



IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE ESFORÇOS RESISTENTES DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO OBLÍQUA COMPOSTA

Antônio Ribeiro de Oliveira Neto

Samuel Silva Penna

antonio.rdon@gmail.com

spenna@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627, - Escola de Engenharia - sala 4215, 31270-901, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil

Resumo. Elementos estruturais submetidos à flexão oblíqua composta são comuns em estruturas usuais em concreto armado, por exemplo, pilares de edifícios. Tal solicitação é caracterizada por uma força normal e um momento fletor não coincidente com os eixos principais de inércia da seção transversal. No dimensionamento de seções de concreto armado, o problema de se determinar a posição da linha neutra não apresenta uma solução explícita e direta, assim, o cálculo da capacidade resistente de uma seção dá-se iterativamente, resultando em uma envoltória de esforços resistentes conhecido por diagrama de interação. Tal envoltória depende de algoritmos computacionais que, devido a constante atualização e mudanças das normas nacionais e internacionais de cálculo de estruturas de concreto armado, devem ser aprimorados, expandidos e em muitos casos refeitos. Neste cenário, este trabalho apresenta um projeto de software para se calcular os esforços resistentes e composição de diagramas de interação de seções de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta. Para tanto, serão apresentados diagramas UML para o projeto de classes, destacando-se a generalização da proposta. O software é implementado em linguagem de programação JAVA segundo o paradigma de Programação Orientada à Objetos. Por fim, serão apresentados alguns exemplos ilustrando as funcionalidades do software.

Keywords: Flexão Oblíqua Composta, Diagrama de interação, Integração de tensões, Esforços resistentes, Ábacos de dimensionamento, Lei constitutiva, Concreto armado, JAVA.

1 INTRODUÇÃO

A flexão oblíqua composta é uma solicitação presente em estruturas usuais em concreto armado, sendo caracterizada por uma força normal e um momento fletor não coincidente com os eixos principais de inércia da seção transversal. No dimensionamento de elementos estruturais de concreto armado, submetidos a tal solicitação, prescreve-se as dimensões da seção e a disposição da armadura para, em seguida, calcular a área de aço necessária para que os esforços resistentes da seção se equilibrem com os esforços solicitantes.

A obtenção dos esforços resistentes dá-se a partir do conhecimento da posição da linha neutra, que neste caso, não apresenta solução explícita. Assim, o método de solução mais usual é iterativo, em que a posição da linha neutra é prescrita e a capacidade resistente da seção correspondente a esta posição é calculada. Variando-se a posição da linha neutra tem-se um conjunto de pontos que compõem o diagrama de interação daquela seção.

Diversos autores propuseram algoritmos capazes de calcular diagramas de interação para flexão oblíqua composta em seções de concreto armado. Podem ser citados os trabalhos de Campos (1994), De Vivo e Rosati(1998), Fafitis (2001), Chiorean (2010), Fossetti e Papia (2012), Guan; Zhang; Li (2014), Vinciprova e Oliveto (2013), Rodrigues (2015), Campos Filho (1982), Bonet et al. (2004), Cadamuro Júnior (1997), Papanikolaou (2012) dentre outros.

Uma vez que o dimensionamento requer a composição do diagrama e este requer o cálculo dos esforços resistentes em diversas posições da linha neutra, o uso de algoritmos computacionais se faz necessário. Mais além, uma implementação que seja de fácil expansão e aprimoramento para atender à constante atualização e mudanças nas normas nacionais e internacionais de cálculo de estruturas de concreto armado também se faz necessário.

Neste trabalho, é apresentada uma proposta de implementação que permite generalização de algoritmos para a obtenção dos esforços resistentes de seções de concreto armado. Deste modo, pode-se obter o diagrama de interação de uma seção com geometria qualquer, considerando diferentes relações tensão-deformação para o concreto e para o aço. A implementação foi desenvolvida em linguagem de programação JAVA segundo o paradigma de Programação Orientada à Objetos. É apresentado também toda a formulação adotada bem como os diagramas UML das classes implementadas.

2 ESFORÇOS RESISTENTES

A capacidade resistente da seção pode ser representada a partir de diagramas de interação. Destaca-se a forma adotada por Fusco (1981) que, de maneira clara, define uma representação gráfica destes diagramas em função da força normal resistente e momentos fletores resistentes. Para tanto, é necessário calcular os esforços resistentes da seção. A formulação apresentada a seguir baseia-se na proposta de Campos Filho (2014) que apresentou uma formulação para o cálculo dos esforços resistentes em seções de concreto armado, com o cuidado de se generalizar para qualquer função constitutiva do concreto e qualquer geometria.

2.1 Sistema de equações e convenção de sinais

Para uma seção transversal qualquer com o sistema de coordenadas x, y, z sujeita aos esforços N , M_x e M_y , cujo sentido positivo é ilustrado na Fig. 1a, pode-se obter um novo

sistema de coordenadas ξ, η , a partir de um giro de α em torno do eixo z (Figura 1b), de modo que a relação entre as coordenadas e esforços solicitantes nestes sistemas são dadas de acordo com a Eq. (1).

