



ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO VIA ELEMENTOS FINITOS

Bryan German Pantoja Rosero

bgpantojar@aluno.unb.br

Raul Dario Durand Farfan

durand@unb.br

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília

Resumo. Estudos dinâmicos de estruturas de concreto armado feitos pelo método dos elementos finitos geralmente realizam simplificações enquanto à presença da armadura. Por exemplo, algumas análises são realizadas usando elementos sólidos com propriedades equivalentes para representar o concreto armado como um meio homogêneo. Neste contexto, este trabalho estuda a incorporação de elementos de barra para representar a armadura em uma análise dinâmica. Isto permite por exemplo identificar locais onde a armadura é mais solicitada e locais onde é conveniente seu acréscimo. Assim, foi necessário considerar aspectos como a forma de representação da armadura, modelos constitutivos apropriados e do método de integração no tempo. Existem na literatura métodos para representar a armadura via elementos finitos tais como o discreto, o distribuído e o embutido. No entanto se utilizou o método denominado semi-embutido, que permite avaliar tensões e deslizamentos do reforço. Por outro lado, para a implementação numérica usou-se modelos constitutivos elásticos-lineares para o concreto, o aço e a interface aço-concreto. Também foi implementado o algoritmo de Newmark para a integração no tempo e a determinação de deslocamentos. Foram realizadas análises tridimensionais de vigas simplesmente apoiadas com diferentes configurações usando a metodologia proposta.

Palavras-Chave: Análise dinâmica, Elementos Finitos, Concreto Armado, Método semi-embutido

1 INTRODUÇÃO

Análises de equilíbrio em estruturas de concreto armado frequentemente são feitas com o método dos elementos finitos pelas vantagens oferecidas como a versatilidade de modelar geometrias complexas, materiais heterogêneos e não lineares. Devido à não homogeneidade do concreto armado, por estar composto de dois materiais, a modelagem por elementos finitos apresenta descontinuidades que devem ser levadas em conta. Atualmente, há diferentes metodologias para a modelagem da armadura dentro do concreto como os métodos: distribuído, discreto, embutido e semi-embutido. Cada método tem vantagens e desvantagens. No método distribuído tem-se a facilidade na obtenção das matrizes de rigidez, mas é difícil conhecer o comportamento entre os materiais. O discreto permite compreender a interação aço-concreto, mas têm dificuldades na discretização do domínio e na localização exata das barras nos elementos sólidos. O embutido oferece liberdades na hora da localização dos elementos barra dentro dos elementos sólidos, mas não permite avaliar a interação entre o aço e o concreto. Por fim, o método semi-embutido fornece benefícios de localizar os elementos barras corretamente e o conhecimento do comportamento entre aço e concreto mas, em contrapartida, tem aumento no esforço computacional.

No método semi-embutido, proposto por Durand (2008), os elementos de barra atravessam os sólidos possibilitando a localização real da armadura. O método permite também, conhecer os deslocamentos entre materiais fazendo uso de outro elemento chamado interface ou junta. O uso de um terceiro elemento, além dos elementos sólidos e barra, aumenta o número de graus de liberdade na análise e o gasto computacional. Tem-se estudado o método nos últimos anos, gerando como parte dos resultados das pesquisas o programa Fem-Lab (Durand e Farias, 2012). Este é um programa de análises estrutural via elementos finitos que usa o método semi-embutido para a modelagem da armadura.

Atualmente, os estudos de análise dinâmica no concreto armado apresentam dificuldades na hora de modelar a armadura como, por exemplo, a localização exata das barras de aço e o desconhecimento da interação entre os materiais aço e concreto. Estes obstáculos estão relacionados com as restrições dos métodos usados, como a discretização do domínio em elementos finitos, modelagem do aço como perfeitamente distribuído nos elementos de concreto e suposição de perfeita aderência entre materiais.

Neste contexto, este trabalho apresenta um estudo de estruturas de concreto armado sujeito a cargas dinâmicas com o método dos elementos finitos. A modelagem da armadura é feita usando o método semi-embutido, pelo qual se obteve resultados do comportamento relativo interação aço-concreto sob cargas dinâmicas. A resposta das estruturas analisadas no tempo foi obtida mediante o uso do método de integração numérica de Newmark para acelerações constantes. Assim, o presente estudo tem como objetivos conhecer o comportamento dinâmico da armadura dentro do concreto armado quando estes tipos de estruturas são submetidas a carregamentos constantes ou variáveis no tempo. Para isso são encontradas as variações no tempo dos deslocamentos em locais relevantes das estruturas analisadas, tensões axiais na armadura e tensões cisalhantes no contato entre os materiais.

2 MÉTODO SEMI-EMBUTIDO

Durand (2008), dentro do método dos elementos finitos propôs um novo método para a modelagem de elementos de barra dentro dos elementos sólidos chamado método semi-embutido.

Este método combina as vantagens do método embutido e do método discreto, permitindo assim aos elementos de barra atravessar os elementos sólidos sem limitações na discretização da malha e possibilitando conhecer o comportamento relativo dos dois elementos. Outra benefício do método é aplicar condições de contorno diretamente nos elementos de barra por serem considerados independentes, com a utilização de um terceiro elemento, chamado elemento de interface, que facilita conhecer também as tensões cisalhantes no contato das barras e sólidos.

Visto que o método considera os elementos sólidos e barras como independentes, é necessário realizar durante a geração da malha dos elementos finitos, um algoritmo de discretização dos elementos de barra. Além disso, dada a inclusão de um terceiro elemento que simule a interface dos elementos, é preciso ter em conta sua modelagem. Durand (2008), apresenta o modelo pontual da interface, sendo um modelo discreto que liga os nós das barras aos elementos sólidos por meio de molas. Devido às limitações desse modelo no conhecimento do comportamento ao longo de toda a barra, Durand e Farias (2012), aperfeiçoa ele, apresentando um modelo contínuo para a interface, que liga a totalidade dos elementos barra aos sólidos por meio de um elemento junta.

2.1 Discretização da armadura

Uma barra que represente a armadura (reforço) de uma estrutura a ser analisada com o método dos elementos finitos está definida pelos seus pontos inicial e final. No pre-processamento, quando a malha dos elementos está sendo gerada, o mencionado reforço deve ser discretizado em elementos de barra. O início e o final de cada elemento será definido pelas interseções com os elementos sólidos. A Fig. 1, representa a discretização descrita neste parágrafo.

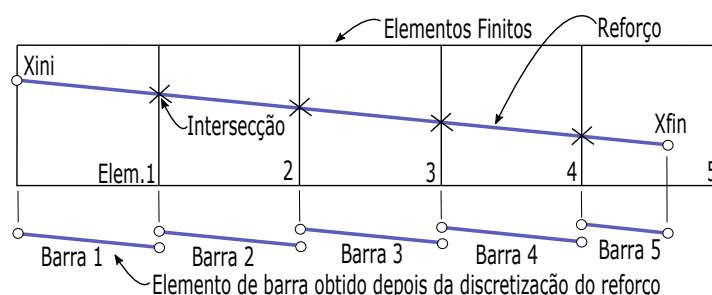


Figura 1: Discretização do reforço dentro dos elementos sólidos (Durand e Farias, 2012).

