) exemplo de seção transversal (T) discretizada em filamentos de concreto e de armadura de aço.

Adotam-se modelos constitutivos não lineares baseados na relação tensão-deformação para os filamentos de concreto e filamentos de armadura de aço submetidos à tensão uniaxial, descritos nos itens 2.4 e 2.5. Considera-se o efeito da torção desacoplado dos demais esforços, adotando-se um modelo constitutivo simplificado (item 2.6). Os esforços totais em cada seção são encontrados superpondo-se os esforços resultantes das tensões nos filamentos de concreto com os provenientes das tensões nas armaduras longitudinais de aço. Com relação à não-linearidade geométrica, utiliza-se a simplificação para rotações moderadas, com a Formulação Lagrangeana Total.

Adotando-se as hipóteses de Euler-Bernoulli e admitindo-se a teoria de rotações moderadas, o deslocamento longitudinal de um ponto qualquer da seção transversal pode ser obtido por meio da seguinte equação (ver Junges, 2016):

$$u(x, y, z) = u_0(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) \quad (1)$$

onde as rotações são aproximadamente iguais a:

$$\theta_z \cong \frac{dv}{dx} \quad \text{e} \quad \theta_y \cong -\frac{dw}{dx} \quad (2)$$

Considerando-se a teoria de rotações moderadas, pode-se escrever a deformação longitudinal ao longo do elemento pela expressão:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o - y \frac{d\theta_z}{dx} + z \frac{d\theta_y}{dx} \quad (3)$$

onde ε_o é a deformação longitudinal no eixo da barra:

$$\varepsilon_o = \varepsilon_x|_{y=z=0} = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (4)$$

em que se desprezou o termo $\frac{1}{2} \left(\frac{du_o}{dx} \right)^2$ tendo em vista que $\left(\frac{du_o}{dx} \right)$ é muito pequeno em relação à unidade.

As curvaturas φ_z e φ_y para rotações moderadas podem ser aproximadas por:

$$\varphi_z \cong \frac{d\theta_z}{dx} \cong \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \varphi_y \cong \frac{d\theta_y}{dx} \cong -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (5)$$

Assim pode-se reescrever o campo de deformações longitudinais no elemento:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_o - y\varphi_z + z\varphi_y = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - y \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) + z \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (6)$$

A deformação específica longitudinal pode ser dividida em duas parcelas, uma linear e outra não linear:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_L + \varepsilon_{NL} \quad (7)$$

que podem ser escritas em função da coordenada natural ξ , usando-se a Regra da Cadeia:

$$\varepsilon_L = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \varepsilon_{oL}(\xi) - y\varphi_z(\xi) + z\varphi_y(\xi) \quad (8)$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv(\xi)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw(\xi)}{dx} \right)^2 \quad (9)$$

$$x = \frac{L}{2} \therefore \xi = \frac{2}{L} x \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{2}{L}$$

O campo de deslocamentos longitudinais pode ser reescrito em termos de coordenadas naturais por:

$$u(\xi, y, z) = u_o(\xi) - y \frac{dv}{dx}(\xi) + z \left(-\frac{dw}{dx}(\xi) \right) \quad (10)$$

E para descrever os deslocamentos $u_o(\xi)$, $v(\xi)$ e $w(\xi)$ utilizam-se as funções de interpolação usuais:

$$u_0(\xi) = N_1 u_1 + N_7 u_2 + N_{13} \alpha_1 = \begin{bmatrix} N_1 & N_7 & N_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix}; \quad u_0(\xi) = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U} \quad (11)$$

$$v(\xi) = N_2 v_1 + N_6 \theta_{z1} + N_8 v_2 + N_{12} \theta_{z2} = \begin{bmatrix} N_2 & N_6 & N_8 & N_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}; \quad v(\xi) = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U} \quad (12)$$

$$w(\xi) = N_3 w_1 - N_5 \theta_{y1} + N_9 w_2 - N_{11} \theta_{y2} = \begin{bmatrix} N_3 & -N_5 & N_9 & -N_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}; \quad w(\xi) = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U} \quad (13)$$

$$\text{onde: } N_1 = \frac{(1-\xi)}{2}; \quad N_7 = \frac{(1+\xi)}{2}; \quad N_{13} = 1 - \xi^2 \quad (14)$$

$$N_2 = N_3 = 1 - \frac{3}{4}(\xi+1)^2 + \frac{1}{4}(\xi+1)^3 \quad (15)$$

$$N_6 = N_5 = \frac{L}{2}(\xi+1) - \frac{L}{2}(\xi+1)^2 + \frac{L}{8}(\xi+1)^3 \quad (16)$$

$$N_8 = N_9 = \frac{3}{4}(\xi+1)^2 - \frac{1}{4}(\xi+1)^3 \quad (17)$$

$$N_{12} = N_{11} = -\frac{L}{4}(\xi+1)^2 + \frac{L}{8}(\xi+1)^3; \quad (18)$$

Ressalta-se que o parâmetro α_1 está relacionado com o deslocamento axial do nó interno, u_3 (GL número 13), podendo ser obtido com a aplicação de $\xi = 0$ nas funções de interpolação, obtendo-se:

$$u_3(\xi) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \alpha_1$$

Com a inclusão deste nó intermediário o campo de deslocamentos longitudinal no elemento fica compatível (ver Eq.(1), a primeira parcela passa a variar parabolicamente em relação ao eixo x , assim como a segunda e a terceira parcela devido à flexão, pois $v(x)$ e $w(x)$ variam cubicamente em relação a x). Isso permite que a rigidez do elemento seja corretamente representada com a variação na posição da linha neutra, provocada pela fissuração e demais não linearidades do concreto armado, conforme demonstrado por Chan (1982).

Os campos de rotações ao longo do elemento podem ser obtidos a partir do campo de deslocamentos transversais, utilizando-se a Regra da Cadeia, inserindo-se as funções de interpolação (Eq. (15) a Eq. (18)) nas Eqs. (12) e (13):

$$\theta_y(\xi) \cong -\frac{dw}{dx} = -\frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{2}{L} [N'_2 w_1 - N'_6 \theta_{y1} + N'_8 w_2 - N'_{12} \theta_{y2}] = \left(\underset{\sim}{N} \right)_x \underset{\sim}{U} \quad (19)$$

$$\theta_z(\xi) \cong \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} [N'_2 v_1 + N'_6 \theta_{z1} + N'_8 v_2 + N'_{12} \theta_{z2}] = \left(\begin{matrix} N \\ \sim v \end{matrix} \right)_x U_{\sim v} \quad (20)$$

onde $N' = \frac{d}{d\xi}$ e $()_x$ é a derivada em relação a x das matrizes de funções de interpolação.