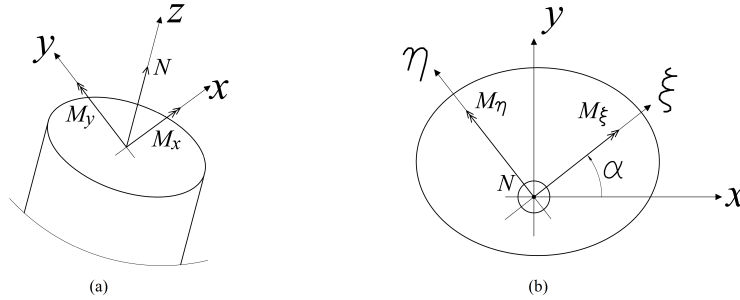


Figura 1: (a) Convenção positiva para esforços solicitantes ou resistentes na seção; (b) Transformação dos esforços

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_\xi \\ M_\eta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Os esforços resistentes da seção são escritos como a soma daqueles devido ao concreto (NR^c , MR_ξ^c e MR_η^c) e daqueles devido ao aço (NR^a , MR_ξ^a e MR_η^a), assim, tem-se:

$$NR = NR^c + NR^a$$

$$MR_\xi = MR_\xi^c + MR_\xi^a \quad (2)$$

$$MR_\eta = MR_\eta^c + MR_\eta^a$$

Uma vez calculados os esforços resistentes no sistema ξ, η , pela Eq. (1) obtém-se NR , MR_x e MR_y . Esse terno de valores representa um ponto no diagrama de interação. Varia-se o estado de deformação da seção e procede ao cálculo de outro ponto, por fim, estará construída a superfície de interação.

Esforços resistentes devido ao concreto

A Fig. 2 ilustra uma seção transversal cujo estado de deformação é definido pela posição da linha neutra (LN) que divide a seção em uma região tracionada e uma comprimida (representada pela região hachurada). Observa-se que a LN é paralela ao eixo ξ e situada em η_{LN} . Desta forma, pode-se definir $\varepsilon(\eta)$ por:

$$\varepsilon(\eta) = \frac{\varepsilon_{cc}}{\eta_{cc} - \eta_{LN}}(\eta - \eta_{LN}), \quad (3)$$

e, consequentemente, $\sigma(\varepsilon)$ pode ser escrito na forma $\sigma(\varepsilon(\eta)) = \sigma(\eta)$. Enfatiza-se que, como frequentemente adotado, as deformações e tensões de compressão são convencionadas como sendo positivas.

Sabendo que os esforços resistentes no concreto são obtidos a partir da integração das

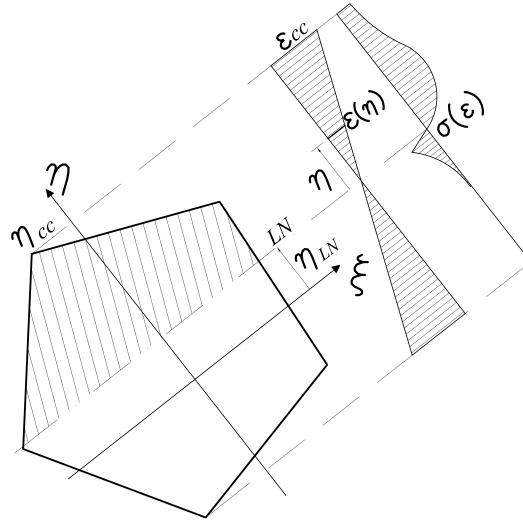


Figura 2: Seção de concreto sujeita a um estado de deformação

tensões ao longo da seção, tem-se

$$NR^c = \int_A \sigma(\eta) dA$$

$$MR_\xi^c = \int_A \eta \sigma(\eta) dA \quad (4)$$

$$MR_\eta^c = - \int_A \xi \sigma(\eta) dA$$

onde NR^c , MR_ξ^c e MR_η^c são os esforços resistentes do concreto comprimido, sendo, força normal, momentos fletores na direção ξ e η respectivamente e A é a área de concreto comprimido correspondente ao domínio da função $\sigma(\eta)$, como ilustrado na Fig. 2.