Existem vários algoritmos que resolvem esta discretização da armadura, na qual tem como objetivo definir as coordenadas iniciais e finais de cada elemento barra. Durand et al. (2015), apresenta o método da bissetão que soluciona este problema.

2.2 Modelagem da interface

Durand e Farias (2012), apresentam um modelo contínuo da interface para simular todos os pontos de contato dos elementos sólidos e barra por meio de um elemento junta que está distribuído continuamente ao longo deles. Este elemento possibilita a avaliação dos deslocamentos relativos entre os dois elementos, além das tensões cisalhantes no contato que podem ser geradas.

Na Fig. 2, pode-se observar a representação dos três elementos usados no método semi-embutido, após o deslizamento do elemento barra. O sólido, é um elemento hexaédrico de 8 nós

(nós de cor azul). Os nós de cor branca representam o elemento barra na sua posição inicial e os de cor vermelha após o deslocamento. O elemento de interface é representado pela região cinza que, além de isso, mostra a deformação existente entre elementos nos dois instantes. Os nós verdes correspondem aos pontos de Gauss do elemento junta usados para integração numérica.

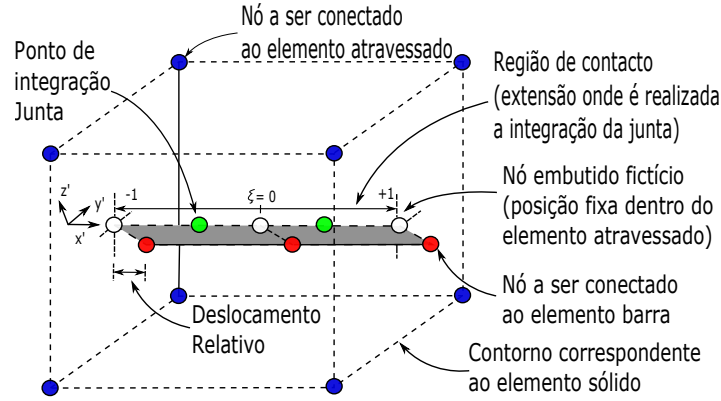


Figura 2: Representação dos 3 elementos do método semi-embutido (Durand e Farias, 2012).

3 ELEMENTOS FINITOS

Para modelar estruturas de concreto armado sob carregamentos dinâmicos é necessário partir de uma formulação dada pelo equilíbrio dinâmico. Esta formulação depende das propriedades dos elementos finitos, como as matrizes de rigidez, massa e amortecimento. Além disso, é essencial o uso de modelos constitutivos que representem o comportamento dos materiais quando solicitados.

3.1 Formulação dinâmica dos elementos finitos

Tekkaya e Martins (2009), apresentam as formulações da dinâmica para elementos finitos baseados na equação de equilíbrio dinâmico em ausência das forças de corpo. Esta equação é dada por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad (1)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, x_j a variável cartesiana, ρ é a densidade e $\ddot{u}_i$ é a aceleração das partículas do material. Usando método de Galerkin e integração por partes, a Eq. (1) pode ser escrita como:

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} dV - \int_{S_T} t_i \delta u_i dS = 0 \quad (2)$$

que, escrita de forma matricial, torna-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F} \quad (3)$$

que expressa o equilíbrio dinâmico em qualquer instante de tempo. $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K}\mathbf{U}$ é o vetor de forças internas dado pela rigidez do material e $\mathbf{F}$ é o vetor generalizado

de forças. Normalmente as estruturas também possuem forças de amortecimento e precisam ser consideradas na equação. A força de amortecimento é representada pelo termo $\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}$, sendo $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento e $\dot{\mathbf{U}}$ a velocidade de deslocamento dos graus de liberdade. Assim reescrevendo a Eq. (3) tem-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4)$$

que representa a equação matricial dinâmica para a análise de estruturas por meio dos elementos finitos.

3.2 Modelos constitutivos para os materiais

Em virtude do concreto estar composto de dois materiais, é importante conhecer o comportamento deles quando estão submetidos a diferentes cargas. O estudo aqui apresentado, considera que as estruturas estudadas estão submetidas a carregamentos o suficientemente pequenos para poder simular os materiais com comportamento elástico linear. Assim, se apresentam os modelos constitutivos usados para os elementos sólidos, barra e interface.

Modelo constitutivo para elementos de concreto

O modelo constitutivo usado para representar o concreto nos elementos sólidos foi o elástico linear. Este modelo simula uma relação linear para esforços e deformações, onde as últimas se anulam depois da solicitação. Apesar do concreto ser um material com comportamento não linear e inelástico (Babu et al., 2005), para pequenas deformações o mencionado modelo fornece aproximações aceitáveis. Assim, uma vez que os carregamentos usados são suficientemente baixos para garantir esse comportamento, pode ser justificado o uso neste trabalho. A relação tensão-deformação pode-se escrever como mostra a seguinte equação, onde, C_{ijkl} representa a rigidez e ε_{ij} a deformação do material.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

Modelo constitutivo para elementos de aço

O modelo usado para os elementos de barra é o elástico perfeito que representa adequadamente o comportamento uni-dimensional do aço dentro do concreto. Isto justificado em que a distribuição e dimensões do aço no concreto armado são simples, sendo prescindível implementar modelos tridimensionais. No modelo elasto-plástico perfeito o aço tem uma relação tensão-deformação diretamente proporcional, até atingir a tensão de escoamento, onde o aço deforma sem variação das tensões. A equação característica do modelo é dada por:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_f \quad (6)$$

onde $|\sigma|$ é o valor absoluto da tensão no material e σ_f a tensão de escoamento.

Modelo constitutivo para elementos de interface

A rigor, qualquer ponto sob a interface pode ter 3 tipos de deslocamentos. Dois deles são perpendiculares à barra de reforço os quais serão considerados desprezíveis. O comportamento de interesse, é o deslocamento na direção da barra para o qual o contato será modelado como

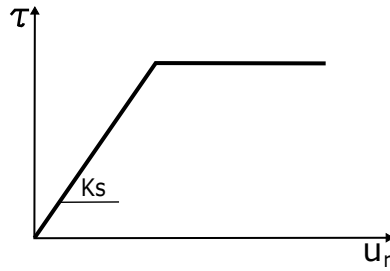


Figura 3: Modelo constitutivo para elementos de interface (Durand e Farias, 2012)

elasto-plástico. A Fig. 3, representa o modelo constitutivo dos elementos de junta onde estão relacionados as tensões cisalhantes no contato τ e os deslocamentos longitudinais da barra u_r . Neste modelo se assume um comportamento elástico até chegar à tensão de escoamento. A rigidez do material no comportamento linear está representada por K_S .

A equação que governa o comportamento elástico da interface na deformação radial está dada pela seguinte equação:

$$\tau = K_S u_r \quad (7)$$

onde K_S é o módulo de rigidez que pode ser obtido experimentalmente através de testes de arrancamento de acordo a:

$$K_S = \frac{T}{u_{max}} \quad (8)$$

onde T e u_{max} são a força de arrancamento e o deslocamento final obtidos no teste. Autores como Rosales (2016), tem estudado experimentalmente estes valores e foram usados neste trabalho. Esses valores são apresentados na Tab. 1.