Da mesma forma, para as curvaturas ao longo do elemento tem-se:

$$\varphi_y(\xi) \cong \frac{d\theta_y}{dx} = \frac{2}{L} \frac{d\theta_y}{d\xi} = -\frac{4}{L^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} \quad (21)$$

$$\varphi_z(\xi) \cong \frac{d\theta_z}{dx} = \frac{2}{L} \frac{d\theta_z}{d\xi} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2 v}{d\xi^2} \quad (22)$$

A Eq. (8) pode ser reescrita sob a forma matricial:

$$\varepsilon_L(\xi, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{oL} \\ \varphi_z \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = A\varepsilon = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad ; \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{oL} \\ \varphi_z \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

onde $\underset{\sim}{\varepsilon}$ é o vetor de deformações generalizadas, que é obtido a partir das Eqs. (11) a (22):

$$\varepsilon_{oL}(\xi) = \frac{du_o}{dx} = \frac{du_o}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} [N'_1 u_1 + N'_4 u_2 + N'_7 \alpha_1] = \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{4\xi}{L} \alpha_1 \quad (24)$$

$$\varphi_y(\xi) = \left[-\frac{6}{L^2} \xi w_1 + \frac{(3\xi - 1)}{L} \theta_{y1} + \frac{6}{L^2} \xi w_2 + \frac{(3\xi + 1)}{L} \theta_{y2} \right] \quad (25)$$

$$\varphi_z(\xi) = \left[\frac{6}{L^2} \xi v_1 + \frac{(3\xi - 1)}{L} \theta_{z1} + \frac{(-6\xi)}{L^2} v_2 + \frac{(3\xi + 1)}{L} \theta_{z2} \right] \quad (26)$$

$$\text{Este vetor pode ser escrito também sob a forma matricial: } \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{U} \quad (27)$$

em que o vetor de deslocamentos $\underset{\sim}{U}$ inclui todos os graus de liberdade (GL) de translação e os de rotação em torno do eixo y e do eixo z , excluindo apenas os GL de rotação em torno do eixo x , pois o efeito da torção será considerado separadamente.

Inserindo-se as equações (19) e (20) e suas respectivas formas transpostas na Eq. (9), pode-se reescrever a parcela de deformação específica não linear sob a forma:

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \underset{\sim}{U}^T \left(\begin{matrix} N \\ \sim v \end{matrix} \right)_x^T \left(\begin{matrix} N \\ \sim v \end{matrix} \right)_x \underset{\sim}{U} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{U}^T \left(\begin{matrix} N \\ \sim w \end{matrix} \right)_x^T \left(\begin{matrix} N \\ \sim w \end{matrix} \right)_x \underset{\sim}{U} \quad (28)$$

No modelo não linear desenvolvido, utiliza-se uma formulação semi-incremental em que se aplicam incrementos de forças, para os quais se calculam incrementos de deslocamentos por meio da matriz de rigidez tangente (Método de Newton-Raphson ou de Comprimento de Arco), e o equilíbrio é verificado em termos de forças totais.

A forma incremental da deformação específica é:

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial U_{\sim F}} \delta U_{\sim F} + \frac{\partial \varepsilon_{NL}}{\partial U_{\sim F}} \delta U_{\sim F} \quad (29)$$

Substituindo-se na equação acima as expressões que definem ε_L e ε_{NL} , tem-se:

$$\delta \varepsilon_x = \left[B_{\sim 0} + U_{\sim v}^T \left(N_{\sim v} \right)_x^T \left(N_{\sim v} \right)_x + U_{\sim w}^T \left(N_{\sim w} \right)_x^T \left(N_{\sim w} \right)_x \right] \delta U_{\sim F} \quad (30)$$

sendo que a segunda parcela do termo entre colchetes forma um sub-vetor que se relaciona com os termos de $\delta U_{\sim F}$ referentes aos GLs presentes no vetor $U_{\sim v}$ e o terceiro termo forma um sub-vetor que se relaciona com os termos de $\delta U_{\sim F}$ referentes aos GLs presentes no vetor $U_{\sim w}$. Definindo:

$$B_{\sim NL,F} = U_{\sim v}^T \left(N_{\sim v} \right)_x^T \left(N_{\sim v} \right)_x + U_{\sim w}^T \left(N_{\sim w} \right)_x^T \left(N_{\sim w} \right)_x \quad (31)$$

tem-se então que:

$$\delta \varepsilon_x = \left(B_{\sim 0} + B_{\sim NL,F} \right) \delta U_{\sim F} \quad (32)$$

O esforço de torção é considerado desacoplado dos esforços axial e de flexão, não sendo influenciado pelo efeito de não linearidade geométrica, pois está se considerando pequenos deslocamentos angulares devido à torção. Adota-se para a rotação em torno do eixo x , $\theta_x(\xi)$ (ou ângulo de torção), uma variação linear ao longo do elemento:

$$\theta_x(\xi) = N_1 \theta_{x1} + N_7 \theta_{x2}, \text{ ou matricialmente: } \theta_x(\xi) = [N_1 \quad N_7] \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

O ângulo de torção por unidade de comprimento φ_x ao longo do eixo x tem valor constante e é obtido derivando-se $\theta_x(\xi)$ em relação a x :

$$\varphi_x = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{d\theta_x}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\theta_x}{d\xi} \frac{2}{L} = -\frac{\theta_{x1}}{L} + \frac{\theta_{x2}}{L} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = B_{\sim T} U_{\sim T} \quad (34)$$

Para se obter a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do elemento, considera-se inicialmente o material elástico-linear (item 2.2) e, em seguida, inclui-se o efeito da não linearidade física (item 2.3).

2.2 Modelo de barra 3D incluindo apenas não linearidade geométrica

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, iguala-se o trabalho virtual das forças internas ao trabalho virtual das forças externas no elemento:

$$\delta W^i = \delta W^e \Rightarrow \int_{V^e} \delta \varepsilon_x \sigma_x dV + \int_L \delta \varphi_x T dx = \delta U_{\sim}^T f_{\sim} \quad (35)$$

onde $\tilde{f}$ é o vetor de forças nodais do elemento que engloba também os momentos torsores T_{x1} e T_{x2} , seguindo-se a numeração dos GL mostrados na Fig. 1-a:

$$\tilde{f}^T = [N_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad T_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{z1} \quad N_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad T_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{z2} \quad N_3] \quad (36)$$

e onde σ_x são as tensões normais que podem ser obtidas em qualquer ponto (ξ, y, z) ao longo do elemento a partir da equação constitutiva para material elástico-linear (Lei de Hooke):

$$\sigma_x(\xi, y, z) = E \varepsilon_x(\xi, y, z) \quad (37)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

O momento torsor T é constante ao longo do elemento:

$$T = GJ \varphi_x \quad (38)$$

e, em qualquer ponto ξ ao longo do elemento, pode-se obter o módulo de elasticidade transversal G e o momento de inércia à torção da seção, J , para se obter a rigidez à torção, GJ .