As integrais na área comprimida da seção podem ser simplificada pela aplicação do Teorema de Green, dado por

$$\int_A f(\xi, \eta) dA = \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, \eta) dA = \oint_\Gamma F(\xi, \eta) \|\vec{n}_\xi\| d\Gamma \quad (5)$$

onde $f(\xi, \eta)$ é uma função escalar válida em um domínio A de contorno Γ , $\vec{n}$ é um vetor unitário normal a Γ e $\vec{n}_\xi$ é sua componente ξ (Figura 3a). Portanto, reescrevendo as Eqs.(4), tem-se:

$$NR^c = \oint_\Gamma \xi \sigma(\eta) \|\vec{n}_\xi\| d\Gamma$$

$$MR_\xi^c = \oint_\Gamma \xi \eta \sigma(\eta) \|\vec{n}_\xi\| d\Gamma \quad (6)$$

$$MR_\eta^c = - \oint_\Gamma \frac{\xi^2}{2} \sigma(\eta) \|\vec{n}_\xi\| d\Gamma$$

Conforme Fig. 3b, tem-se que $\beta = \varphi - 90^\circ \rightarrow \cos\beta = \sin\varphi$ e $\gamma = 180^\circ - \varphi \rightarrow \sin\gamma = \sin\varphi$, logo:

$$\|\vec{n}_\xi\| = \|\vec{n}\| \cos\beta = \|\vec{n}\| \sin\varphi \quad (7)$$

$$d\Gamma = \frac{d\eta}{\sin\gamma} = \frac{d\eta}{\sin\varphi} \quad (8)$$

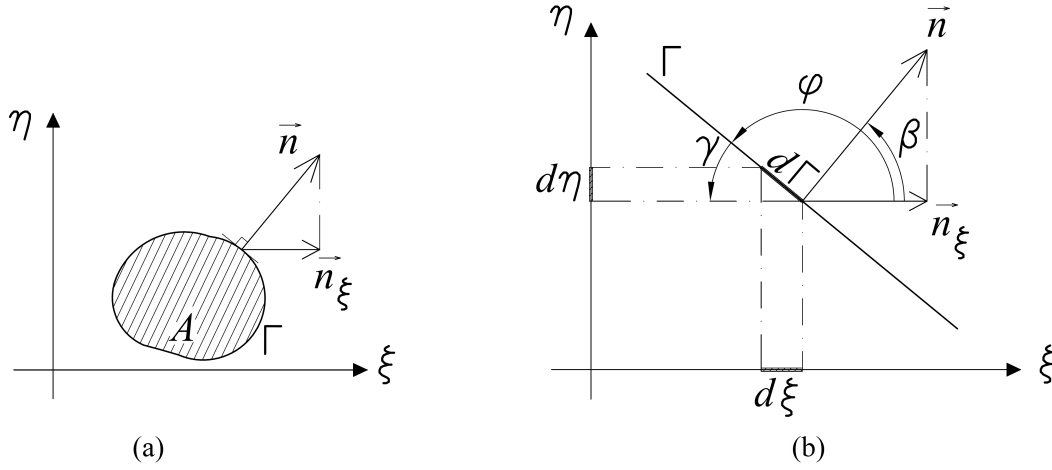


Figura 3: (a) Definição do Teorema de Green; (b) Relação entre $d\Gamma$ e $d\eta$

Multiplicando a Eq.(7) pela Eq.(8), tem-se

$$\|\vec{n}_\xi\| d\Gamma = d\eta \quad (9)$$

Substituindo a Eq. (9) nas Eq. (6):

$$NR^c = \oint_\eta \xi \sigma(\eta) d\eta$$

$$MR_\xi^c = \oint_\eta \xi \eta \sigma(\eta) d\eta \quad (10)$$

$$MR_\eta^c = - \oint_\eta \frac{\xi^2}{2} \sigma(\eta) d\eta$$

Como definido na Fig. 4a, tem-se:

$$\xi = \xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\eta - \eta_{i1}}{\eta_{i2} - \eta_{i1}} \quad (11)$$

onde s_i é um dos segmentos de reta que compõe o contorno, ξ_{i1} e η_{i1} são as coordenadas do seu primeiro ponto e ξ_{i2} e η_{i2} do segundo ponto.

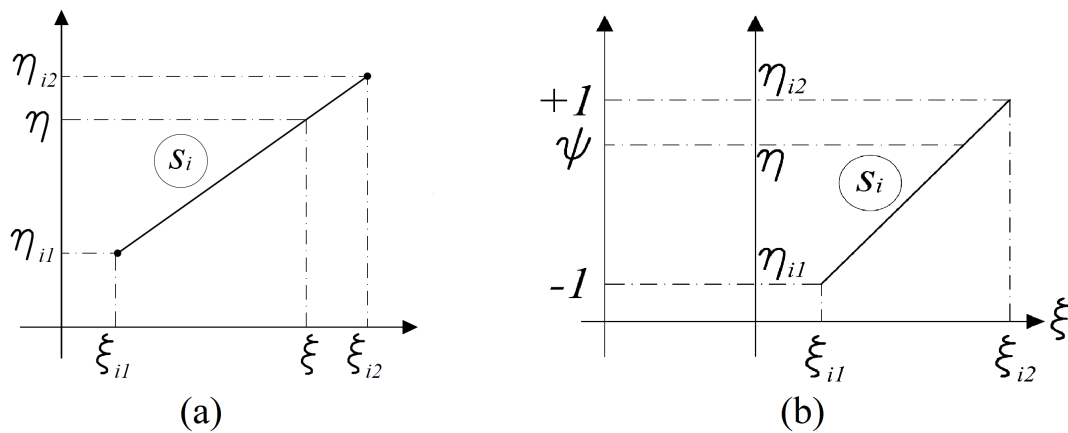


Figura 4: (a) Relação entre ξ e η ; (b) Parametrização de η em ψ

Assim, as Eq. (10) podem ser escritas como um somatório dos n_s segmentos, como segue:

$$\begin{aligned} NR^c &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\eta_{i1}}^{\eta_{i2}} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\eta - \eta_{i1}}{\eta_{i2} - \eta_{i1}} \right] \sigma(\eta) d\eta \\ MR_{\xi}^c &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\eta_{i1}}^{\eta_{i2}} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\eta - \eta_{i1}}{\eta_{i2} - \eta_{i1}} \right] \eta \sigma(\eta) d\eta \\ MR_{\eta}^c &= - \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\eta_{i1}}^{\eta_{i2}} \left[\frac{1}{2} \xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\eta - \eta_{i1}}{\eta_{i2} - \eta_{i1}} \right]^2 \sigma(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (12)$$

Pela parametrização do contorno (Figura 4b), tem-se:

$$\eta = \frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \psi + \frac{\eta_{i2} + \eta_{i1}}{2} \quad (13)$$

$$d\eta = \frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} d\psi \quad (14)$$

Substituindo Eq. (13) e Eq. (14) em Eq. (12) e na função $\sigma(\eta)$, obtém-se

$$\begin{aligned} NR^c &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\psi+1}{2} \right] \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \right] \sigma(\psi) d\psi \\ MR_{\xi}^c &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\psi+1}{2} \right] \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \psi + \frac{\eta_{i2} + \eta_{i1}}{2} \right] \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \right] \sigma(\psi) d\psi \\ MR_{\eta}^c &= - \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\psi+1}{2} \right]^2 \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{4} \right] \sigma(\psi) d\psi \end{aligned} \quad (15)$$

As integrais das Eqs.(equacaoEC5) podem ser solucionadas numericamente para determinado número de pontos de Gauss (n_{PG}) com seus respectivos pesos (w_j), sendo:

$$\begin{aligned} NR^c &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_{PG}} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\psi_j+1}{2} \right] \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \right] \sigma(\psi_j) w_j \\ MR_{\xi}^c &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_{PG}} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\psi_j+1}{2} \right] \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \right] \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{2} \psi_j + \frac{\eta_{i2} + \eta_{i1}}{2} \right] \sigma(\psi_j) w_j \\ MR_{\eta}^c &= - \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_{PG}} \left[\xi_{i1} + (\xi_{i2} - \xi_{i1}) \frac{\psi_j+1}{2} \right]^2 \left[\frac{\eta_{i2} - \eta_{i1}}{4} \right] \sigma(\psi_j) w_j \end{aligned} \quad (16)$$

As coordenadas ξ_i e η_i são dados da seção transversal definidas no sistema x,y de coordenadas, sendo, portanto, obtidas a partir da transformação dada na Eq.(1). Os esforços solicitantes são obtidos, de forma análoga, também pela Eq.(1).

Esforços resistentes devido ao aço

A contribuição das barras de aço no cálculo dos esforços resistentes da seção pode ser simplificada a partir de um somatório da contribuição individual de cada uma das barras.

A Fig. 5 ilustra uma seção genérica com uma distribuição de barras. O cálculo, assim como no concreto, depende da posição da linha neutra e do respectivo estado de deformação escrito na forma da Eq.(3). Assim, pela contribuição de cada barra, e considerando a tensão constante

e igual à do centróide da barra, tem-se

$$\begin{aligned}
 NR^a &= \sum_{i=1}^{n_b} A_{si} \sigma(\eta_i) \\
 MR_{\xi}^a &= \sum_{i=1}^{n_b} \eta_i A_{si} \sigma(\eta_i) \\
 MR_{\eta}^a &= - \sum_{i=1}^{n_b} \xi_i A_{si} \sigma(\eta_i)
 \end{aligned} \tag{17}$$

onde NR^a é a força normal resistente do aço, MR_{ξ}^a e MR_{η}^a os momentos fletores resistentes nas direções ξ e η respectivamente, n_b é o número de barras na seção e A_{si} é a área da barra de índice i .

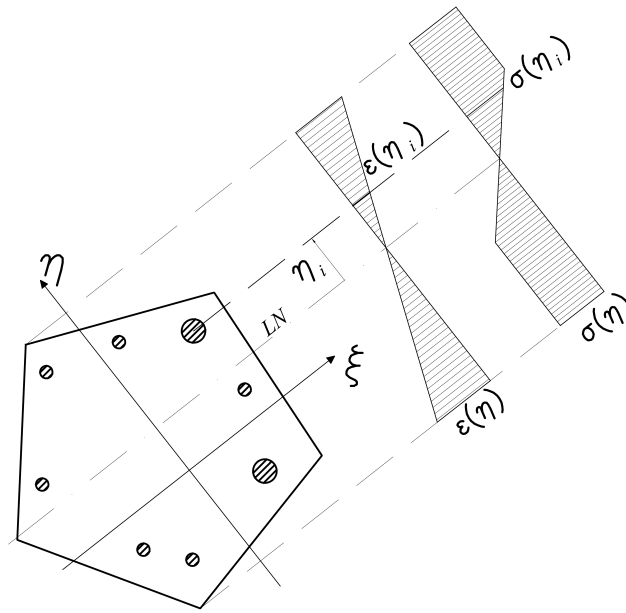


Figura 5: Barras de aço na seção de concreto

3 IMPLEMENTAÇÃO

A proposta de implementação separa o programa em dois módulos principais, denominados *Model* e *Processor*.