Tabela 1: Parâmetros de aderência K_S recomendados em função do diâmetro (A50), (Rosales,2016)

ϕ da barra (mm)	K_S (N/mm ³)
8	7.2
10	7.9
12	8.4

3.3 Matrizes K, M e C (rigidez, massa e amortecimento)

A Eq. (4), representa a equação matricial do equilíbrio dinâmico para os elementos finitos. Nesta equação se tem matrizes de rigidez, massa e amortecimento que depende do material de cada elemento. Estas matrizes são encontradas para cada elementos como se apresenta a seguir.

Matriz K

Para elementos isoparamétricos, a matriz de rigidez **K** é calculada por meio a Eq. (9) e depende das matrizes **B** e **D** que relacionam deformações-deslocamentos e tensões-deformações,

respetivamente. Estas são calculadas a partir das propriedades do material e as funções de forma do elemento.

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (9)$$

Para os elementos sólidos a matriz $\mathbf{D}$ esta dada pela Eq. (10) onde ν corresponde ao coeficiente de Poisson e E ao modulo de Young do material.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Para os elementos de junta, Durand e Farias (2012), deduzem a matriz $\mathbf{D}_J$ que se mostra a continuação:

$$\mathbf{D}_J = \begin{bmatrix} K_S & 0 & 0 \\ 0 & K_N & 0 \\ 0 & 0 & K_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

onde K_S corresponde ao coeficiente de rigidez obtido em testes de arrancamento de acordo com a Eq. (8) e K_N é a rigidez perpendicular à barra que é assumida como um valor grande para garantir que a barra não se desloque transversalmente.

Para os elemento barra, a matriz de rigidez é calculada de acordo com:

$$\mathbf{K} = E_s A_s \int_L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dL \quad (12)$$

onde A_s da área da seção transversal e E_s o modulo de Young do aço.

Matriz $\mathbf{M}$

Para os elementos sólidos e barra, as matrizes de massa foram calculadas a partir da seguinte equação:

$$\mathbf{M} = \rho \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (13)$$

onde ρ é a densidade do material e $\mathbf{N}$ a matriz que contém as equações de forma do elemento. No caso do elemento de junta, o volume é considerado nulo, assim a matriz de massa deste elemento terá todas as componentes igual a zero.

Matriz C

Depois da montagem das matrizes de rigidez e de massa para a estrutura toda, o cálculo da matriz de amortecimento **C** foi feito. O método usado para este fim foi o de Rayleigh-Ritz que propõe a matriz de amortecimento como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, como se mostra a seguir:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (14)$$

onde α e β são coeficiente calculados a partir das duas primeiras frequências de vibração do sistema ω_n e ω_m , e as correspondentes relações de amortecimento ξ_n e ξ_m , assim:

$$\xi_n = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \quad \xi_m = \frac{\alpha}{2\omega_m} + \frac{\beta\omega_m}{2} \quad (15)$$

Assumindo as relações de amortecimento iguais ($\xi_n = \xi_m = \xi$), os coeficientes α e β são calculados como:

$$\alpha = 2\xi \frac{\omega_n\omega_m}{\omega_n + \omega_m} \quad \beta = 2\xi \frac{1}{\omega_n + \omega_m} \quad (16)$$

Para obter as duas frequências da Eq. (16), dado que os problemas analisados consistem em vigas simplesmente apoiadas, é usado o valor analítico dado pela seguinte equação:

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (17)$$

onde n corresponde ao modo de vibração analisado, E o modulo de Young, I a inercia da seção transversal, L o comprimento e m a massa linear da viga.

4 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Além de implementar as equações dos elementos finitos com os modelos dos materiais para o equilíbrio dinâmico, se implementou um código de integração numérica no tempo da Eq. (4). O método usado para a integração numérica é o método de Newmark para aceleração constante. De acordo com Soriano (2009), esta integração numérica está fundamentada no fato de que a aceleração em cada intervalo de tempo é igual à média da aceleração inicial e final do intervalo de tempo. A partir do método se obtém valores para os vetores de velocidade e aceleração ao final do intervalo ($\dot{\mathbf{U}}_i$ e $\ddot{\mathbf{U}}_i$) em função dos deslocamentos inicial e final de dito intervalo ($\mathbf{U}_{i-1}$ e $\mathbf{U}_i$) como segue:

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = -\ddot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t_i^2}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1} - \dot{\mathbf{U}}_{i-1}\Delta t_i) \quad \dot{\mathbf{U}}_i = -\dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t_i}(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}) \quad (18)$$

onde Δt_i é a duração do intervalo de tempo. Substituindo a Eq. (18) na Eq. (4), se pode chegar à equação:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{U}_i = \mathbf{F}^* \quad (19)$$

onde,

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t_i^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t_i} \mathbf{C} \quad (20)$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_i + \mathbf{M} \left(\ddot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{4\dot{\mathbf{U}}_{i-1}}{\Delta t_i} + \frac{4\mathbf{U}_{i-1}}{\Delta t_i^2} \right) + \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{U}}_{i-1} + \frac{2\mathbf{U}_{i-1}}{\Delta t_i} \right) \quad (21)$$

As matrizes $\mathbf{K}^*$ e $\mathbf{F}^*$ se denominam pseudo-rigidez e pseudo-força respectivamente. As soluções do deslocamento $\mathbf{U}_i$ se obtêm resolvendo a Eq. (19), considerando as condições de contorno essenciais. Com os valores de deslocamento $\mathbf{U}_i$ junto com os valores de $\mathbf{U}_{i-1}$, $\dot{\mathbf{U}}_{i-1}$ e $\ddot{\mathbf{U}}_{i-1}$ é possível obter as velocidades $\dot{\mathbf{U}}_i$ e acelerações $\ddot{\mathbf{U}}_i$ no tempo t_i , usando a Eq. (18).

4.1 Algoritmo Implementado

A continuação se apresenta o processo lógico implementado no algoritmo de integração numérica do método de Newmark usado na modelagem.

- 1 - Especificações iniciais. $\mathbf{U}_0$, $\dot{\mathbf{U}}_0$, t_a = tempo analisado, n_{int} = número de intervalos.
 - 2- Cálculo das matrizes $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$.
 - 3- Cálculo dos coeficientes de Rayleigh-Ritz α e β , e da matriz global de amortecimento $\mathbf{C}$.
 - 4- Solução do sistema $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_0$ para encontrar $\ddot{\mathbf{U}}_0$ (acelerações iniciais).
 - 5- Cálculo da matriz de pseudo-rigidez $\mathbf{K}^*$. Eq. (20).
- Início de processo iterativo instante de tempo i (para i de 1 até n_{int}).
- 6 - Cálculo de vetor de pseudo-forças $\mathbf{F}^*$. Eq. (21).
 - 7 - Solução do sistema $\mathbf{K}^*\mathbf{U}_i = \mathbf{F}^*$ para encontrar $\mathbf{U}_i$.
 - 8 - Cálculo de velocidades e acelerações $\dot{\mathbf{U}}_i$, $\ddot{\mathbf{U}}_i$. Eq. (18).

Próxima iteração (próximo i) ou fim processo iterativo (Fim).