Substituindo-se as Eqs. (32), (34) e (38) na Eq. (35), tem-se que:

$$\delta U_{\tilde{F}}^T \int_{V^e} \left(\tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL,F} \right)^T \sigma_x dV^e + \delta U_{\tilde{T}}^T \int_L \tilde{B}^T GJ \tilde{B} \tilde{U}_{\tilde{T}} dx = \delta U_{\tilde{f}}^T \tilde{f} \quad \therefore \quad (39)$$

$$\int_{V^e} \left(\tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL,F} \right)^T \sigma_x dV^e + \int_L \tilde{B}^T GJ \tilde{B} \tilde{U}_{\tilde{T}} dx = \tilde{f} \quad (40)$$

Tendo em vista que o comportamento do elemento é não linear, o equilíbrio de forças na Eq. (40) não será necessariamente atendido a cada etapa de carga aplicada, devendo-se utilizar um processo iterativo para se eliminar as forças residuais $(\tilde{\psi})$:

$$\tilde{\psi} = \tilde{f} - \tilde{r} \quad (41)$$

onde o vetor de forças internas ou restauradoras $\tilde{r}$ é dado pela expressão:

$$\tilde{r} = \int_{V^e} \left(\tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL,F} \right)^T \sigma_x dV^e + \int_L \tilde{B}^T T dx \quad (42)$$

podendo ser decomposto em um sub-vetor de $\tilde{r}$ que contém as forças internas de flexão e esforço axial:

$$\tilde{r}_{\tilde{F}} = \int_{V^e} \left(\tilde{B}_0 + \tilde{B}_{NL,F} \right)^T \sigma_x dV^e = \int_{V^e} \tilde{B}^T \sigma_x dV^e \quad (43)$$

e em um sub-vetor que contém os esforços de torção:

$$\tilde{r}_{\tilde{T}} = \int_L \tilde{B}^T T dx \quad (44)$$

Calculam-se também separadamente na matriz de rigidez tangente os termos relativos aos esforços axial e de flexão dos termos relativos ao esforço de torção, por meio de submatrizes. A submatriz de rigidez tangente do elemento relativa aos esforços axial e de flexão é dada por:

$$k_{\sim NL,F}^t = \frac{\partial r_{\sim F}}{\partial U_{\sim F}} = \int_{V^e} \frac{\partial B^T}{\partial U_{\sim F}} \sigma_x dV^e + \int_{V^e} B^T \frac{\partial \sigma_x}{\partial U_{\sim F}} dV^e \quad (45)$$

Inserindo-se as Eqs. (30), (31), (37) e (42) na Eq. (45), obtém-se, após algumas manipulações algébricas (ver Junges, 2016):

$$k_{\sim NL,F}^t = \int_{V^e} \left[\begin{pmatrix} N \\ \sim v \end{pmatrix}_x^T \begin{pmatrix} N \\ \sim v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} N \\ \sim w \end{pmatrix}_x^T \begin{pmatrix} N \\ \sim w \end{pmatrix}_x \right] \sigma_x dV^e + \int_{V^e} \left(B^T E B + B^T E B + B^T E B + B^T E B \right) dV^e \quad (46)$$

que é formada pela soma de três submatrizes, conhecidas como:

$$(i) \quad \text{Matriz geométrica: } k_{\sim g} = \int_{V^e} \left[\begin{pmatrix} N \\ \sim v \end{pmatrix}_x^T \begin{pmatrix} N \\ \sim v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} N \\ \sim w \end{pmatrix}_x^T \begin{pmatrix} N \\ \sim w \end{pmatrix}_x \right] \sigma_x dV^e \quad (47)$$

$$(ii) \quad \text{Matriz inicial elástica: } k_{\sim o} = \int_{V^e} B^T E B dV^e \quad (48)$$

(iii) Matriz gerada ao considerar a relação não linear entre os incrementos de deformação específica e deslocamento:

$$k_{\sim u} = \int_{V^e} \left(B^T E B + B^T E B + B^T E B \right) dV^e \quad (49)$$

Para o caso de se desprezar os efeitos de não linearidade geométrica, anula-se a parcela não linear da deformação específica, ε_{NL} , e a matriz de rigidez tangente $k_{\sim NL,F}^t$ se iguala à matriz de rigidez inicial elástica, $k_{\sim o}$.

A submatriz tangente com os termos de esforço de torção é composta apenas pela matriz inicial elástica:

$$k_{\sim T}^t = \frac{\partial r_{\sim T}}{\partial U_{\sim T}} = \int_L \frac{\partial (B^T T)}{\partial U_{\sim T}} dx \quad \therefore \quad k_{\sim T}^t = \int_L B^T (GJ) B dx \quad (50)$$

2.3 Modelo de barra 3D incluindo não linearidade geométrica e física

Com a introdução da não linearidade física, tem-se que o módulo de elasticidade do material não é mais constante, sendo função do nível de deformação longitudinal. Como a deformação longitudinal ε_x do elemento varia linearmente ao longo do comprimento, altura e

largura da seção transversal, as tensões longitudinais σ_x também irão variar em cada ponto (ξ, y, z) do elemento, devendo-se reescrever a Eq. (37):

$$\sigma_x(\xi, y, z) = E(\xi, y, z) \varepsilon_x(\xi, y, z) \quad (51)$$

o que irá influenciar no cálculo do vetor de forças internas, Eq. (42), e também no cálculo da matriz de rigidez tangente, Eqs. (45) e (50), tendo em vista que:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} = E^t(\xi, y, z) \quad (52)$$

onde E^t é o módulo de elasticidade tangente do material.

As integrais de volume contidas nas expressões (42) e (46) são avaliadas numericamente, utilizando-se as Regras de Gauss para integração ao longo do eixo longitudinal ξ , adotando-se três pontos de Gauss, e, para avaliar as integrais ao longo da área da seção, em cada ponto de Gauss a seção transversal do elemento é dividida em filamentos de concreto e de armaduras de aço.

Utiliza-se uma formulação em função de deformações generalizadas, vetor $\tilde{\varepsilon}$ definido anteriormente na Eq. (27), e tensões generalizadas, vetor $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\tilde{\xi}) = \begin{Bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = \int_{\tilde{A}} \tilde{A}^T \sigma_x dA \quad (53)$$

Os esforços totais na seção são avaliados em cada ponto de Gauss, ξ_g , superpondo-se os esforços resultantes das tensões nos filamentos de concreto com os provenientes das tensões nos filamentos de armaduras longitudinais de aço, utilizando-se as equações constitutivas dos materiais definidas nos itens 2.4 e 2.5.

O sub-vetor que contém as forças internas de flexão e esforço axial pode ser reescrito na forma:

$$\tilde{r}_F = \tilde{r}_o + \tilde{r}_{NL} \quad (54)$$

Tendo em vista que $dx = \frac{L}{2} d\xi$ e $N(\xi) = \int_A \sigma_x dA$, e inserindo-se a Eq. (53), obtém-se:

$$\tilde{r}_o = \int_{V^e} \tilde{B}^T \sigma_x dV = \int_{V^e} \tilde{B}^T \tilde{A}^T \sigma_x dV = \int_{-1}^1 \int_{\tilde{A}} \tilde{B}^T \tilde{A}^T \sigma_x dA \frac{L}{2} d\xi \therefore \tilde{r}_o = \int_{-1}^1 \tilde{B}^T \tilde{\sigma} \frac{L}{2} d\xi \quad (55)$$

$$\tilde{r}_{NL} = \int_{V^e} \tilde{B}^T \sigma_x dV = \int_{-1}^1 \int_{\tilde{A}} \tilde{B}^T \sigma_x dA \frac{L}{2} d\xi \therefore \tilde{r}_{NL} = \int_{-1}^1 \tilde{B}^T N(\xi) \frac{L}{2} d\xi \quad (56)$$

