



ANÁLISE ESTATICA NÃO-LINEAR DAS TRAJETÓRIAS DE EQUILÍBRIO DE CONÓIDES ABATIDOS

Danielly L. A. de Moraes

Frederico M. A. da Silva

Renata M. Soares

daniellyluzaraujo@hotmail.com

silvafma@gmail.com

msrenata@gmail.com

Universidade Federal de Goiás- Av. Universitária nº 1488, 74605-220, Goiânia, GO, Brasil

Resumo. Neste trabalho, analisam-se numericamente via método dos elementos finitos (MEF) cascas conoidais abatidas de projeção retangular no plano e variação superficial parabólica, ou cilíndrica. Consideram-se cascas constituídas de material elástico linear, homogêneo e isotrópico, submetidas ao carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo da superfície. Faz-se uma análise estática paramétrica linear das cargas críticas e modos de flambagem utilizando-se o programa comercial Abaqus®, variando-se as condições de contorno. Com uma análise estática não-linear verifica-se as trajetórias não-lineares de equilíbrio dos deslocamentos desses conóides, identificando-se a existência de pontos limites de carga e avaliando-se como as não-linearidades geométricas influenciam nas formas das topologias dos deslocamentos durante o carregamento. O trabalho mostra que a adoção de análises lineares poder subestimar, ou superestimar, a capacidade de carga não-linear da casca conoidal, além da consideração das não-linearidades provenientes da geometria ter grande importância no comportamento dos conóides parabólicos, ou cilíndricos, sendo possível identificar como as posições das flechas máximas modificam-se ao longo da incrementação de carga.

Palavras-chave: Carga crítica, Casca conoidal, Método dos elementos finitos, Trajetória não-linear de equilíbrio.

1 INTRODUÇÃO

A casca conoidal é um tipo de casca de translação formada por uma curva, contida num plano, transladada sobre outra curva, ou reta, contida em outro plano perpendicular ao primeiro. Devido à sua forma curva, os momentos internos são bastante reduzidos em relação aos esforços de membrana, proporcionando assim, boa resistência mecânica. Uma das qualidades das cascas conoidais, interessantes para as construções, é a economia de material devido às espessuras reduzidas, dessa forma essas estruturas são utilizadas em coberturas que necessitem de grandes vãos atribuindo leveza e arrojo às edificações.

Estas estruturas são utilizadas em coberturas notáveis projetadas por arquitetos de renome internacional, como por exemplo, os arquitetos Felix Candela e Oscar Niemeyer. Apesar de de haver estudos que versam sobre análises de cascas conoidais por métodos numéricos (Bandyopadhyay *et all* (1995); Das e Chakravorty (2009); Sahoo (2013); Cavalcanti (2015); Gonçalves e Soares (2016)) e também analíticos (Ghosh e Bandyopadhyay (1990); Stavridis (1998); Debongnie (1978)), o seu comportamento não-linear ainda não está totalmente compreendido.

Neste trabalho analisa-se o comportamento estático linear e não-linear, através do MEF utilizando-se o programa comercial *Abaqus*®, de uma casca conoidal de base retangular com variação das condições de apoio em todas as bordas (bordas curvas de variação parabólica, ou cilíndrica, e as demais bordas retas). As não-linearidades, consideradas no problema em questão, são advindas da geometria que adicionam termos não-lineares às equações de equilíbrio influenciando no comportamento da casca conoidal. Para esse estudo, efetua-se uma análise paramétrica variando-se as alturas das bordas curvas dos conóides constituídos de material elástico, linear, homogêneo e isotrópico, obtendo-se os valores de cargas críticas e modos de flambagem lineares, além das cargas limites não-lineares e as trajetórias não-lineares de equilíbrio dos deslocamentos, efeitos de membrana e de momentos internos à casca conoidal.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considera-se a casca conoidal da Fig. 1 sujeita a um carregamento uniformemente distribuído $\bar{q}$ ao longo de sua superfície feita com material elástico-linear, homogêneo e isotrópico de módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ . A geometria é definida a partir da espessura h , do comprimento no plano a , da largura no plano $2b$ e das alturas máximas das bordas curvas parabólicas, ou cilíndricas, H_2 e H_1 . Pela teoria de Marguerre a curvatura da superfície da casca é considerada no sistema de coordenadas cartesianas, não envolvendo raios de curvatura onde os campos de deslocamentos u , v e w referem-se às direções x , y e z , respectivamente.

Para descrever a superfície da casca conoidal parabólica é utilizada a seguinte equação descrita por Ghosh e Bandyopadhyay (1990):

$$\bar{z}(x, y) = -(H_2 + \frac{(H_1 - H_2)}{a} x)(1 - \frac{y^2}{b^2}) \quad (1)$$

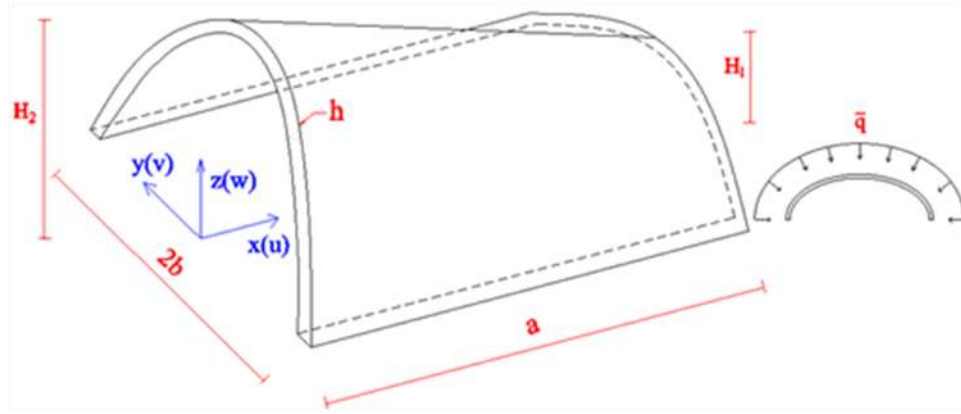


Figura 1- Geometria, campos de deslocamentos e sistema de eixos da casca conoidal