5 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

As análises de estruturas de concreto armado neste artigo foram feitas usando a biblioteca de elementos finitos Fem-Lab que foi desenvolvida na linguagem de programação Julia. Ela permite realizar análises pelo método semi-embutido para a modelagem da armadura. Atualmente, o programa permite a análise estática em duas e três dimensões, linear e não linear, com o uso de elementos isoparamétricos. Enquanto à análise dinâmica, atualmente o programa tem a possibilidade de obter resultados para comportamentos lineares dos materiais.

No pós-processamento dos resultados nodais de deslocamento, velocidades e acelerações do modelo dinâmico implementado no Fem-Lab, se fará uso do programa de código aberto e multiplataforma Paraview, que permite a visualização de dados em duas e três dimensões interativamente. Por meio desta ferramenta será possível obter, por exemplo, campos de tensões, de deformação e as deformadas das estruturas analisadas.

6 VALIDAÇÃO DO MODELO

Para a validação do modelo implementado do método dos elementos finitos com o modelo semi-embutido da armadura, no caso de carregamentos dinâmicos, se reproduz o problema

elaborado nos trabalhos de Bathe e Ramaswamy (1979) e Beshara e Viridi (1991). Este problema, mostrado na Fig. 4, consiste numa viga simplesmente apoiada com 4 carregamentos pontuais constantes. Nessa figura, nos pontos A, B e C, avalia-se deslocamentos, tensões cisalhantes de contato e axiais na barra. As forças de corpo (peso do concreto e aço) são consideradas na análise. A armadura de reforço longitudinal foi dada por uma barra localizada na altura de 0.076m. Os apoios estão localizados na mesma altura do reforço, impedindo no lado esquerdo o movimento dos nós em todas as direções e no lado direito somente na direção vertical. As análises são realizadas supondo comportamento linear dos materiais e sem considerar amortecimento. As propriedades da viga são mostradas na Tab. 2. Para todas as análises feitas para este problema foram usados 1000 intervalos de tempo com igual duração.

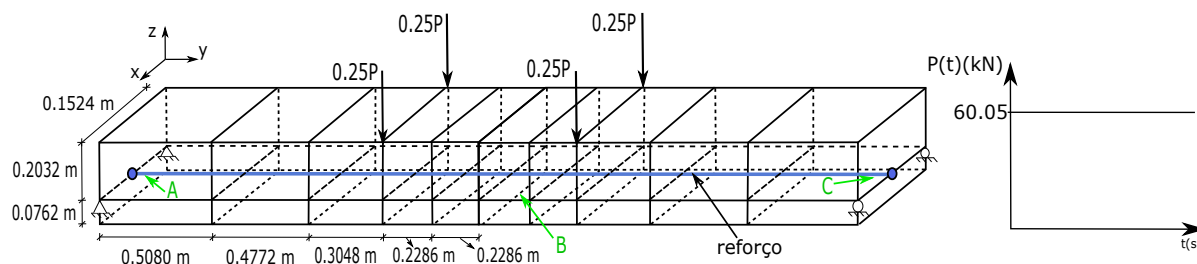


Figura 4: Viga de concreto armado sob carregamentos pontuais Bathe e Ramaswamy (1979).

Tabela 2: Propriedades viga de concreto armado de Bathe e Ramaswamy (1979).

Material	Propriedades				
	E_c [kPa]	ν	f_c [kPa]	$\rho_c[kNs^2/m^4]$	ξ
Concreto	4,21x10 ⁷	0,20	25800,00	2,63	0,03
	E_s [kPa]	$A_a[m^2]$	$\rho_a[kNs^2/m^4]$		
Aço	2,07x10 ⁸	1,29x10 ⁻³	7,85		
	$K_S[kPa]$	$K_N[kPa]$			
Contato	1,00x10 ⁷	1,00x10 ⁷			

Bathe e Ramaswamy (1979) apresentam a discretização mostrada na Fig. 4 com de elementos isoparamétricos de 12 nós e modela a armadura com o método embutido. Como resultado da análise dinâmica linear, apresenta o deslocamento do médio da viga no seu ponto inferior para 0,05 segundos partindo do repouso. Com o fim de validar o modelo foi reproduzido este exemplo com elementos isoparamétricos de 8 e 20 nós, usando o método semi-embutido para modelar a armadura. Podem se observar os resultados na Fig. 5 onde se representa o deslocamento obtido por Bathe e Ramaswamy (1979) e os obtidos nesta pesquisa para a mesma discretização do domínio tanto para as análises dinâmicas (linhas oscilantes) quanto as estáticas (linhas horizontais).

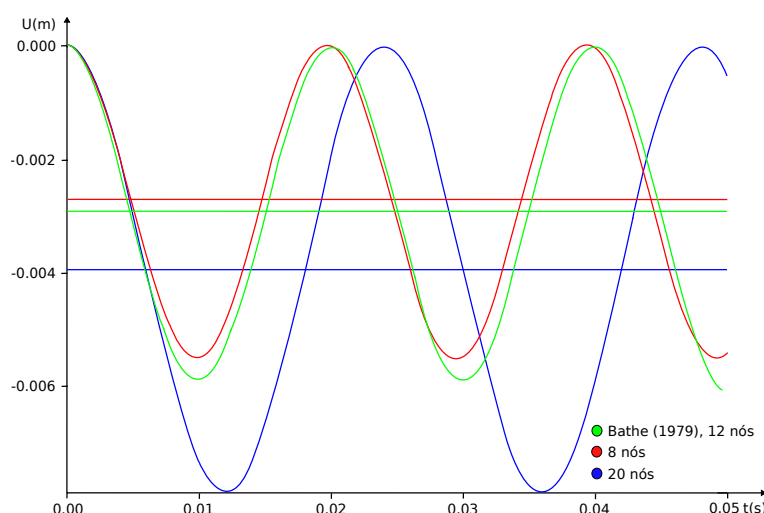


Figura 5: Deslocamento em m ponto médio inferior da viga com 3 diferentes tipos de elementos

Pode-se observar das figuras que os deslocamentos e frequências nos três casos são similares. Os valores não são síméis devido principalmente ao uso de diferentes elementos isoparamétricos em cada caso e à malha não estar o suficientemente refinada para obter convergência. Os deslocamentos calculados com elementos de 8 nós foram menores e as frequências levemente maiores do que os obtidos por Bathe e Ramaswamy (1979), isto devido à maior rigidez deste tipo de elementos comparados com os de 12 nós que utilizou o mencionado autor. Porém, para os elementos de 20 nós que apresentam maior flexibilidade, os deslocamentos aumentaram e as frequências diminuíram. Assim estes resultados são considerados como válidos.

6.1 Análise de Convergência

Para obter uma melhor análise da armadura, foi realizado um estudo de convergência usando elementos sólidos de 20 nós e as discretizações mostradas na Tab. 3. Além disso, estas análises foram feitas considerando o amortecimento da estrutura.

Tabela 3: Discretização do domínio. Malhas de elementos finitos para a viga Bathe e Ramaswamy (1979).

Discretização	Quantidade de Elementos Sólidos	Quantidade total de elementos
1	7	15
2	24	40
3	64	110

Depois da análise para as 3 discretizações, se obteve os deslocamento do ponto B mostrado na Fig. 6. Para todos os casos, pode-se perceber a influência do amortecimento que diminui a amplitude das ondas ao passo do tempo. Também é visível que as oscilações acontecem em torno do deslocamento da análise estática para o mesmo carregamento. Por último, pode-se observar que os resultados da segunda e terceira discretização são próximos, logo para essas condições de malha o modelo convergiu. Por tanto as análises posteriores do presente problema foram feitas com a discretização 3 da Tab. 3.