Da mesma forma procede-se para o cálculo da matriz de rigidez tangente $k_{NL,F}^t$:

$$k_{\sim g} = \int_{-1}^{+1} \left[\left(N_{\sim v} \right)_x^T \left(N_{\sim v} \right)_x + \left(N_{\sim w} \right)_x^T \left(N_{\sim w} \right)_x \right] N(\xi) \frac{L}{2} d\xi \quad (57)$$

$$k_{\sim o} = \int_{V^e} B^T E^t(x, y, z) B_{\sim o} dV^e = \int_{-1}^1 \int_{\sim LF} B^T A^T E^t(\xi, y, z) A B_{\sim LF} dA \frac{L}{2} d\xi = \int_{-1}^1 B^T D^t(\xi) B_{\sim LF} \frac{L}{2} d\xi$$

onde $D^t(\xi) = \int_A A^T E^t(\xi, y, z) A dA$ é a matriz constitutiva tangente. (58)

$$k_{\sim u} = \int_{-1}^1 \int_A \left(B_0^T E^t(x, y, z) B_{\sim NL,F} + B_{\sim NL,F}^T E^t(x, y, z) B_0 + B_{\sim NL,F}^T E^t(x, y, z) B_{\sim NL,F} \right) dA \frac{L}{2} d\xi \quad (59)$$

em que se avaliam as submatrizes de rigidez tangente em cada ponto de Gauss, ξ_g , a partir dos módulos de elasticidade tangente obtidos nos filamentos de concreto e nos de armadura de aço da seção transversal, utilizando-se as equações constitutivas dos materiais.

Com relação aos termos referentes ao esforço de torção, a rigidez à torção (GJ) é considerada constante ao longo do comprimento do elemento e ao longo da área da seção, já que é função do ângulo de torção por unidade de comprimento $GJ = GJ(\varphi_x)$, que é constante ao longo do elemento. Utilizando-se o modelo constitutivo de torção definido no item 2.6, obtém-se a rigidez secante e a rigidez tangente de torção, a partir das quais forma-se o subvetor de forças internas e a submatriz de rigidez tangente, relativos à torção.

$$r_{\sim T} = \int_L B^T T dx = \int_{-1}^1 B^T T \frac{L}{2} d\xi = \int_{-1}^1 B^T GJ \varphi_x \frac{L}{2} d\xi \quad (60)$$

$$k_{\sim T}^t = \int_L B^T (GJ)^t B_{\sim T} dx = \int_{-1}^1 B^T (GJ)^t B_{\sim T} \frac{L}{2} d\xi \quad (61)$$

Após a obtenção da matriz de rigidez e vetores de esforços de todos os elementos, forma-se o sistema de equações da estrutura utilizando-se os métodos usuais da análise matricial. O programa ANEST/CA utiliza alocação dinâmica de memória e tem um algoritmo para renumerar os nós internamente de forma a minimizar a banda da matriz de rigidez, que é armazenada em perfil. Estão disponíveis para a solução do sistema de equações não lineares os algoritmos de Newton-Raphson e o Método do Comprimento do Arco. O programa ANEST/CA ainda dispõe da opção de considerar um modelo para simular o comportamento no plano das lajes como um diafragma rígido, possibilitando a análise de pórticos espaciais de edifícios de concreto armado. Mais detalhes sobre as formulações adotadas e opções de análise do programa ANEST/CA podem ser conferidas em Junges (2016).

2.4 Modelo constitutivo para o concreto

Neste trabalho adota-se a hipótese de aderência perfeita entre armadura e concreto, utilizando-se para consideração do efeito *tension-stiffening* (TS) um modelo constitutivo para o concreto fissurado alterando-se a equação constitutiva do concreto sob tração. Utiliza-se o modelo de TS proposto por Stamandinoli e La Rovere (2008):

$$\sigma_{ct} = E_c \varepsilon_t \quad ; \quad \varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \quad (62)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ct,m} e^{-\alpha \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_{cr}} \right)} \quad ; \quad \varepsilon_{cr} < \varepsilon_t \leq \varepsilon_y \quad (63)$$

em que $\alpha = 0,017 + 0,255(n\rho) - 0,106(n\rho)^2 + 0,016(n\rho)^3$

$$\sigma_{ct} = 0 \quad ; \quad \varepsilon_t > \varepsilon_y \quad (64)$$

onde σ_{ct} é a tensão de tração no concreto; $f_{ct,m}$ é a resistência à tração do concreto; $\varepsilon_{cr} = f_{ct,m}/E_c$ é a deformação correspondente ao início da fissuração; E_c é o módulo de elasticidade do concreto; e ε_t é a deformação de tração no concreto.

Para a aplicação deste modelo em barras submetidas à flexão, pode-se estimar a altura efetiva da zona tracionada em que será considerado o efeito por meio de uma equação recomendada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (ver Junges, 2016):

$$h_{ef} = 2,5(h - d) < \frac{h - x}{3} \cong \frac{h}{4} \quad (65)$$

Para o concreto submetido à compressão, utilizam-se dois modelos no programa ANEST/CA. O primeiro é uma modificação do modelo proposto por Hognestad (1951), adotando-se para a curva tensão-deformação do concreto uma equação parabólica tanto no ramo ascendente como no ramo descendente da curva:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (66)$$

onde σ_c é a tensão de compressão no concreto; f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e ε_0 é a deformação correspondente; ε_c é a deformação de compressão no concreto (avaliada no centro do filamento de concreto).

O segundo modelo disponível no programa ANEST/CA é o modelo do CEB-FIP 2010 para concretos de classe até C120 ($f_{ck} = 120$ MPa):

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \left(\frac{-\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)} f_{cm} \quad ; \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon_{lim} \quad ; \quad \varepsilon_{c1} = 0,7 f_{cm}^{0,31} \quad (67)$$

$$\varepsilon_{lim} = 2,8 + 27[(98 - f_{cm})/100]^4 \quad ; \quad E_{ci} = 21500 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad ; \quad E_{c1} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}} \quad (68)$$

onde ε_{c1} é a deformação correspondente a f_{cm} ; E_{ci} : é o módulo de deformação longitudinal inicial calculado por (f_{cm} em MPa) e E_{c1} é o módulo de deformação secante.

No programa ANEST/CA pode-se utilizar também um outro modelo que leva em conta o confinamento do concreto propiciado pelos estribos de aço (ver Junges, 2016).

2.5 Modelo constitutivo para o aço das armaduras

O aço é considerado um material elasto-plástico, para o qual se adota um modelo bilinear, tanto na tração como na compressão. Neste modelo pode-se considerar ou não o encruamento do aço (*strain-hardening*), por meio do coeficiente s_h , que é a razão entre os módulos no regime plástico e no regime elástico. As deformações e tensões longitudinais são avaliadas no centro dos filamentos de cada armadura na seção transversal do elemento.

2.6 Torção

Utiliza-se um modelo trilinear de momento torsor - ângulo de torção por unidade de comprimento (ver Fig. 2), semelhante ao adotado adotada por Chan (1982) e Marí (2000). A adoção de um modelo simplificado para se calcular a rigidez da seção transversal do elemento à torção se justifica pelo fato deste modelo 3D ser destinado à análise de estruturas de edifícios, em que o esforço de momento torsor é em geral muito pequeno, quando presente.