Já a superfície da casca conoidal de variação cilíndrica é apresentada por Moraes (2017):

$$\bar{z}(x, y) = -(H_2 + \frac{(H_1 - H_2)}{a} x) \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (2)$$

Bandyopadhyay e Ghosh (1990) representam a carga vertical ($\bar{q}$) distribuída por unidade de área da superfície da casca, sendo q a magnitude da carga distribuída na superfície da casca:

$$\bar{q} = q \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{z}(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

Como hipótese básica, considera-se que a casca conoidal seja uma placa com uma imperfeição inicial na forma da casca conoidal. Sendo assim, as hipóteses de Kirchhoff-Love para placas esbeltas (Almroth e Brush, 1975) é utilizada na formulação matemática do conóide e os campos de deslocamentos são representados por Eq. (4).

$$\bar{u} = u + z\beta_x \quad \bar{v} = v + z\beta_y \quad \bar{w} = w + \bar{z}(x, y) \quad (4)$$

Os campos de deformações não-lineares no plano médio da casca conoidal abatida e suas mudanças de curvatura são dados pela Eq. (5), considerando-se a teoria de Von Kármán.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 + 2w_{,x}\bar{z}(x, y)_{,x}) & \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2 + 2w_{,y}\bar{z}(x, y)_{,y}) \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,x}\bar{z}(x, y)_{,y} + w_{,y}\bar{z}(x, y)_{,x} \\ \kappa_x &= -w_{,xx} & \kappa_y &= -w_{,yy} & \kappa_{xy} &= w_{,xy} \end{aligned} \quad (5)$$

As Eq. 6 fornecem as deformações em qualquer ponto da casca a partir das deformações no plano médio e das mudanças de curvatura.

$$\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x + z\kappa_x \quad \bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y + z\kappa_y \quad \bar{\gamma}_{xy} = \gamma_{xy} + 2z\kappa_{xy} \quad (6)$$

As relações constitutivas tensão-deformação para o material elástico, linear, homogêneo e isotropico em qualquer ponto ao longo da espessura da casca são dadas por:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y) \quad \bar{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\gamma}_{xy} \quad (7)$$

As relações constitutivas para os esforços normais e cisalhantes no plano são obtidas pela integração das tensões ao longo da espessura do conóide, Eq. (8), assim como para os momentos internos, Eq. (9).

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\sigma}_y dz \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\tau}_{xy} dz \quad (8)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \bar{\sigma}_x dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \bar{\sigma}_y dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \bar{\tau}_{xy} dz \quad (9)$$

As equações não-lineares de equilíbrio são obtidas partindo-se do critério da energia potencial estacionária e através das ferramentas do cálculo variacional são obtidas três equações diferenciais não-lineares de equilíbrio Eq. (10)-(12). Verifica-se a presença dos deslocamentos u , v e w sugerindo o acoplamento de todos os campos de deslocamentos, além de não-linearidades cúbicas e quadráticas e do tipo de variação superficial influenciando no comportamento estrutural do conóide.

$$\begin{aligned} & C[(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 + 2w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,x})) + \nu(v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2 + 2w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,y}))]_{,x} \\ & + \frac{1-\nu}{2} \{(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,y} + w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,x})\}_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & C[\frac{1-\nu}{2} \{(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,y} + w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,x})\}_{,x} \\ & + \{(v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2 + 2w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,y})) + \nu(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 + 2w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,x}))\}_{,y} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -D[\{w_{,xx} + \nu w_{,yy}\}_{,xx} + 2(1-\nu)(\frac{1}{2}(w_{,xy} + w_{,yx}))_{,xy} + (w_{,yy} + \nu w_{,xx})_{,yy}] \\ & -C[(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 + 2w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,x})) + \nu(v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2 + 2w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,y}))w_{,x} \\ & + \frac{1-\nu}{2}(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,y} + w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,x})w_{,y}]_{,x} \\ & -C[(v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2 + 2w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,y})) + \nu(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x}^2 + 2w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,x}))w_{,y} \\ & + \frac{1-\nu}{2}(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{,x}\bar{z}(x,y)_{,y} + w_{,y}\bar{z}(x,y)_{,x})w_{,x}]_{,y} = \bar{q} \end{aligned} \quad (12)$$

Onde $C = E h / (1 - \nu^2)$ e $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ são, respectivamente, os parâmetros de rigidez de membrana e de flexão.

Para construir uma análise analítica da casca conoidal é necessário obter uma solução modal que considere os acoplamentos e as interações modais que decorrem das não-linearidades geométricas presentes nas equações de equilíbrio. Uma das técnicas analíticas para a obtenção consistente dessas expansões modais é o método da perturbação (Del Prado, 2008; Silva, 2008) que é capaz de descrever os modos não-lineares que se acoplarão aos campos de deslocamentos u , v e w . A dificuldade de obtenção de soluções analíticas para esse problema é acrescida quando as soluções básicas para a obtenção da solução modal são compostas por vários modos básicos, o que eleva o número de graus de liberdade do problema. Nesse sentido, as análises estáticas, que serão apresentadas no próximo capítulo, se darão somente a partir dos resultados obtidos via MEF.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Considera-se uma casca conoidal constituída de material elástico, linear, homogêneo e isotrópico com módulo de elasticidade $E = 14$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 2548,42$ kg/m³ submetida a um carregamento uniformemente distribuído na superfície, $\bar{q}$. A geometria, Fig. 1, apresenta comprimento $a = 6$ m, largura $2b = 8$ m, espessura $h = 0,06$ m, altura da borda curva $H_2 = 1,50$ m, localizada na borda $x = 0$, $H_1 = 0$, e as demais bordas (H_1 , R_1 e R_2) são consideradas retas.

Utilizaram-se como condições de contorno as representadas por CA na Fig. 2 considerando apoio em primeiro gênero (A_1), ou segundo (A_2), com a borda H_2 livre (L) e engastadas (E). Utilizou-se como referência de nomenclatura a sequência de bordas $R_1 R_2 H_2 H_1$.