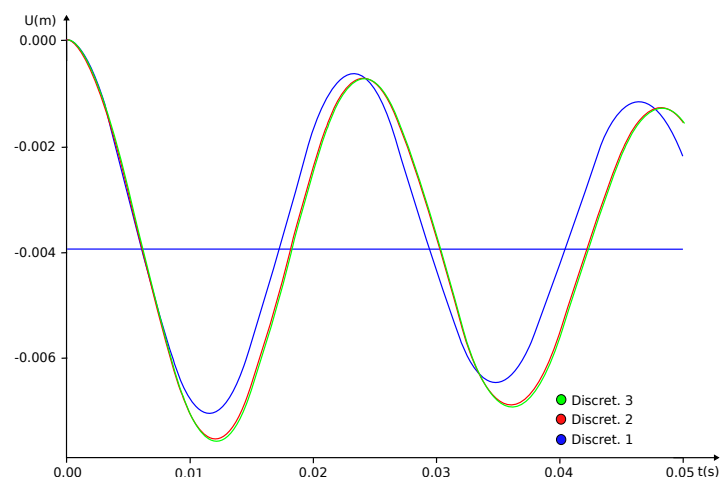


Figura 6: Análise de convergência: Deslocamentos em m no ponto médio da viga.

6.2 Resultados de tensão e deformação na armadura

A seguir se apresentam os resultados obtidos após a análise dinâmica tendo em conta o amortecimento da estrutura. Estes resultados consistem em representações gráficas da estrutura mostrando principalmente o comportamento da armadura.

As Figs. 7 e 8, mostram a viga deformada e as tensões axiais na armadura para dois instantes de tempo (0,012 s e 0,041). É possível deduzir que a viga está oscilando, pois os deslocamentos são diferentes, sendo maior no primeiro instante. Igual aos deslocamentos, as tensões na armadura também mudam com o tempo tendo suas maiores magnitudes na região central. Pode-se observar também que as tensões são simétricas longitudinalmente devido à simetria na configuração da estrutura.

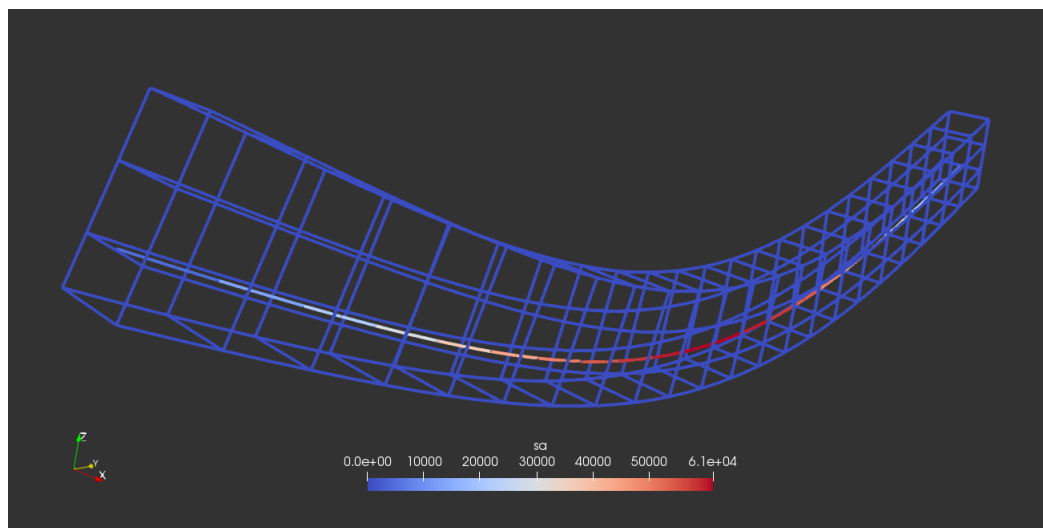


Figura 7: Tensões axiais em kPa na armadura para $t = 0.012$ s

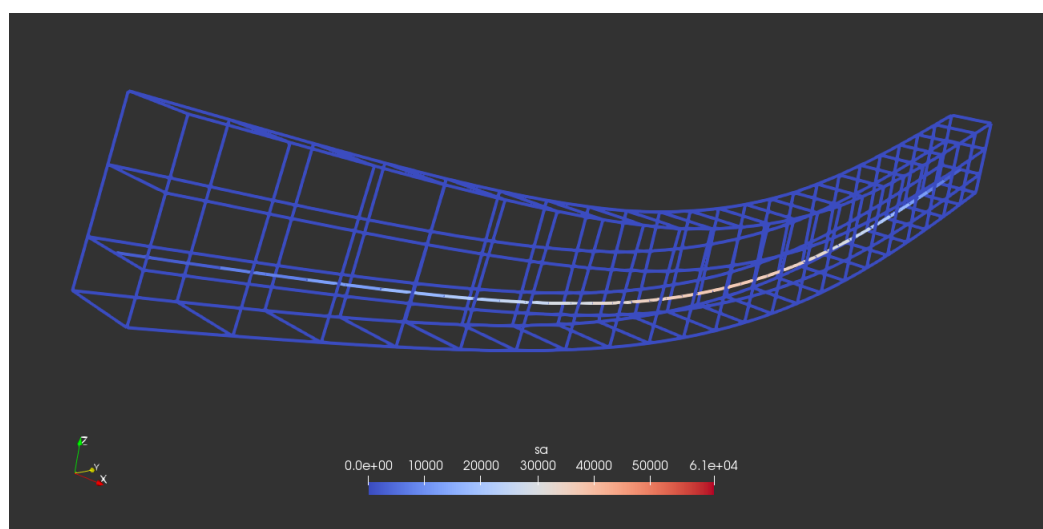


Figura 8: Tensões axiais em kPa na armadura para $t = 0.041$ s

Por outro lado, as Figs. 9 e 10 apresentam gráficos das tensões axiais da armadura e cisalhantes do contato nos pontos A, B, e C, amostrados na Fig. 4, para os 0,05 segundos analisados. Pode-se observar que nos três casos as tensões são oscilantes, tendo um comportamento similar aos gráficos dos deslocamentos antes exibidos.

Também, é interessante notar as irregularidades iniciais observadas nas tensões cisalhantes do contato nos três pontos e tensões axiais das barras para os apoios. Isto possivelmente se dá pela influência de diferentes fenômenos oscilatórios internos da viga com diferentes frequências e que superpostos geram esse padrão de movimento. Este resultado é razoável em consequência da modelagem do concreto armado considerar 3 tipos de elementos finitos que se comportam mecanicamente de forma diferente. Além de isso, a forma da função de carregamento que não é gradual, poderia ser mais uma justificativa para os resultados obtidos.

Por último, devido à simetria da estrutura e das solicitações, os valores encontrados para as tensões nos pontos A e C, tanto cisalhantes para o contato e axiais para a armadura, apresentam também uma simetria considerável. A leve variação nas magnitudes basicamente é devido à configuração dos apoios. Enquanto o apoio esquerdo impede os deslocamentos nas três direções, o direito somente restringe o movimento vertical. Isto poderia aportar um maior impedimento ao movimento da armadura no ponto A, gerando maiores tensões axiais na barra e menores cisalhantes no contato nesse local comparado com o ponto C.