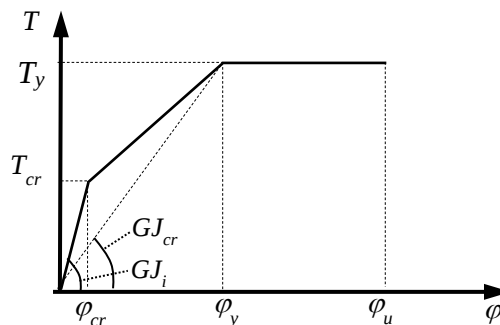


Figura 2. Modelo trilinear de torção

A rigidez inicial à torção pode ser aproximada pela equação:

$$GJ_i = \eta \cdot a^3 \cdot b \cdot G \quad \text{sendo} \quad \eta = 0,333 - \frac{0,224}{(b/a)} + \frac{0,032}{(b/a)^2} \quad (69)$$

em que a e b são as medidas da seção transversal retangular, sendo $b \geq a$, e demais parâmetros são baseados em ensaios experimentais (ver Junges, 2016).

3 COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS DO PROGRAMA ANEST/CA COM DO PROGRAMA CONS E ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Para a validação do modelo implementado no programa ANEST/CA é feita uma comparação dos resultados obtidos pelo modelo com os do modelo do programa CONS e com resultados experimentais. Apresentam-se primeiramente um tirante e um pórtico plano, ambos ensaiados experimentalmente. Na sequência mostra-se um pórtico teórico tridimensional para comparação entre os programas e demonstração da capacidade de análise do ANEST/CA.

O modelo do programa CONS, que é utilizado no estudo comparativo, foi desenvolvido por Marí (2000) e é destinado à análise não linear física e geométrica, diferida no tempo, de pórticos tridimensionais e pontes de concreto armado e protendido, construídos em etapas. Neste modelo desconsidera-se a deformação devido ao cisalhamento e admite-se aderência

perfeita entre concreto e armadura, levando em conta os efeitos de fluência e retração do concreto. Utiliza-se um elemento de barra semelhante ao adotado no modelo apresentado, com três nós e um total de treze graus de liberdade. A seção transversal pode ter forma genérica e é discretizada em filamentos de concreto e armadura, em que cada um é submetido a um estado uniaxial de tensões. A matriz de rigidez do elemento é obtida pela contribuição de todos os filamentos, utilizando-se apenas dois pontos de Gauss para integração ao longo do elemento. A flexão e a torção são consideradas desacopladas, e adota-se para torção o mesmo modelo trilinear indicado no item 2.6. Para o concreto sob compressão, utiliza-se o modelo constitutivo original de Hognestad (1951); um modelo bilinear é usado para as armaduras de aço, e um multilinear para o aço protendido. Adota-se o modelo constitutivo para o concreto sob tração proposto por Carreira e Chu (1986), com o parâmetro β , que regula o decaimento da curva pós-fissuração igual a 3 (parâmetro interno do programa). Para consideração da não linearidade geométrica utiliza-se a Formulação Lagrangeana atualizada. Adota-se a formulação com matriz de rigidez tangente, acoplada a um método de integração no tempo, podendo-se utilizar na solução das equações tanto controle de carga como de deslocamentos para obtenção da curva carga-deslocamento completa.

3.1 Tirante de concreto armado

Para demonstrar a correta implementação do modelo de TS no programa ANEST/CA e também compará-lo ao modelo utilizado pelo programa CONS, apresenta-se a seguir os resultados das análises obtidas por ambos os programas para o tirante de concreto armado ensaiado por Hwang e Riskalla (1983) *apud* Gupta e Maestrini (1990). Selecionou-se o tirante número 7, que não possui armaduras transversais, o qual foi ensaiado experimentalmente à tração uniaxial, com 0,762 m de comprimento, seção transversal com área de $0,178 \times 0,305 \text{ m}^2$ e taxa de armadura $\rho = 1,476 \%$. Para o concreto tem-se $f_{ct} = 2,62 \text{ MPa}$, $E_c = 27794 \text{ MPa}$ e para o aço das armaduras longitudinais tem-se $f_y = 469 \text{ MPa}$ e $E_s = 199 \text{ GPa}$. Utilizou-se apenas um elemento para análise do tirante ($\alpha=0,043$ no modelo de TS, Eq. (63)).

Na Fig. 3-a mostram-se os resultados obtidos em termos de carga total aplicada (kN) *versus* deformação ε (‰). Nota-se a proximidade dos resultados obtidos pelo modelo de TS do ANEST/CA com os resultados experimentais, apresentando uma diferença mais significativa apenas na parte final da curva carga-deformação. Já o modelo de TS utilizado pelo modelo do CONS mostrou uma queda acentuada de rigidez imediatamente após o tirante atingir a carga de fissuração do concreto (aproximadamente 155 kN) tanto para a análise realizada com controle de carga, quanto pela análise realizada com controle de deslocamento, sendo que esta última análise mostrou um trecho de descarga/recarga logo após a fissuração. Não houve diferença entre os resultados obtidos pelo programa ANEST/CA com controle de carga ou de deslocamento (método do comprimento do arco).

Para melhor visualizar a diferença entre os modelos de TS e os valores experimentais, na Fig. 3-b são apresentadas as curvas tensão-deformação para o concreto do tirante. Como já mencionado, o programa CONS utiliza o modelo de TS de Carreira e Chu (1986), com o parâmetro $\beta = 3$, que regula o decaimento da curva pós-fissuração. Com o objetivo de avaliar a influência do parâmetro β no modelo de TS, mostra-se, além do resultado obtido com o parâmetro $\beta = 3$ (obtido diretamente do programa CONS), as curvas obtidas adotando-se $\beta = 1,5$ e $\beta = 2,0$, que são os valores indicados por Carreira e Chu (1986), baseados em resultados experimentais. Observando-se os resultados, fica claro que o modelo de T.S. usado no

programa CONS é muito sensível ao valor do coeficiente β , sendo que, ao se adotar o valor $\beta = 1,5$, esse modelo de TS fica mais próximo aos resultados obtidos experimentalmente e também aos resultados do modelo do programa ANEST/CA para o exemplo em questão. Como no programa CONS consideram-se os efeitos de retração e fluência do concreto, acredita-se que o valor adotado internamente no programa, $\beta = 3$, está ajustado para fornecer resultados adequados no caso da inclusão desses efeitos, uma vez que o efeito de TS diminui, principalmente com o efeito de retração do concreto.