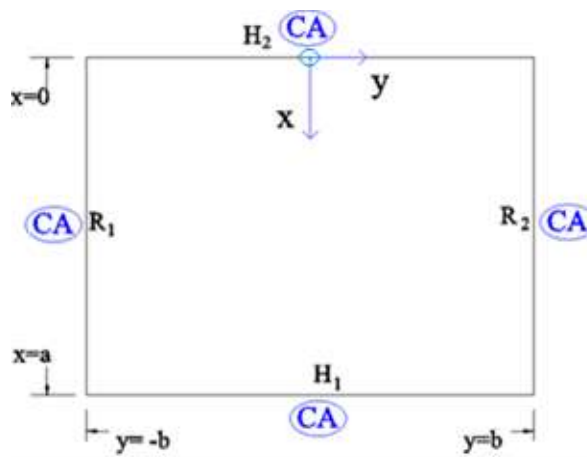
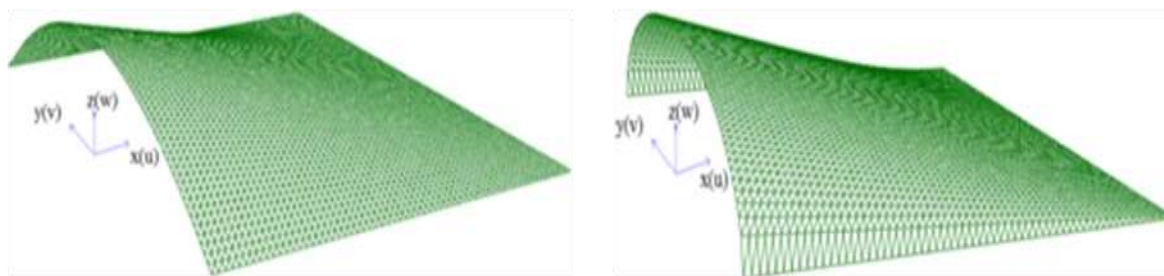


Figura 2- Representação em planta da casca conoidal com as condições de contorno e as bordas curvas e retas

O elemento finito adotado é o STRI3, pois atende à teoria de Kirchhoff, e as integrações ao longo do volume desse elemento são feitas através da quadratura Gaussiana. Na Fig. 3 são ilustradas as malhas com 9600 elementos finitos STRI3 utilizadas no programa *Abaqus*® para

as análises estáticas lineares e não-lineares dos conóides de variação superficial parabólica, Fig. 3 (a), e cilíndrica, 3 (b). Os campos de deslocamentos u seguem o sentido do eixo axial x , v o sentido do eixo longitudinal y e w o sentido do eixo transversal z .



(a) Caso parabólico $H_1 = 0$ m e $H_2 = 1,5$ m

(b) Caso cilíndrico $H_1 = 0$ m e $H_2 = 1,5$ m

Figura 3- Malha de elementos finitos STRI3.

3.1 Análise estática linear

As cargas críticas são apresentadas na Tab.2 e os modos de flambagem são apresentadas nas Fig. 4 e 5. Estas cargas foram obtidas no programa *Abaqus*® através da resolução de um problema de autovalor, sendo este ponto definido na análise de estabilidade de carga crítica. O modo de flambagem apresenta a forma dos campos de deslocamentos ao atingirem a carga crítica, mas não representa a magnitude real dos deslocamentos, pois se trata de um autovetor associado ao autovalor de carga crítica sendo o campo de deslocamento máximo normalizado como a unidade e os demais proporcionais à unidade.

Tabela 1. Carga crítica (P_{cr}) da casca conoidal para diferentes condições de apoio (kN/m^2)

Condição de apoio					
$A_1A_1A_1A_1$	$A_2A_2A_2A_2$	$A_2A_2LA_2$	EELE	A_2A_2LL	EELL
Casca conoidal parabólica					
42,609	81,909	85,392	106,954	20,765	27,747
Casca conoidal cilíndrica					
28,736	41,147	47,400	56,058	17,054	16,995