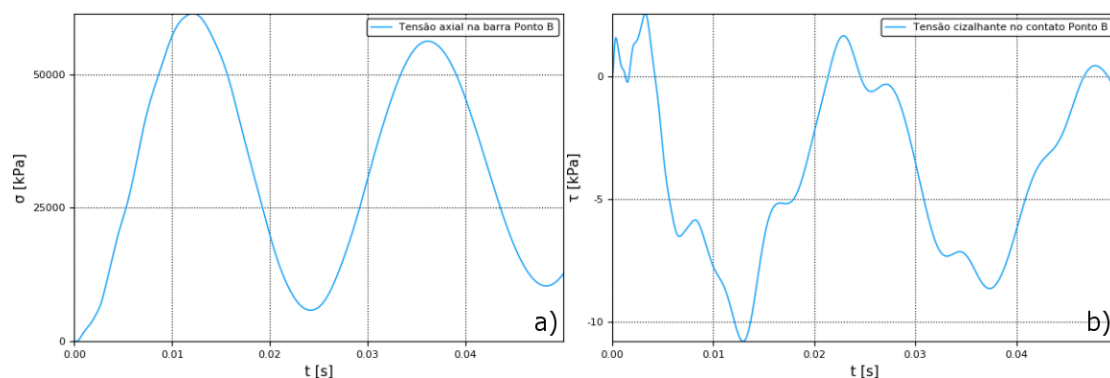


Figura 9: Tensões axiais a) e cisalhantes b) em kPa no ponto B da armadura em função de tempo.

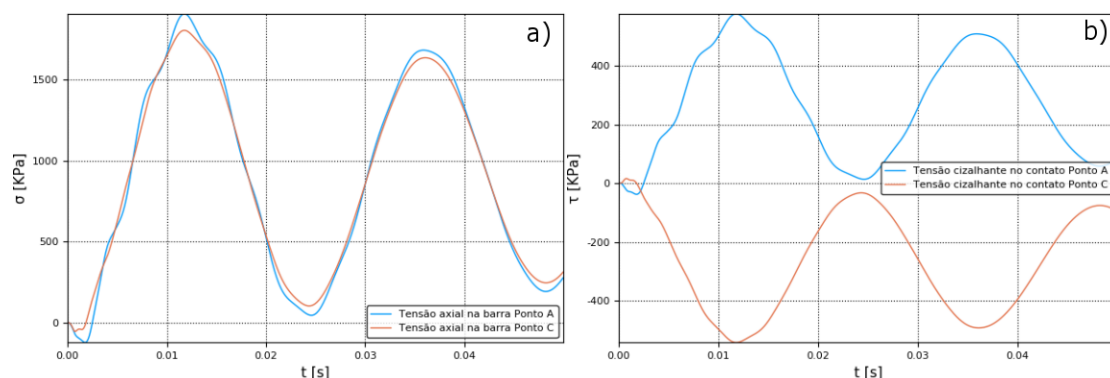


Figura 10: Tensões axiais a) e cisalhantes b) em kPa nos pontos A e C da armadura em função de tempo.

7 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O exemplo proposto consiste numa viga simplesmente apoiada com 3 carregamentos pontuais aplicados no médio e na direção vertical. O peso próprio dos materiais não são considerados na análise como carregamentos (forças de corpo). No entanto, o amortecimento da estrutura é considerado. A Fig. 11 apresenta a geometria e as condições de contorno desta análise e a Fig. 12 o carregamento aplicado na estrutura. As propriedades da viga estão contidas na Tab. 4.

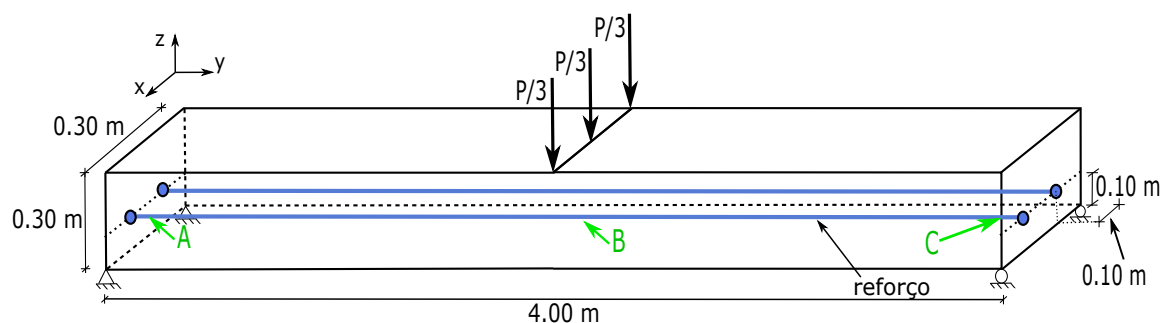


Figura 11: Viga proposta para análise do comportamento dinâmico da armadura.

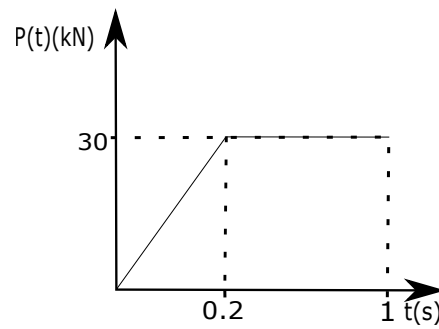


Figura 12: Carregamento P em kN aplicado na viga em função do tempo.

Tabela 4: Propriedades da viga de concreto armado proposta.

Material	Propriedades				
	E_c [kPa]	ν	f_c [kPa]	$\rho_c[kNs^2/m^4]$	ξ
Concreto	2.68e7	0.20	30000.00	2.60	0.03
	E_s [kPa]	$A_a[m^2]$	$\rho_a[kNs^2/m^4]$		
Aço	1.95e8	7.85e-5	7.85		
	$K_S[kPa]$	$K_N[kPa]$			
Contato	7.9e7	1.00e7			

A análise corresponde a um tempo de 1 s de carregamento aplicado em 10000 incrementos, obtendo como resultados os deslocamentos no ponto médio inferior da viga, as tensões axiais da armadura e cisalhantes no contato em função do tempo.

7.1 Análise de Convergência

A análise de convergência foi feita com 3 discretizações diferentes de acordo com a Tab. 5. Os elementos sólidos usados foram isoparamétricos de 20 nós.

Tabela 5: Discretização do domínio. Malhas de elementos finitos para a viga proposta

Discretização	Quantidade de Elementos Sólidos	Quantidade total de elementos
1	8	16
2	40	80
3	80	160

A Fig. 13, mostra os deslocamentos do ponto médio inferior da viga para as 3 discretizações em função do tempo para 1,0 s de duração da análise considerando as discretizações da Tab. 5.