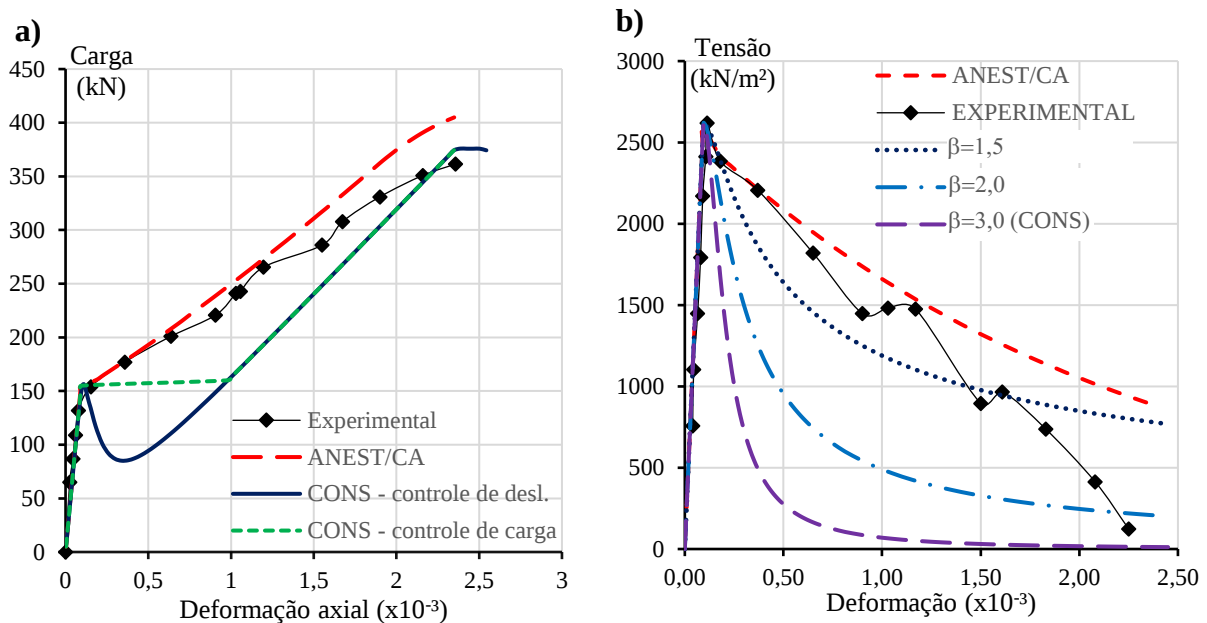


Figura 3. Tirante 7 - comparação entre os modelos de T.S. dos programas CONS e ANEST/CA: a) para a relação carga versus deformação axial; b) para a relação tensão versus deformação axial.

Quando a taxa de armadura de um elemento é aumentada, aumenta a relação $n\rho$ no modelo de Stramandinoli e La Rovere e, conseqüentemente, diminui o efeito de TS. Portanto, conforme se aumenta a taxa de armadura, diminui-se a diferença entre os resultados dos dois modelos de TS dos programas ANEST/CA e CONS, conforme pode ser constatado em Junges (2016) por meio de exemplos em que se varia a taxa de armadura e comparam-se os resultados dos dois modelos. Ressalta-se que o modelo de TS desenvolvido por Stramandinoli e La Rovere (2008) já foi comparado com vários resultados experimentais de tirantes e vigas de CA mostrando uma ótima correlação.

3.2 Pórtico plano de concreto armado

Ernst *et al.* (1973) ensaiaram diversos pórticos planos de um pavimento e um vão com o objetivo de avaliar o comportamento destes sob cargas verticais e laterais. O pórtico denominado A60 foi selecionado neste trabalho para a comparação dos resultados teóricos obtidos pelos programas ANEST/CA e CONS com os resultados experimentais. A geometria, carregamento e armação do pórtico A60 estão ilustrados na Fig. 4-a e os dados dos materiais concreto e aço estão listados na Tabela 1, em que os valores mostrados em negrito foram obtidos experimentalmente. Para ambos os programas adotou-se o modelo de Hognestad para

o concreto sob compressão. O pórtico foi discretizado em 24 elementos com 30,5 cm de comprimento cada; a seção transversal, que é a mesma para os pilares e a viga, foi discretizada em 20 camadas na altura e 2 na largura (40 filamentos no total).

Tabela 1: Pórtico A60 - propriedades do concreto e do aço (unidades em kN e m).

Concreto					Aço			
E_{ci}	f_{cm}	ϵ_u	f_{tm}	G	E_s	E_{s2}	f_y	ϵ_u
38955000	38955	0,0035	2957	10000000	181797000	11453211	425406	0,007

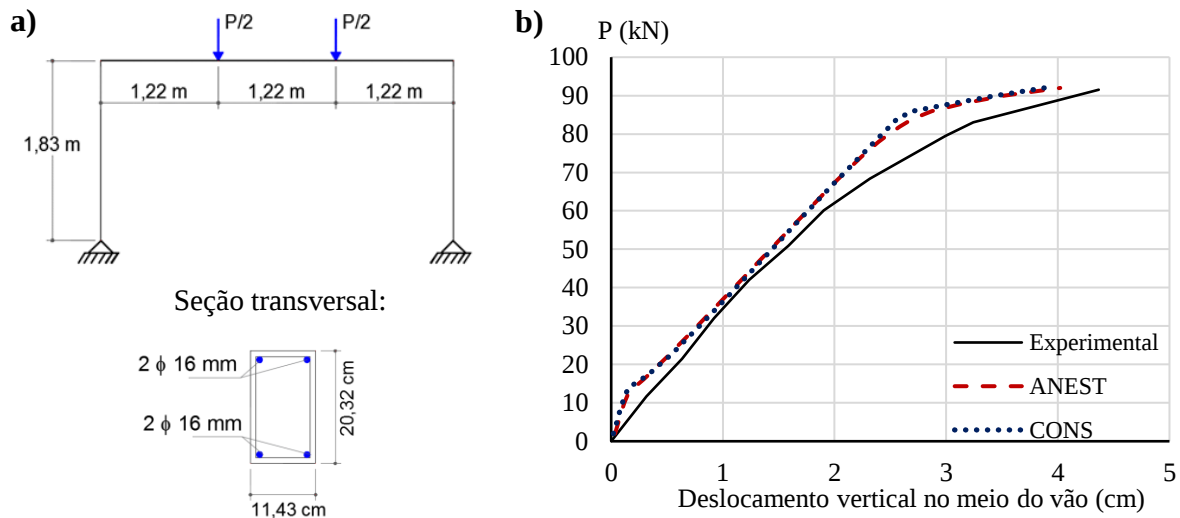


Figura 4. Pórtico A60 ensaiado por Ernst *et al.*: a) geometria, carregamento e armação; b) comparação entre resultados experimental e numéricos dos programas ANEST/CA e CONS.

A análise do gráfico carga total *versus* deslocamento no meio do vão da viga (Fig. 4-b) mostra a similaridade entre os resultados obtidos pelos modelos numéricos, sendo que ambos mostraram um comportamento um pouco mais rígido do que o modelo experimental. Para este exemplo em que a taxa de armadura é alta, o efeito de TS é pequeno, logo era esperado que os modelos dos programas ANEST/CA e CONS fornecessem resultados semelhantes mesmo utilizando diferentes modelos de TS. A carga máxima prevista pelos modelos numéricos ($P = 92 \text{ kN}$) foi muito próxima da obtida experimentalmente ($P = 89 \text{ kN}$). No trecho inicial elástico as curvas dos modelos numéricos diferem da do modelo experimental, provavelmente pelo fato do pórtico já haver fissurado parcialmente devido ao peso próprio, ou devido à aplicação de alguns ciclos iniciais de carga para acomodação dos equipamentos.