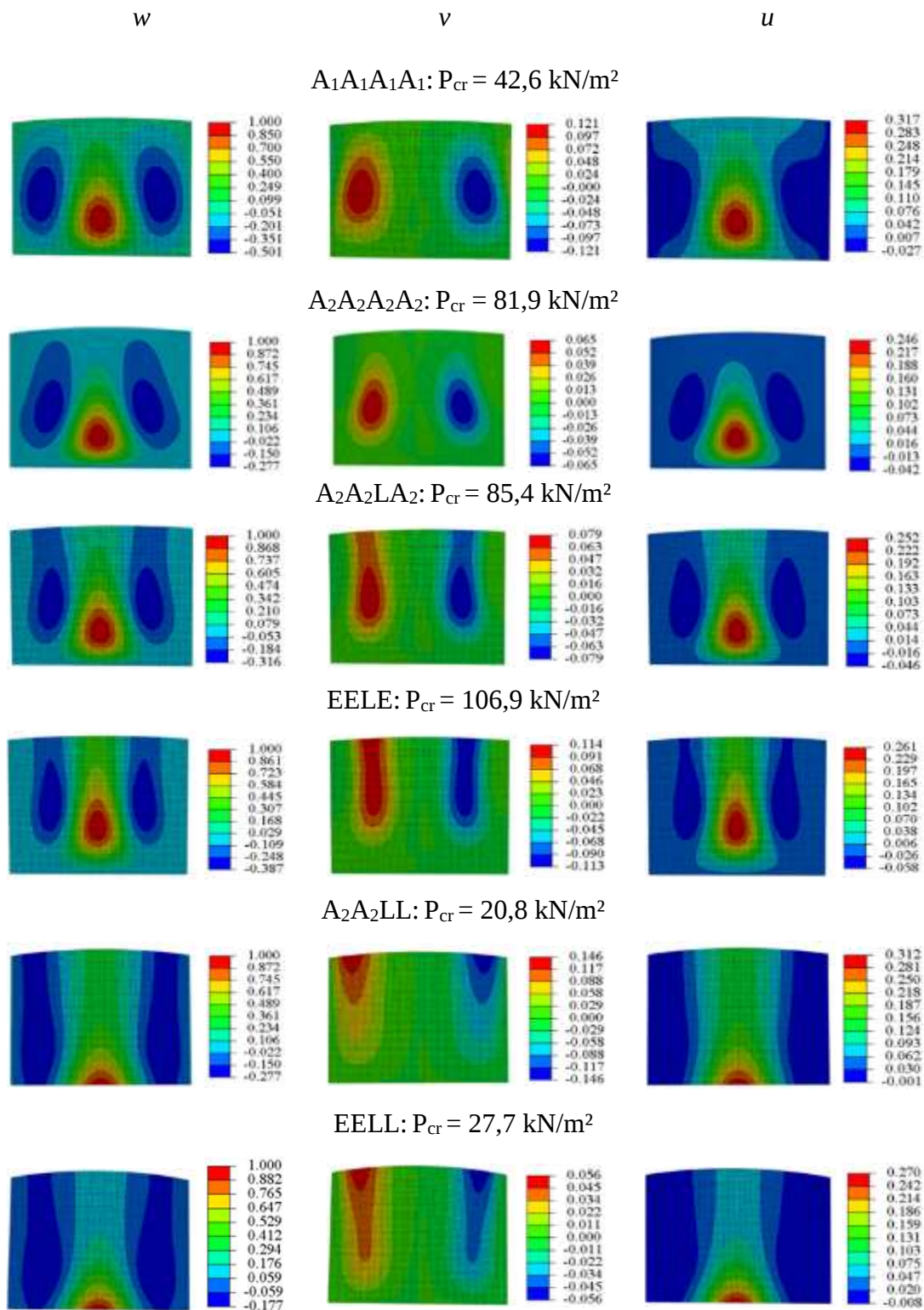


Figura 4- Modos de flambagem e carga crítica (P_{cr}) para os Casos Parabólicos

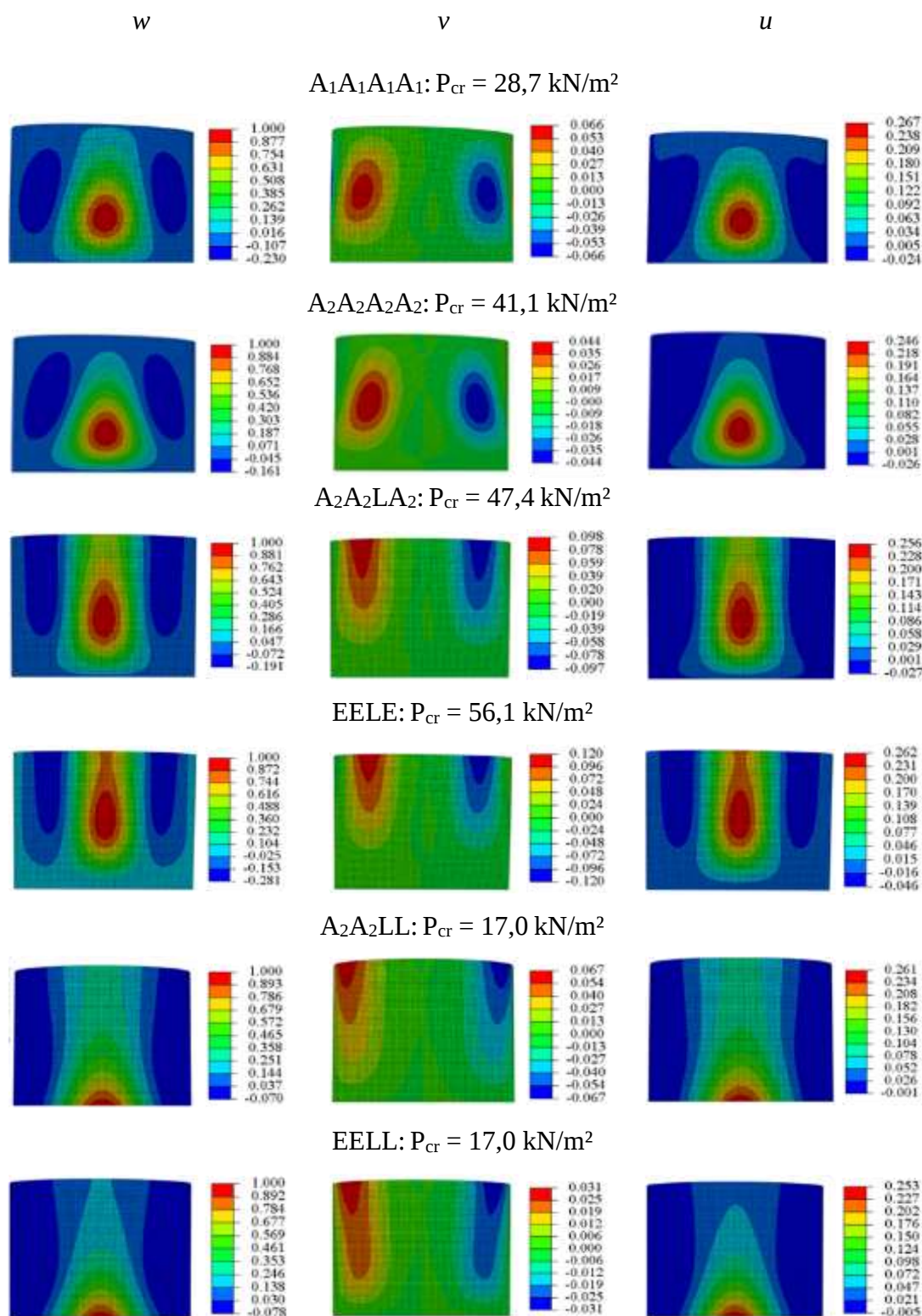


Figura 5- Modos de flambagem e carga crítica (P_{cr}) para os Casos Cilíndricos

Observa-se a partir das cargas críticas (P_{cr}) na Tab. 2 que na análise estática linear a superfície parabólica confere às cascas conoidais maiores cargas críticas em relação ao à superfície cilíndrica. Vale ressaltar que as menores cargas críticas foram encontradas nos conóides com duas bordas livres e independentemente da superfície ser parabólica ou cilíndrica, registraram-se as maiores cargas críticas nos conóides com uma borda livre sendo no caso parabólico 47,5% e 44,5% superior ao cilíndrico com as condições de apoio EELE e $A_2A_2LA_2$, respectivamente.