O módulo *Model* é constituído por um conjunto de classes que representam todas as características físicas do problema da flexão oblíqua composta, desde a estrutura de dados geométricos, de materiais e normativos, até os dados referentes aos diagramas de interação ou à construção de ábacos de dimensionamento.

O módulo *Processor* contém as tarefas responsáveis por obter o diagrama de interação ou o ábaco, ou seja, contém os métodos que, dentre outras tarefas, integram as tensões dos materiais sobre a seção transversal, dividindo esta em polígonos e parametrizando cada segmento deste.

A seguir será descrito a hierarquia de classes que representa os materiais, a seção transversal e o ábaco, compondo a parte principal do módulo *Model*, e a rotina principal de atividades do algoritmo, compondo o módulo *Processor*.

3.1 Módulo *Model*: classes para representação de materiais

Na construção do diagrama de interação é requisitado o valor das tensões nos materiais, por tanto, ficam armazenados nestas classes os dados e métodos necessários para este cálculo.

Com o intuito de generalizar o material, ou seja, compô-lo com uma lei constitutiva de compressão independente da de tração, as classes que o representa contém objetos denominados *ConstitutiveLaw*. Estas, armazenam dados que compõem uma lei constitutiva, sendo ela de compressão ou tração, para o concreto e/ou aço.

Cada classe que representa o material, possui um objeto *ConstitutiveLaw* para a compressão e outro para a tração, e é nestes que estão os métodos para o cálculo das tensões. Por esta razão, as classes descritas aqui representam uma lei constitutiva e não um material. A Fig. 6 mostra a hierarquia de algumas dessas classes referentes ao concreto, sendo as do aço análogas, mas com leis constitutivas típicas de aço.

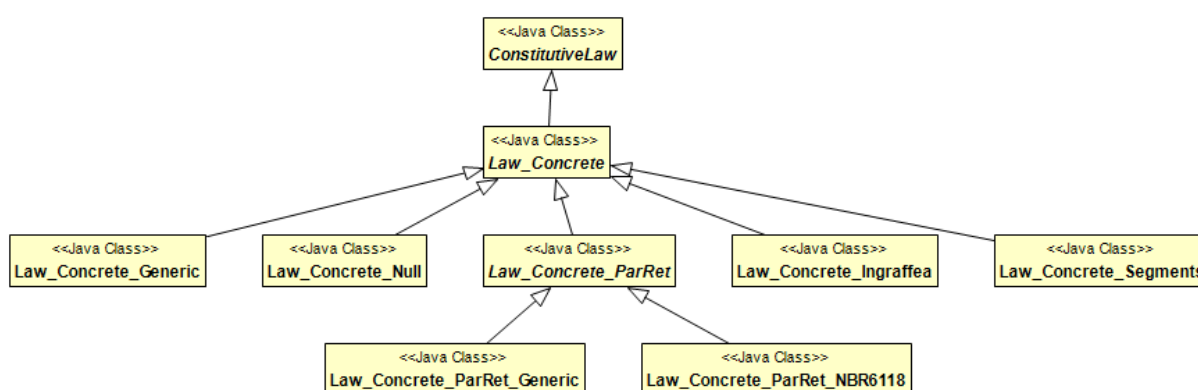


Figura 6: Diagrama UML da hierarquia de classes que representa as leis constitutivas do concreto

A classe *Law_Concrete_Generic* representa uma lei constitutiva genérica, definida como um conjunto de funções matemáticas quaisquer, nas quais o ϵ é a deformação e y é a tensão. Esse conjunto pode ser composto por diferentes combinações de funções, por exemplo, a Lei de Ingraffea (Boone; Wawrzynek; Ingraffea, 1986) composta por um trecho linear e outro exponencial, pode ser representada por essa classe adicionando essas duas funções ao conjunto.

A classe *Law_Concrete_Null* representa uma lei constitutiva com comportamento nulo à compressão ou à tração, devolvendo o valor zero sempre que solicitado o cálculo das tensões. Seu propósito é representar um concreto com resistência apenas à compressão, sendo a tração desprezada.

As classes *Law_Concrete_ParRet_NBR6118* e *Law_Concrete_Ingraffea* representam leis constitutivas prescritas pela ABNT NBR 6118 (2014) e Boone; Wawrzynek; Ingraffea (1986), respectivamente.