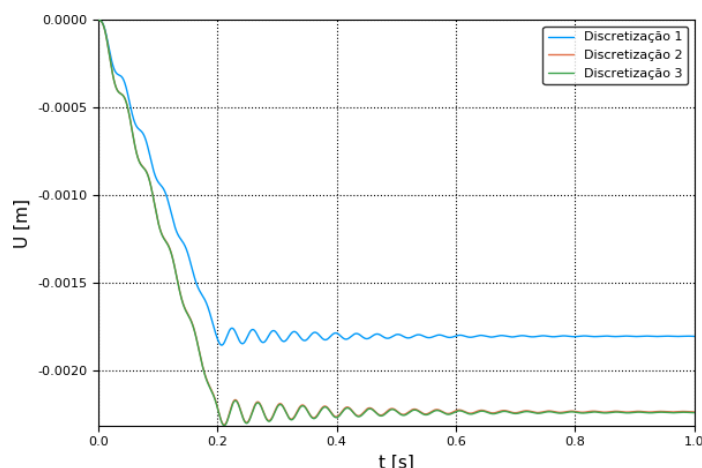


Figura 13: Resposta de deslocamento em função do tempo em m para 3 discretizações da malha na viga proposta

Da Fig. 13, a segunda e terceira discretização fornecem resultados próximos, pelo qual para essas condições de malha o modelo convergiu. Assim as análises posteriores do presente problema são feitas com a discretização 3 da Tab. 5.

7.2 Resultados de tensão e deformação na armadura

Também, da Fig. 13 pode se observar que durante o período analisado, a deformação da viga aumenta com comportamento similar ao do carregamento. Começa a deformação com uma tendência linear e com oscilações pouco perceptíveis devidas à magnitude inicial do carregamento (nula) e seu crescimento gradual com uma aceleração constante que não gera grandes forças inerciais. Este comportamento se mantém até o começo do patamar do carregamento aos 0.2 s. Nesse instante, as acelerações induzidas na estrutura são maiores, gerando forças de inercia que levam a oscilações com amplitudes maiores. Logo depois, o amortecimento da estrutura reduz a magnitude das ondas para dar por finalizada a resposta transiente ao redor dos 0.8 s. Para o último intervalo de tempo, a deformação tende a convergir para o valor de deslocamento da análise estática.

Os modelos mostrados nas Figs. 14 e 15 apresentam o estado da viga para dois instantes de tempo (0.10 s e 0.21 s) expondo sua deformada e as tensões cisalhantes no contato. As tensões axiais na barra não são apresentadas devido a sua similaridade com o anterior exemplo. Nas Figs. 14 e 15 pode-se deduzir que a viga esta oscilando e, mudando os deslocamentos e tensões no tempo. Enquanto às tensões, pode se observar uma simetria nas magnitudes para as duas metades. Isto se deve em razão dos deslizamentos das armaduras nas duas partes serem parecidos mas em sentido contrario. Similar ao exemplo com o qual se validou o modelo, a presente viga também apresenta simetria em tensões, que é inclusive maior. Esta melhor simetria se deve à localização dos apoios que colocam uma menor restrição no movimento da armadura comparada com o primeiro exemplo.

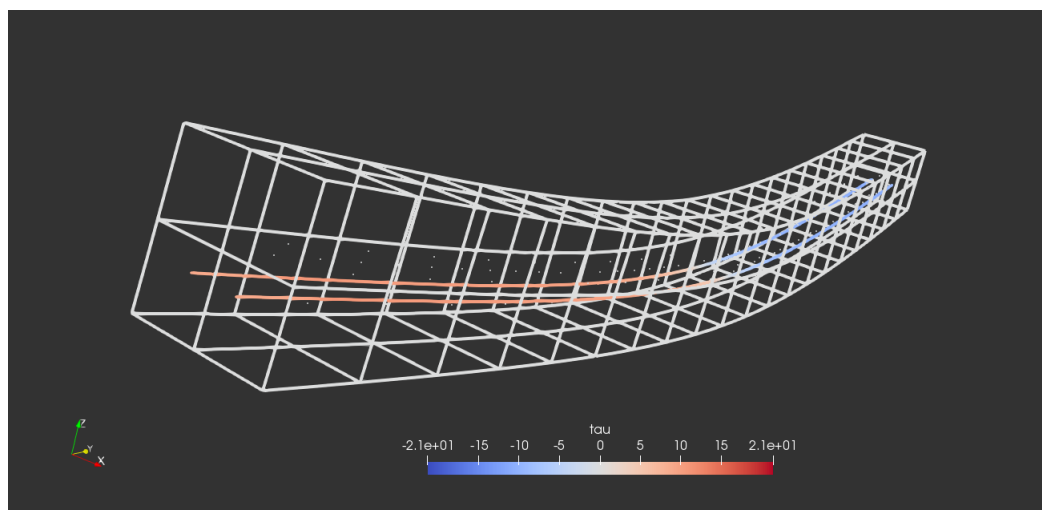


Figura 14: Tensões cisalhantes no contato em kPa para $t = 0.10s$

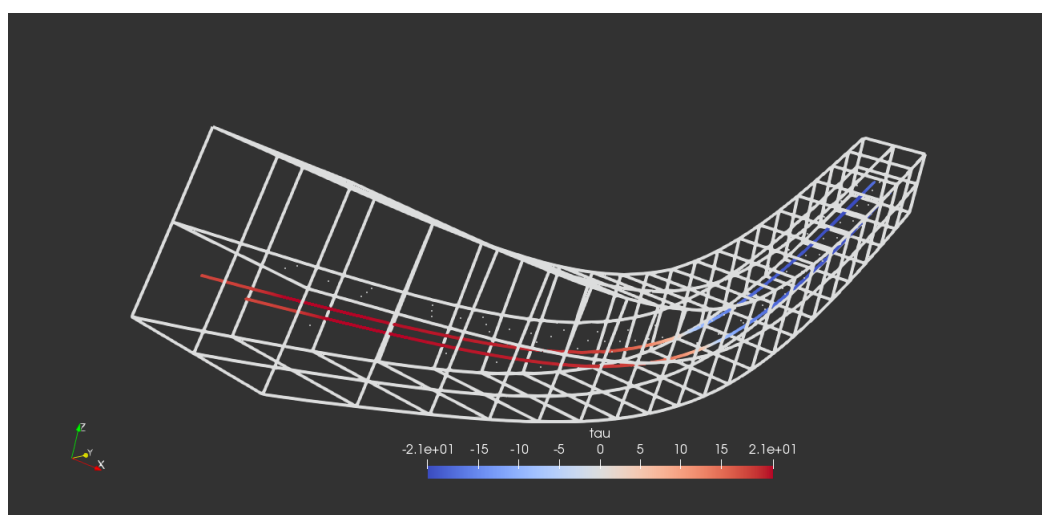


Figura 15: Tensões cisalhantes no contato em kPa para $t = 0.21s$

A Fig. 16 representa as tensões axiais na armadura e cisalhantes no contato em função do tempo para o ponto B. Enquanto a Fig. 17 representa a variação no tempo das tensões axiais da armadura e tensões cisalhantes no contato para os pontos A e C localizados perto dos apoios. Similar ao exemplo de validação, pode-se ver o comportamento oscilatório destas tensões com uma frequência próxima à dos deslocamentos. Também pode-se ver que ao contrario do primeiro exemplo, as oscilações não apresentam perturbações levando uma continuidade no seu movimento. Na configuração do problema se tem duas situações que podem ter ajudado na diferença de comportamentos entre os dois casos. A primeira é a localização das condições de contorno essenciais. E a segunda, o carregamento gradual na estrutura do segundo exemplo, o que poderia levar a um comportamento com menos oscilações no contato, gerando padrões de movimento mais contínuos.