É importante destacar que a carga crítica encontrada através do estudo estático linear pode acarretar em respostas inadequadas à realidade do problema.

A partir dos modos de flambagem apresentados na Fig. 4 e Fig. 5, percebeu-se que a variação do tipo de superfície e das condições de contorno alteraram as topologias dos deslocamentos com as disposições das flechas máximas se localizando em diferentes coordenadas da casca dependendo do deslocamento considerado. Considerando-se a direção de y , as semi-ondas distribuem-se simétrica (w e u) ou anti-simetricamente (v) em torno do eixo x . Já na direção do eixo x , verifica-se que devido a diferença entre as alturas das bordas H_1 e H_2 ocorre dependência da coordenada axial na topologia, ou seja, assimetria ao longo do eixo x .

Por fim, nota-se semelhança entre as topologias cilíndricas e parabólicas, além das magnitudes dos campos de deslocamentos transversais mostrarem-se superiores aos deslocamentos u e v em ambos os casos.

3.2 Análise estática não-linear

As não-linearidades geométricas do problema são descritas nos termos não-lineares nas equações de equilíbrio e, para solucioná-las o programa *Abaqus*® combina processos de iteração e de incrementação do carregamento aplicado através do método de Newton-Raphson. Quando na trajetória de equilíbrio há perda da capacidade de carga utiliza-se o método numérico de Riks, método de procedimento de comprimento de arco no qual tanto os graus de liberdade a cada passo de aplicação do carregamento, quanto a magnitude de carregamento imposta à estrutura funcionam como incógnitas a resolver.

A influência da variação das condições de contorno nas trajetórias não lineares de equilíbrio dos conóides parabólicos e cilíndricos pode ser visualizada nas Fig. 6 e 7, respectivamente. Para tanto, consideraram-se as trajetórias dos deslocamentos transversais durante a incrementação de carga e o ponto de observação cujas coordenadas no conóide são $(x, y) = (3a/4, -b/2)$.

A variação do tipo de superfície e das condições de contorno produzem trajetórias não-lineares diferenciadas. Considerando os conóides apoiados em todas as bordas, Fig. 6 (a) e (b) e Fig. 7 (a) e (b), nas trajetórias não é identificado claramente um ponto de recuo na capacidade de carga. Já com as outras condições de apoio é possível observar que nas trajetórias dos conóides verifica-se ganho de capacidade de carga até atingir uma carga limite e prossegue-se na trajetória com perda de capacidade de carga. Com as sobreposições entre as condições de apoio, apresentadas nas Fig. 6 (g) e Fig. 7 (g), é possível observar a influência das diferentes condições de contorno nos caminhos de equilíbrio não-lineares, sendo que a condição de apoio EELE conferiu o maior ponto limite no caso parabólico e cilíndrico, assim como identificado na análise linear, mas com valor superior à carga crítica.