A classe *Law_Concrete_Segments* calcula as tensões baseando-se em uma lei constitutiva composta por segmentos de reta e a classe *Law_Concrete_ParRet_Generic* baseia-se em uma lei composta por um trecho polinomial seguido por outro constante.

3.2 Módulo *Model*: classes para representação da seção transversal

A hierarquia de classes que representa a seção transversal (Figura 7) é responsável por armazenar os dados geométricos necessários à integração de tensões, são eles: as coordenadas

do contorno da seção, isto é, sendo a seção composta de segmentos de reta, a coordenada dos seus pontos e; as coordenadas do centro de gravidade das barras de aço e seus diâmetros.

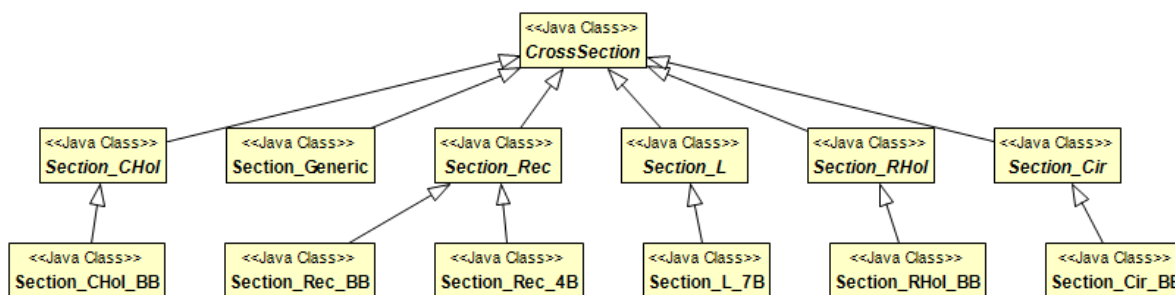


Figura 7: Diagrama UML da hierarquia de classes que representa a seção transversal

A classe *CrossSection* contém um conjunto de variáveis onde ficam armazenadas as referidas coordenadas e os diâmetros das barras. Estes são inicializados pelas demais classes, dependendo apenas da forma da seção e disposição da armadura da seção que se pretende calcular.

A classe *Section_Generic* representa uma seção transversal genérica, ou seja, com forma, dimensões e disposição de armadura qualquer, inicializando o referido conjunto de variáveis da classe *CrossSection* diretamente com os dados de entrada.

As demais classes da Fig. 7 representam uma seção transversal com forma e disposição de armadura pré-determinada. Todas elas inicializam as variáveis da classe *CrossSection* baseando-se em um conjunto de dados específicos, sendo necessário calcular as coordenadas do contorno e das barras a partir dos mesmos. Por exemplo, a classe *Section_CHol_BB*, que representa uma seção circular vazada com as barras espaçadas igualmente na direção tangencial, contém métodos que calculam as coordenadas do contorno e das barras com base no diâmetro interno e externo da seção e no número de barras, que são dados de entrada.

A hierarquia de classes mostrada na Fig. 8 representam seções transversais para as quais deseja-se compor ábacos de dimensionamento. Nestas classes são implementados métodos que criam objetos do tipo *CrossSection* com dimensões parametrizadas além de instâncias que armazenam os resultados após o cálculo.

Observa-se que cada uma das classes do tipo *Chart* possui uma instância de *CrossSection* correspondente ao seu tipo. Por exemplo, a classe *Chart_RHol_BB* instancia somente a classe *Section_RHol_BB*, com dados de uma seção transversal circular vazada e dimensões parametrizadas. Assim, pode-se fornecer ao processo de cálculo (*Processor*) dados de uma seção transversal para a construção do ábaco.

3.3 Módulo *Processor*

O módulo *Processor* armazena os métodos necessários para o cálculo dos esforços resistentes e para a composição do diagrama de interação e/ou do ábaco. Cada método é responsável por uma tarefa que compõem a rotina principal do algoritmo.

Para o caso em que se deseja o diagrama de interação, ordenam-se as principais tarefas dessa rotina:

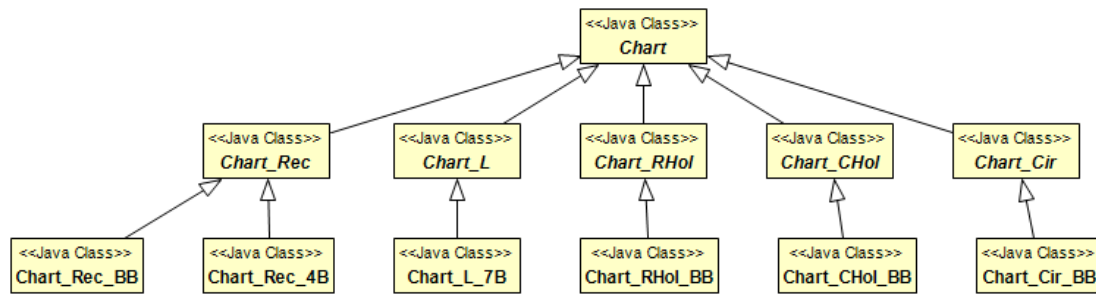


Figura 8: Diagrama UML do ábaco

- i Prescrição da direção da linha neutra LN , isto é, o valor de α (Figura 1b), que varia entre 0 a 2π radianos. Esta tarefa é realizada no método `computeInteractionDiagram()`, que calcula o diagrama de interação da seção fixando-se determinado valor de força normal.
- ii Obtenção das coordenadas geométricas, tanto do contorno quanto das barras de aço, no sistema ξ, η , no qual a origem está no centro geométrico da seção e o eixo ξ paralelo à linha neutra LN (Figura 1b). Para isso, a classe *Processor* solicita o método `setSystemLocal` da classe *CrossSection*, onde está implementada a Eq. (1).
- iii Prescrição da coordenada da linha neutra no sistema ξ, η , representada por η_{LN} (Figura 9), utilizando o método da bissecante como descrito por Araújo (2014). Esta tarefa é realizada pelo método `computeStrengthCapacity()`, que em um primeiro instante, calcula apenas a normal resistente e compara com a força normal prescrita na primeira etapa.
- iv Determinação do estado de deformação da seção, ou seja, a “Reta de deformação” mostrada na Fig. 9. Esta, é obtida pelo método `strainLine()` a partir de dois pontos. O primeiro se deve à posição da linha neutra, que é estabelecida por η_{LN} , e o segundo é dado, geralmente, pela fibra mais comprimida, situada na posição η_{cc} e sua deformação é ε_{cc} , que é um parâmetro de dimensionamento;
- v Divisão da seção em polígonos baseando-se na lei constitutiva do concreto. Por exemplo, na Fig. 9 a lei de compressão é um conjunto de duas funções, logo, a área comprimida da seção deve ser dividida em dois polígonos. O mesmo aconteceria ao concreto traçado. O método responsável por essa tarefa é denominado `getPolygons()`, que utiliza algoritmos de geometria computacional para obter os domínios de área a serem integrados;
- vi Cálculo da normal resistente devido ao concreto e ao aço, utilizando a primeira equação de Eq.(16) e de Eq.(17) respectivamente. Estas equações estão implementadas nos métodos `computeNormalConc()` e `computeNormalSteel()`, e estes são solicitados pelo método `computeStrengthCapacity()`, que soma os dois valores e verifica a convergência entre a solicitação dada e a normal calculada. Caso não haja convergência, executa-se novamente o processo a partir da etapa iii;
- vii Cálculo dos momentos no sistema ξ, η utilizando a segunda e terceira expressões da Eq. (16) e da Eq.(17), referentes ao concreto e ao aço, respectivamente. Os métodos responsáveis por essas tarefas são solicitados em `computeStrengthCapacity()`

quando houver convergência na etapa anterior.

- viii Transformação dos momentos no sistema ξ, η para o sistema x, y , utilizando Eq. (1). Essa tarefa está implementada no método `toGlobalCoord()` da classe que representa os esforços resistentes, denominada *StrengthCapacity*, mas é solicitada no módulo *Processor*.
- viii Incremento do valor α até $\alpha = 2\pi$ radianos. Tarefa executada novamente pelo método `computeInteractionDiagram()`, citado na etapa i.

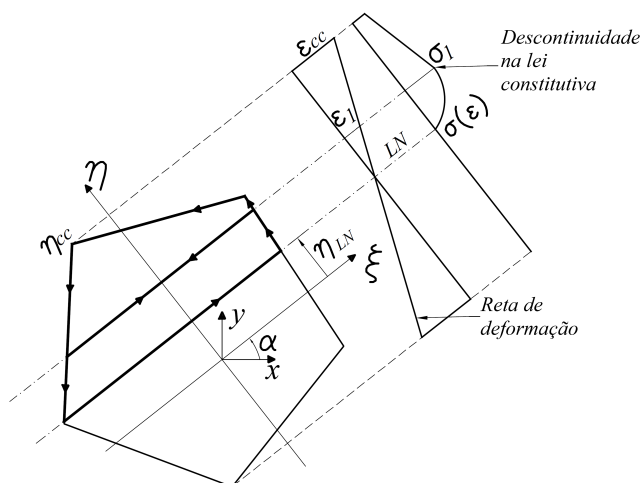


Figura 9: Processo de divisão da seção em polígonos

Das atividades citadas, a divisão da seção em polígonos será detalhada a seguir dada sua importância na integração das tensões com a aplicação do Teorema de Green e o constante uso de algoritmos de geometria computacional.

A seção transversal mostrada na Fig. 9 está submetida ao estado de deformações, destacado pela “Reta de deformação”, resultando em um estado de tensão $\sigma(\epsilon)$. Observa-se que a lei constitutiva do concreto é composta por dois trechos, sendo σ_1 o valor da tensão que distingue estes dois trechos. Portanto, é necessário dividir a seção em dois polígonos, correspondentes à cada trecho do diagrama de tensões. O primeiro polígono está entre a linha neutra e o limite de deformação ϵ_1 e o segundo está acima de ϵ_1 .