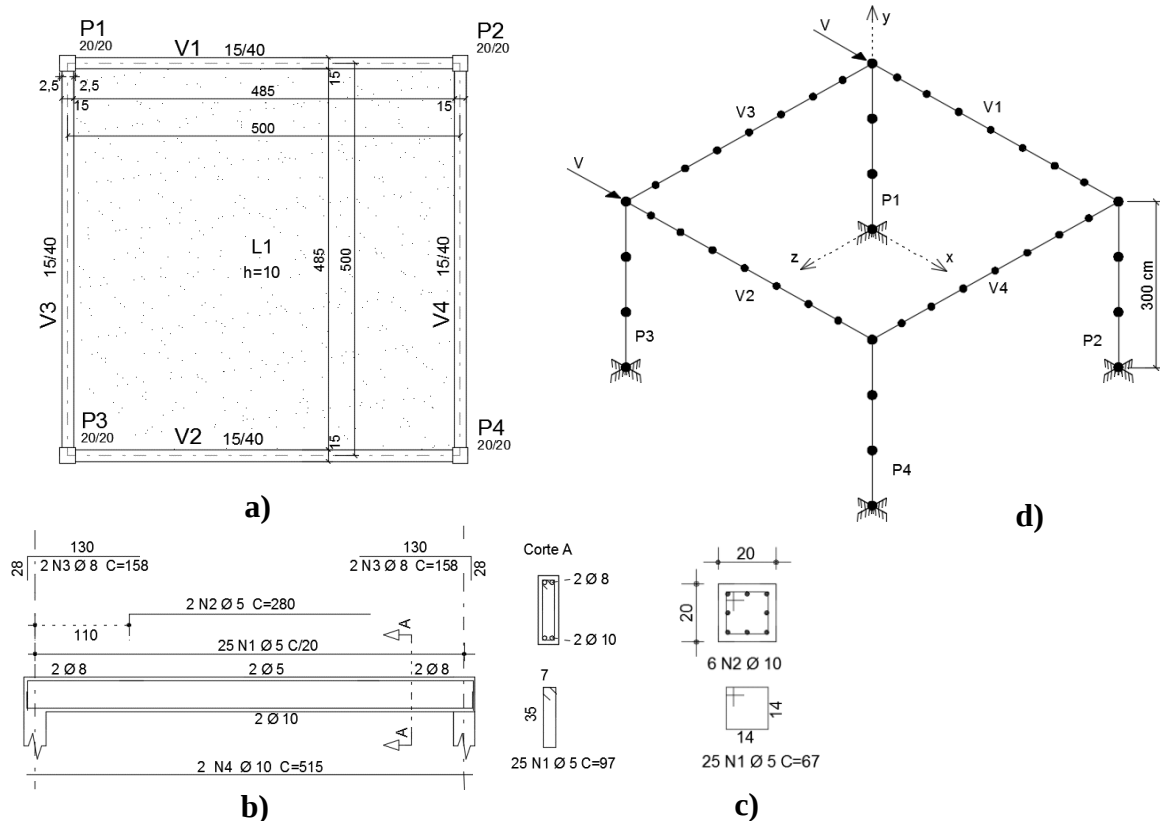
3.3 Pórtico espacial de concreto armado de um pavimento

Na tese de doutorado da primeira autora (Junges, 2016) foram analisados diversos pórticos espaciais de 1, 5 e 10 pavimentos. Selecionou-se para este trabalho um único pórtico espacial de apenas um vão e um pavimento com 3,0 m de altura, para possibilitar a comparação com o programa CONS (devido à restrição deste do número máximo de nós). Adotou-se concreto C25, cujas propriedades estão listadas na Tabela 2. A planta de fôrmas e

o detalhamento das armaduras estão na Fig. 5. A estrutura é totalmente simétrica, sendo então usado um mesmo detalhamento de armaduras longitudinais e transversais para todas as vigas, assim como para os pilares, que apresentam taxa de armadura longitudinal de 1,57%.

Tabela 2: Pórtico espacial - propriedades do concreto e do aço (unidades em kN e m).

Concreto						Aço				
f_{ck}	f_{cm}	ϵ_u	E_{ci}	f_{tm}	G	Classe	f_y	E_s	E_{s2}	ϵ_u
25	31600	0,0035	28000000	2565	10062000	CA-50	500000	210000000	210000	0,02



Obs.: diâmetro das armaduras em mm e demais medidas em cm.

Figura 5. Pórtico de um pavimento: a) planta de fôrmas; b) armação das vigas; c) armação dos pilares; d) discretização do pórtico em 44 elementos de barra.

Aplica-se no pórtico uma combinação de cargas em que todo o peso próprio da estrutura é aplicado na primeira etapa de carregamento e, a partir da segunda etapa, aplica-se incrementalmente, até a ruptura do pórtico, a sobrecarga (aplicada como carga distribuída nas vigas) e a carga horizontal de vento nos nós de interseção entre os eixos das vigas e os eixos dos pilares P1 e P3, conforme mostra a Fig. 5. As cargas foram aplicadas com seus valores característicos, sendo aplicado somente o coeficiente redutor de 0,8 na carga de vento, de forma a se obter a mesma proporcionalidade entre cargas da combinação adotada no dimensionamento do pórtico pelo programa AltoQi Eberick: $1,4 \cdot G + 1,4 \cdot Q + 1,4 \cdot 0,8 \cdot V$; em que G são as cargas permanentes, Q cargas acidentais e V força lateral de vento.

Para este pórtico realizou-se primeiramente um pequeno estudo de malha a fim de complementar estudos anteriores já realizados para estruturas no plano (ver Stramandinoli, 2007). Constatou-se que já para a segunda malha testada, em que se discretizam as vigas em elementos de 60 e 65 cm e pilares com 100 cm (total de 44 elementos), há uma convergência dos resultados. Estudo similar foi feito em relação à discretização da seção transversal em filamentos, observando-se que para a seção discretizada com 8 ou mais camadas na altura os resultados já convergem (ver Junges, 2016). Assim, adotou-se a malha mencionada para as análises nos programas ANEST/CA e CONS, discretizando-se a seção dos pilares em 10 camadas nas duas direções e a das vigas em 20 camadas na altura e 10 camadas na largura.

Os resultados obtidos em termos de carga lateral total *versus* deslocamento lateral no topo do pórtico estão mostrados na Fig. 6 para as diferentes análises realizadas com os programas ANEST/CA e CONS. Para visualizar a influência das duas não linearidades consideradas nas análises, a não linearidade física (NLF) e a não linearidade geométrica (NLG), foram executadas análises considerando estes efeitos separadamente (somente NLG, somente NLF), além das análises considerando-se ambos efeitos (NLFG), tanto para o modelo do ANEST/CA quanto para o modelo do CONS. Com o programa ANEST/CA também realizou-se uma análise considerando-se, além das não linearidades, a restrição de diafragma rígido (NLFG com DR) e ainda uma análise elástico-linear com consideração das armaduras.