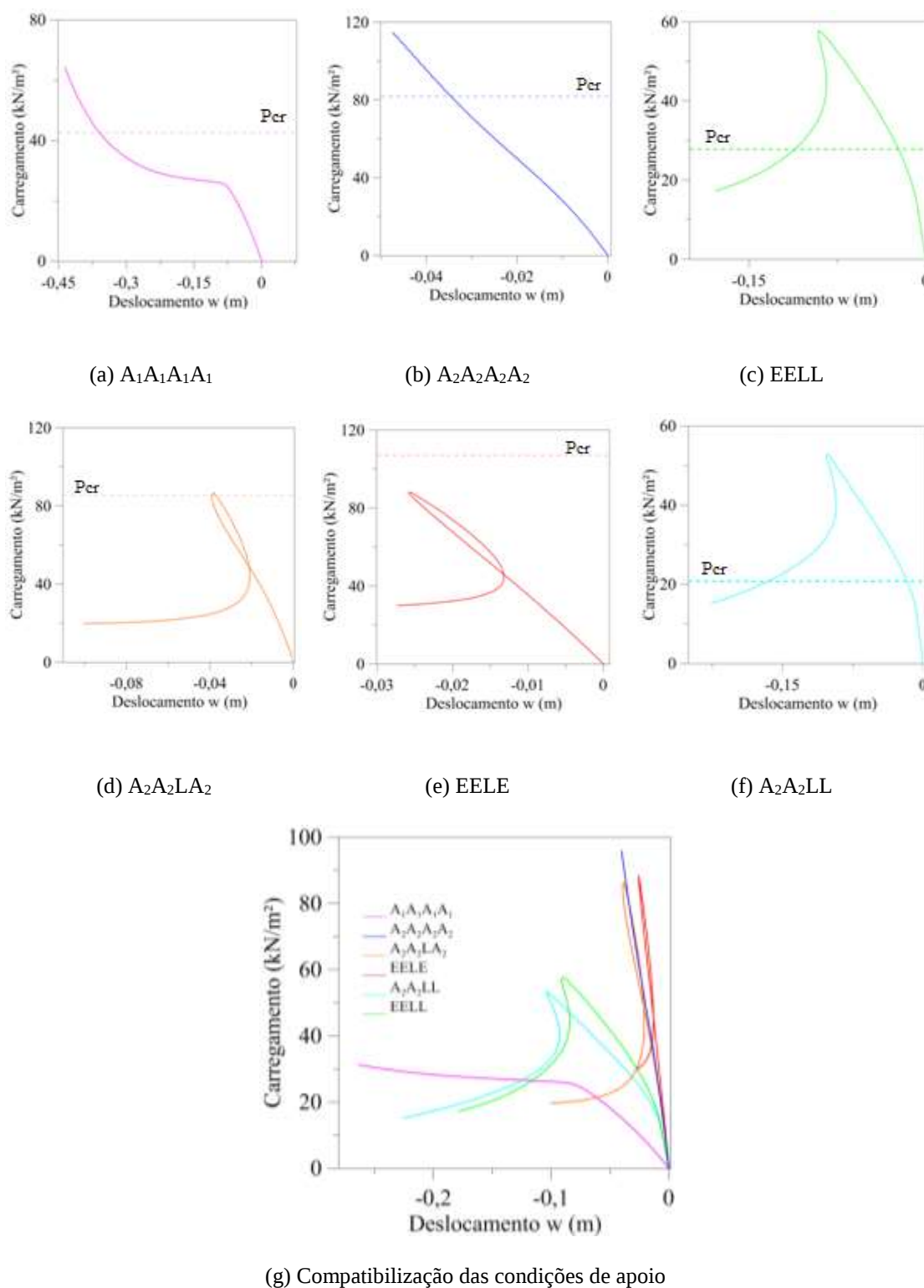


Figura 6- Influência das condições de contorno no caso parabólico

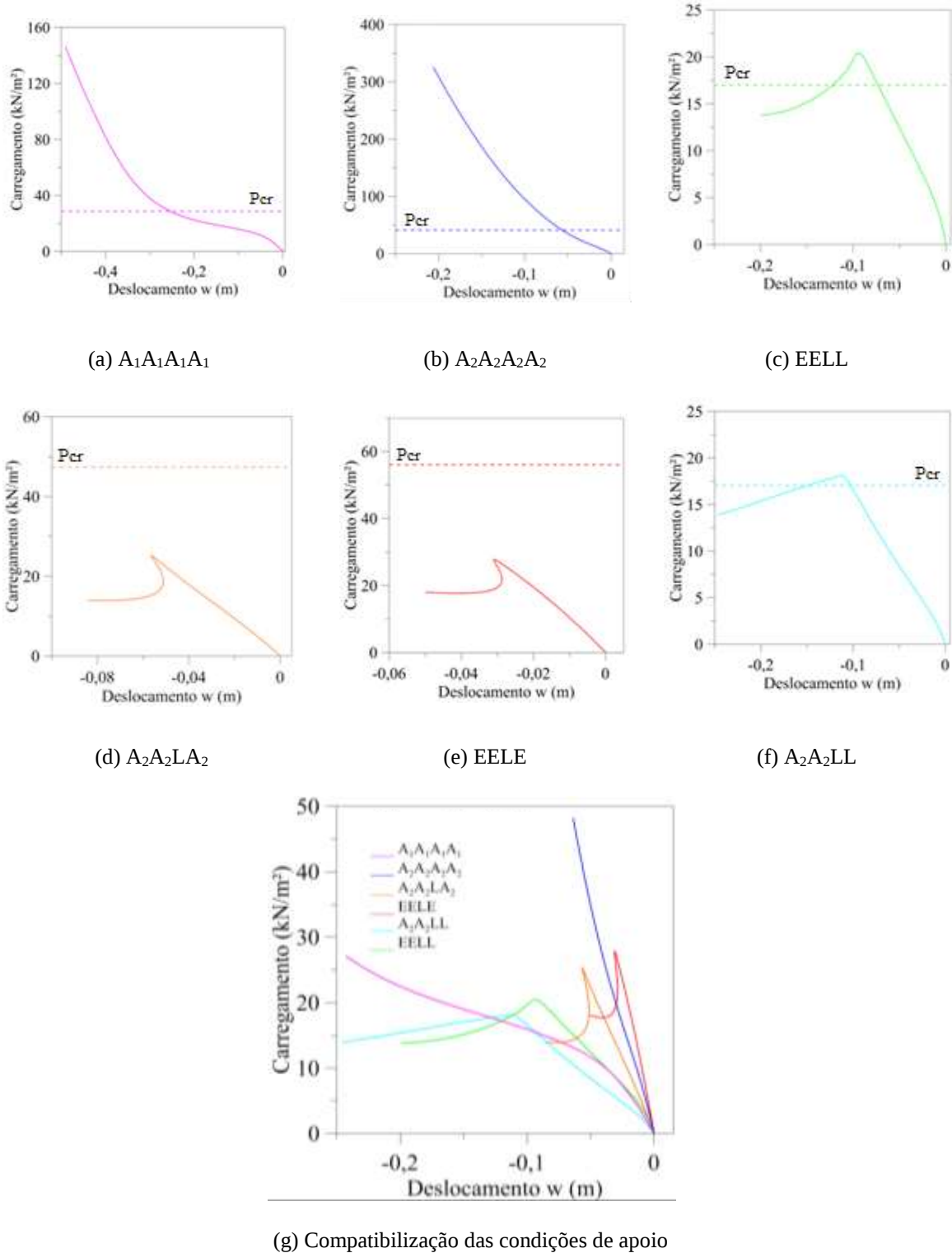


Figura 7- Influência das condições de contorno no caso cilíndrico

As linhas tracejadas nos gráficos das Fig. 6 e 7 representam o patamar de carga crítica obtida com a análise linear, verifica-se que a consideração das não-linearidades geométricas produziu caminhos de equilíbrio altamente não-lineares e proporcionaram cargas limites inferiores ou superiores à carga crítica linear. A partir destes resultados torna-se claro a importância da análise não-linear, pois a análise linear pode superestimar, ou subestimar, o comportamento não-linear da casca conoidal.

Apresentam-se nas Fig. 8 e 9 a variação das formas dos campos de deslocamentos dos conóides parabólicos e cilíndricos com a condição de contorno EELE, a qual conferiu a maior carga limite à estrutura, durante o incremento de carregamento.