Igual ao primeiro exemplo, as tensões cisalhantes do contato e as axiais da barra nos pontos A e C, também apresentam simetria no seu comportamento. Este é devido às condições geométricas e de contorno do problema. Neste caso também acontece uma pequena diferença nas tensões,

sendo maiores as axiais da barra e menores as cisalhantes do contato para o ponto perto do apoio que é justificado pela maior restrição de movimento à barra nas imediações.

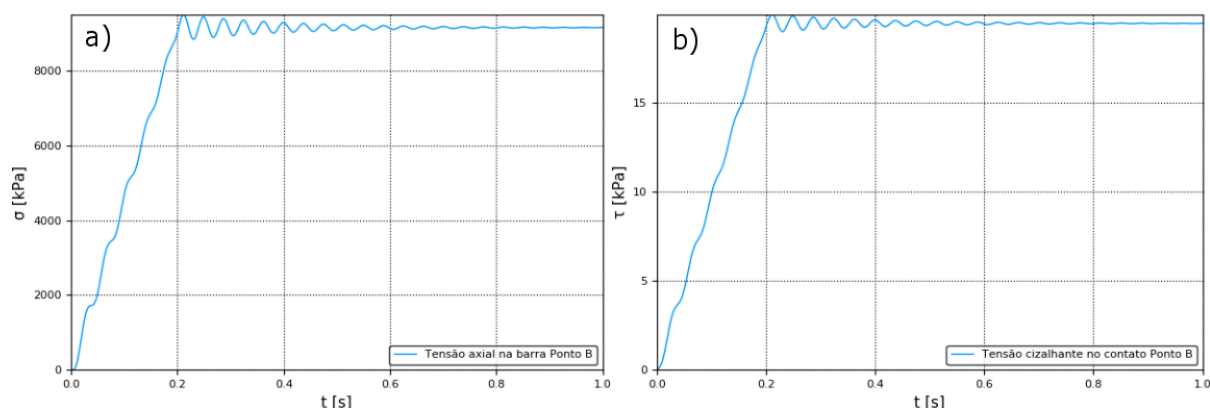


Figura 16: Tensões axiais a) e cisalhantes b) em kPa no ponto B da armadura em função de tempo.

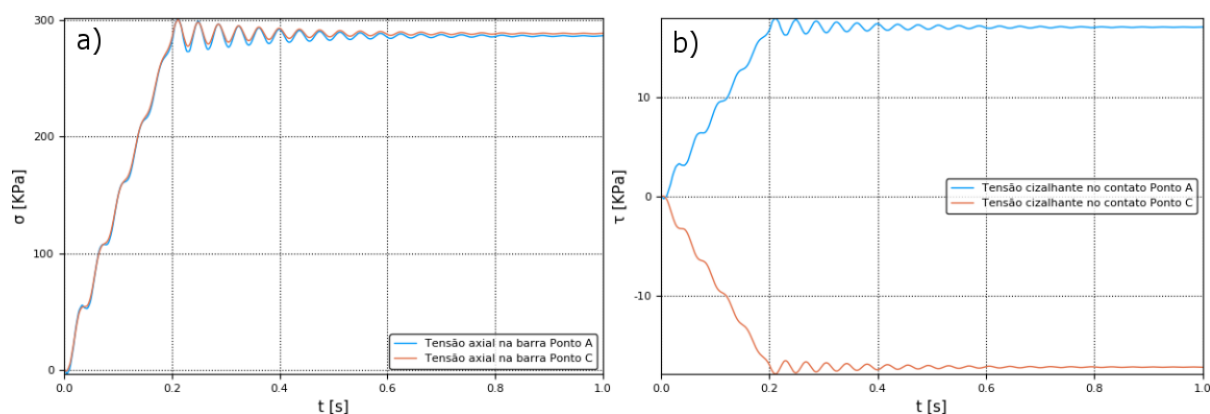


Figura 17: Tensões axiais a) e cisalhantes b) nos pontos A e C da armadura em função de tempo.

8 CONCLUSÕES

Este artigo introduz o uso do método semi-embutido para a simulação da armadura no concreto armado usando o método dos elementos finitos para análise dinâmica de estruturas. A principal vantagem deste método é a possibilidade de conhecer o comportamento da armadura enquanto a tensões e deslocamentos sem ter limitações na discretização do domínio.

Os resultados obtidos foram como os esperados. Obtiveram-se respostas oscilatórias para os deslocamentos e as tensões consistentes nos regimes permanentes e transientes, as quais se puderam evidenciar graças à ação do amortecimento.

Foi observado que o tipo de elemento escolhido e a discretização podem influir na resposta da estrutura analisada, fazendo dela mais o menos flexível, produzindo diferentes deslocamentos e frequências de vibração.

Nos casos estudados, pode-se observar as tensões axiais na armadura e cisalhantes no contato para dois casos de carregamento e diferentes configurações estruturais. Observou-se que a localização dos apoios e o tipo de função de carga usada têm influência nos resultados obtidos.

Apesar de se considerar apenas o comportamento linear para os materiais, os resultados fornecem uma visão preliminar nos estudos das estruturas de concreto armado, pois foi possível avaliar o comportamento da armadura com facilidade.

Para futuros trabalhos se propõe o estudo do comportamento não linear do concreto com modelos constitutivos adequados que consigam reproduzir o comportamento frágil deste material.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos para o Programa de Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) da Universidade de Brasília por o apoio acadêmico e ao CNPq pelo apoio econômico no desenvolvimento da pesquisa.

REFERENCES

- Babu, R., Benipal, G. S., e Singh, A. K., 2005. Constitutive modeling of concrete: An overview. *Asian Journal of Civil Engineering*, 6:211?246.
- K. J. Bathe e S. Ramaswamy, 1979. On three-dimensional non-linear analysis of concrete structures. *Nucl. figng Des.* 52, 385-409
- Beshara, F.B.A. e Viridi, K.S., 1991. Nonlinear finite element dynamic analysis of twodimensional concrete structures. *Computers and Structures*, v. 41, No 6.
- Durand, R., *Three-dimensional analysis of geotechnical structures subjected to rein-forcement and drainage.*, 2008. PhD Thesis, University of Brasilia, Brasilia, Brazil.
- Durand, R. e Farias, M., 2012. Nonlinear joint element for the analysis of reinforcement bars using finite elements. *10th World Congress on Computational Mechanics*.
- Durand, R., Farias, M. e Pedroso, D., 2015. Computing intersections between noncompatible curves and finite elements. *Computational Mechanics*.
- Rosales, Y. M., 2016. *Análise numérica - experimental do comportamento da aderência do aço-concreto*. Diss. de mestrado. Universidade de Brasília.
- Soriano, H. L., 2009. Elementos Finitos, Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas. *Ciência Moderna Ltda*, Rio de Janeiro, 1 edition
- Tekkaya, A. E. e Martins, P. A., 2009. Accuracy, reliability and validity of finite element analysis in metal forming: A users perspective. *Engineering Computations*.