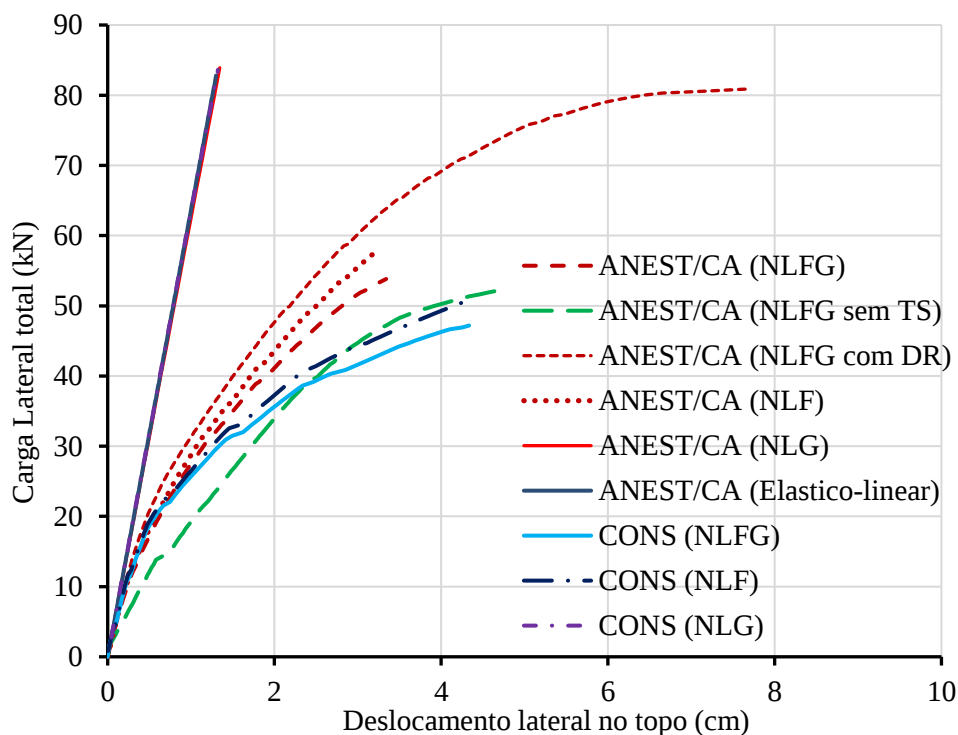


Figura 6. Gráfico carga lateral *versus* deslocamento lateral no topo de diferentes análises obtidas pelos programas ANEST/CA e CONS.

Como se trata de um pórtico de um pavimento de pouca altura, já era esperado que a influência da não linearidade geométrica fosse pequena, como comprovam os resultados mostrados, em que as curvas para as análises considerando somente NLG de ambos os programas praticamente coincidem com o resultado da análise elástico-linear efetuada pelo

ANEST/CA. Em todas as análises mostradas a fissuração dos elementos iniciou na primeira etapa em que se aplica todo o peso próprio da estrutura. Comparando a curva obtida pelo ANEST/CA com a obtida pelo CONS, para o caso de consideração de ambas não linearidades (NLFG) e para o caso de apenas não linearidade física (NLF), nota-se uma diferença significativa entre as curvas após a carga lateral total de 30 kN. O modelo do ANEST/CA mostra-se mais rígido do que o modelo de CONS devido à diferença no modelo de TS utilizado em cada programa (ver item 3.1). De forma a visualizar esta diferença entre os modelos, na mesma figura está mostrada também a curva obtida na análise pelo ANEST/CA com NLFG, porém sem consideração do efeito TS. Observa-se que a diferença entre os modelos de TS utilizados pelos dois programas influencia fortemente na diferença entre os resultados para este exemplo em que a taxa de armadura é baixa e, portanto, o efeito de TS é maior. O mesmo não ocorreu no exemplo anterior (item 3.2) em que a taxa de armadura era maior.

Pela Fig. 6 ficou evidente a contribuição do diafragma rígido (DR) na rigidez lateral do pórtico ao se comparar as curvas NLFG e NLFG com DR obtidas pelo programa ANEST/CA. Analisando-se os valores obtidos para a relação momento-curvatura dos pilares, observou-se que, na análise com consideração do modelo de DR, os pilares apresentaram comportamento similares, otimizando a utilização de toda a reserva de capacidade resistente do pórtico. Também se observou um enrijecimento da rigidez à flexão das vigas ao considerar-se o modelo de DR na análise (ver mais detalhes em Junges, 2016).

4 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a formulação de um modelo de EF para análise não linear física e geométrica de pórticos tridimensionais de edifícios de concreto armado. O modelo foi verificado em comparação com os resultados do programa CONS e alguns resultados experimentais. No caso do tirante ensaiado por Hwang e Riskalla (1983), observou-se uma melhor representação do efeito TS pelo modelo adotado no programa ANEST/CA em comparação ao modelo usado no programa CONS. Para o pórtico plano ensaiado por Ernst *et al.* (1973), ambos programas mostraram resultados próximos ao obtido experimentalmente e muito próximos entre si, devido ao fato da taxa de armadura utilizada no pórtico ser elevada e assim ter pouco efeito de TS, diminuindo portanto a diferença entre os dois programas que adotam diferentes modelos de TS. O estudo do pórtico tridimensional demonstrou as diferentes opções de análise do programa ANEST/CA e pode-se constatar a importância de se considerar a não linearidade física na análise estrutural de um pórtico, inclusive a importância do efeito de TS. Para este exemplo em que a taxa de armadura nos elementos era baixa, logo, maior o efeito de TS, houve uma diferença maior entre os resultados numéricos do programa ANEST/CA e os do programa CONS, mostrando-se mais rígido o modelo do ANEST/CA. A vantagem desse último é que utiliza um modelo de TS que é função da taxa de armadura dos elementos, em comparação aos demais modelos de TS que independem da taxa de armadura. O programa ANEST/CA poderá ser uma ferramenta útil, inclusive para avaliar métodos simplificados de consideração de não linearidade em projetos de edifícios altos de CA.

Agradecimentos

As autoras agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

pelas de doutorado concedidas à primeira autora. Agradecem também ao Prof. Marí da Universidade Politécnica da Catalunha por disponibilizar o programa CONS para as análises.

REFERÊNCIAS

- Carreira, D. J.; Chu, K. H., 1986 Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *ACI Journal*. 83-3, p. 21-28.
- Chan, E. C., 1982. *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams*. Berkeley, 361 f. PhD Thesis, University of California.
- Comité Euro-International du Béton, 2010. *CEB-FIP Model Code 2010*. London, Thomas Telford.
- Ernst, G. C., Smith, G. M., Riveland, A. R., & Pierce, D. N., 1973. Basic reinforced concrete frame performance under vertical and lateral loads. *ACI Journal*, v. 70, n. 4, p. 261-269.
- Gupta, A., Maestrini, S. R., 1990. Tension-stiffness model for reinforced concrete bars. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, v. 116, n. 3, p. 769-791.
- Hognestad, E., 1951. *A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members*. Bulletin Series, 399:128, University of Illinois, Urbana, Illinois.
- Holzer, S. M., Somers, A. E., Bradshaw, J.C., 1979. Finite response of inelastic RC structures. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 105, n. ST1, p 17-33.
- Junges, E., 2016. *Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de pórticos tridimensionais de edifícios de concreto armado*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Junges, E., La Rovere, H. L., 2017. Comparison between simplified and FE models for short-term deflection in continuous RC beams. *Ibracon Structures and Materials Journal*, Vol. 10, n. 2, p. 415-450.
- Marí, A. R., 1984. *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames*. Berkeley, Report n. UCB/SESM – 84/12, University of California.
- Marí, A. R., 2000. Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames. *Engineering Structures*. Vol. 22, p. 585-596.
- Stramandinoli, R. S. B., 2007. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Stramandinoli, R. S. B., La Rovere, H. L., 2008. An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of RC members. *Engineering Structures*, n. 30, p.2069-2080, 25.
- Stramandinoli, R. S. B., La Rovere, H. L., 2017. Finite element model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams and plane frames. *Ibracon Structures and Materials Journal*, Vol. 10, n. 2, p. 386-414.