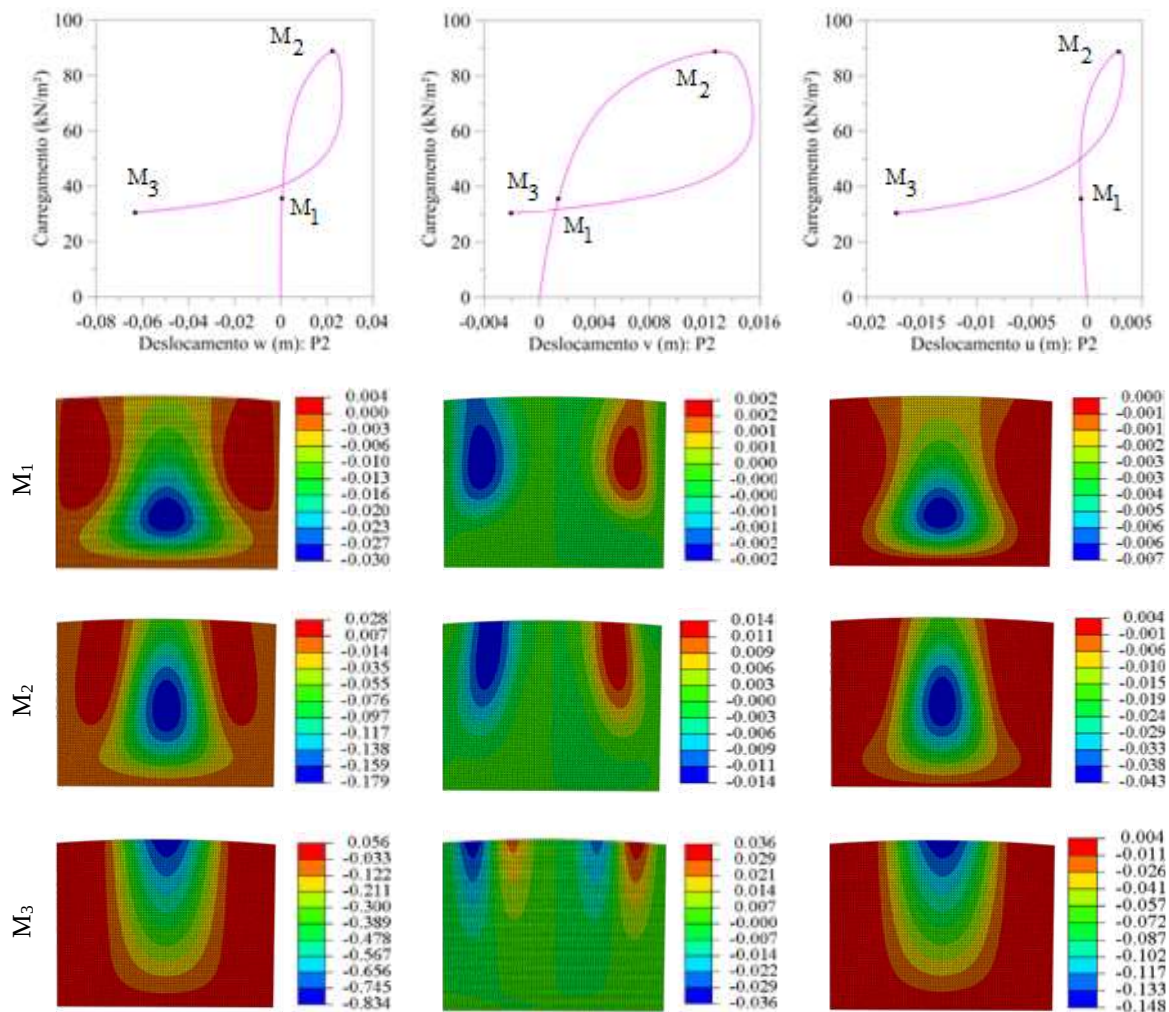


Figura 8- Trajetória não-linear de equilíbrio do conóide parabólico com CA: EELE

Considerando-se três pontos de observação, denominados M1, M2 e M3, posicionados de maneira a verificar como as não-linearidades geométricas modificam a configuração dos deslocamentos ao longo do incremento de carga. É possível visualizar como as não-linearidade geométricas modificam as topologias dos campos de deslocamentos conforme o carregamento é incrementado, sendo que as posições das flechas máximas passam a se

localizarem em diferentes coordenadas da casca. Este comportamento ilustra que, dependendo do nível de carga, os modos de flambagem lineares, Fig. 4 e 5, podem ter a posição da flecha máxima diferente da não-linear.

Verifica-se, ao longo de toda trajetória, a simetria dos campos de deslocamentos w e u , e anti-simetria do deslocamento v em torno do eixo x . Identifica-se ainda semelhante topologia dos casos parabólico e cilíndrico havendo, principalmente, três semi-ondas circunferenciais ao longo da direção y nos deslocamentos w e u , e duas semi-ondas circunferenciais no deslocamento v . Devido a diferença entre as alturas das bordas H_1 e H_2 , há uma dependência da coordenada axial para descrever as topologias dos campos de deslocamentos assim como identificado nos modos de flambagem lineares.

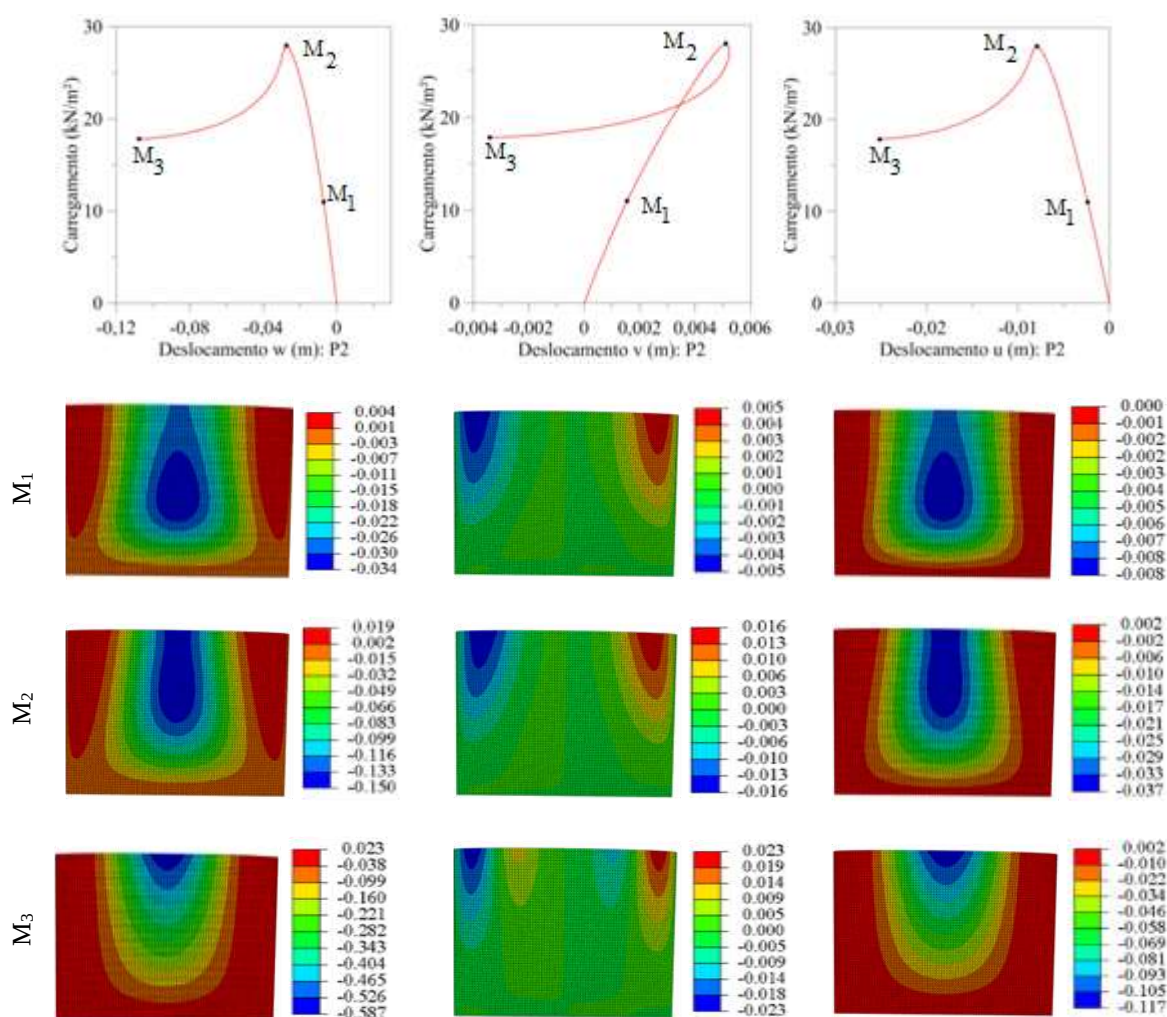


Figura 9- Trajetória não-linear de equilíbrio do conóide cilíndrico com CA: EELE

4 CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho uma análise estática de conóides onde percebeu-se que com a variação dos parâmetros de condições de contorno e tipo de superfície, obtiveram-se na análise linear cargas críticas diferenciadas sendo as topologias dos modos de flambagem afetadas, alterando-se o número de semi-ondas e até mesmo suas disposições ao longo da superfície dos conóides. Levando-se em consideração a análise não-linear, percebeu-se que as não linearidades geométricas produziram trajetórias de equilíbrio com comportamentos altamente não-lineares tanto nos casos parabólicos como nos cilíndricos e essas trajetórias também se mostraram influenciadas pela variação das condições de apoio.

Obtiveram-se cargas limites não-lineares ora superiores, ou inferiores, em comparação às análises lineares das cargas críticas, o que deixa claro que a análise linear pode subestimar ou superestimar o comportamento não-linear das cascas conoidais não sendo recomendada sua adoção em análises de estruturas tipo conóides. Pela observação das topologias dos campos de deslocamentos, percebeu-se que são influenciadas pelas não-linearidades alterando-se as posições de flechas máximas ao longo da incrementação de carga. Este comportamento ilustra que a adoção da análise linear pode acarretar na escolha da posição da flecha máxima diferente da não-linear. O que evidencia a importância da consideração das não-linearidades geométricas nos estudos das cascas conoidais.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi possível devido ao apoio do Ministério da Educação - CAPES, CNPq e FAPEG.

REFERÊNCIAS

- Bandyopadhyay, J. N.; Chakravorty, D.; Sinha, P. K. 1995, Finite element free vibration analysis of conoidal shells, *Computers & Structures*, v. 56, n. 6, p. 975-978.
- Chakravorty, D.; Das, H. S. 2009, *A finite element application in the analysis and design of point-supported composite conoidal shell roofs: suggesting selection guidelines*, Departamento de Engenharia Civil, Univesidade de Jadavpur, Kolkata, Índia.
- Morais, D. L. A. 2017, *Análise estática não-linear de cascas conoidais*, Dissertação de Mestrado, PPG-GECON/UFG, Goiânia.
- Sahoo, S. 2013, Dynamic characters of stiffened composite conoidal shell roofs with cutouts: design aids and selection guidelines, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Engineering*, p. 18. ID 230120
- Cavalcanti, L. V. 2015, *Análise da estabilidade e vibrações de cascas conoidais abatidas*, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, p. 154.

Gonçalves, P. B.; Soares, R. M (2016), Análise numérica do comportamento não-linear estático e dinâmico de cascas conoidais, In: *Proceedings of the 37th Cilamce Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília.

Bandyopadhyay, J. N. A. Ghosh, B. 1990, Approximate bending analysis of conoidal shells using the Galerkin method, *Computers e Structures*, Great Britain, 36, n. 5, p. 801-805.

Stavridis, L. T. 1998, Dynamic analysis of shallow shells of rectangular base, *Journal of Sound and Vibration*, 861-882, sv981907.

Debongnie, J. F. 1978, Physical interpretation and generalization of Marguerre's shallow shell theory, *Int J. Eng Sci.* v. 17, p. 387-399.

Almroth, B. O.; Brush, D. O. 1975, *Buckling of Bars, Plates and Shells*. USA: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Del Prado, Z. J. G. N.; Gonçalves, P. B.; Silva, F. M. A. 2008, Low-dimensional models for the nonlinear vibration analysis of cylindrical shells based on a perturbation procedure and proper orthogonal decomposition, *Journal of Sound and Vibration*, v. 315, p. 641-663.

Silva, F. M. A. 2008, *Modelos de Dimensão Reduzida para Análise das Oscilações Não-Lineares e Estabilidade de Cascas Cilíndricas*, Tese de Doutorado em Engenharia Civil - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 182.