Primeiramente, obtém-se o polígono que está acima da linha neutra, representado por “A” na Fig. 10a. Para isso, é necessário a equação de uma reta no sistema ξ, η que represente a linha neutra, ou seja, dada a equação de uma reta, $\eta = a\xi + b$, calcula-se os coeficientes a e b . Observando ainda a Fig. 10a, nota-se que $a = 0$ e $b = \eta_{LN}$, sendo portanto, $\eta = \eta_{LN}$ a equação da reta que representa a linha neutra.

Uma vez calculadas as coordenadas dos vértices do polígono que representa o contorno da seção transversal, e da equação da linha neutra, o método denominado `getPolygonAbove()`, retorna o polígono “A” da Fig. 10a. Para isso, o método percorre os pontos do contorno da seção e verifica se estão acima da reta, adicionando-os em uma lista que irá compor o polígono “A”. Ainda neste procedimento, os pontos de intersecção, mostrados na Fig. 10a, devem ser criados e adicionados à mesma lista.

Em seguida, deve-se dividir o polígono “A” em outros dois polígonos, um que está abaixo

do limite de deformação dado por ε_1 , representado por “B” na Fig. 10b, e outro que está acima, representado por “C”. de forma análoga à definição da linha neutra, deve-se obter a equação de uma reta que represente esse limite. Observa-se na Fig. 10b que a equação é dada por $\eta = \eta_{\varepsilon_1}$.

Com o método `getPolygonAbove()`, obtém-se o polígono “C”, e, com o método `getPolygonBelow()`, obtém-se os polígonos abaixo da reta $\eta = \eta_{\varepsilon_1}$, no caso, o polígono “B”. Assim, ficam definidos os dois polígonos de integração para a área comprimida da seção transversal.

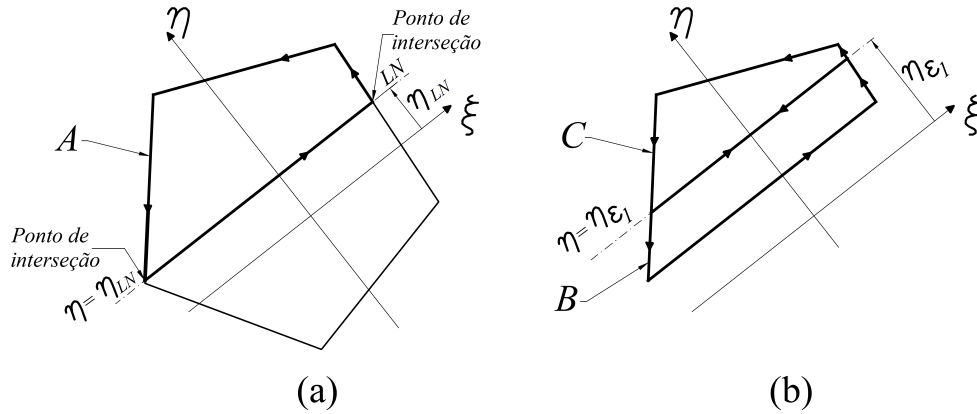


Figura 10: (a) Divisão da seção pela reta $\eta = \eta_{LN}$; (b) Divisão da seção pela reta $\eta = \varepsilon_1$

4 EXEMPLOS

Para ilustrar a aplicação do algoritmo implementado são apresentados dois exemplos. O primeiro exemplo trata de uma seção “L” estudada por Vinciprova e Oliveto (2013), e no segundo exemplo tem-se uma seção retangular apresentada por Rodrigues (2015).

4.1 Seção “L” submetida à flexão oblíqua composta

Vinciprova e Oliveto (2013) apresentaram um seção “L”, ilustrada na Fig. 11, submetida à flexão oblíqua composta. Observa-se que as flanges da seção são desiguais de 444,5 cm e 342,9 cm de comprimento, com 53,34 cm de espessura. A armadura consiste em 29 barras de 32,3 mm de diâmetro, espaçadas igualmente e posicionadas na linha de centro da espessura das flanges.

Para o concreto comprimido foi considerada o diagrama parábola-retângulo, dado pelas equações Eq. (18) e Eq. (19). Tomando $\alpha = 0,85$, $f_{cd} = 62,05 MPa$, $\varepsilon_{c1} = 2,0 ‰$ e $\varepsilon_{cu} = 3,5 ‰$ o diagrama tensão-deformação é ilustrado na Fig. 12a.

$$\sigma_c = \alpha f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \right] \quad \forall \varepsilon_c \in [0, \varepsilon_{c1}] \quad (18)$$

$$\sigma_c = \alpha f_{cd} \quad \forall \varepsilon_c \in [\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{cu}] \quad (19)$$

O aço tem comportamento elastoplástico perfeito com módulo de elasticidade igual a 206843 MPa e tensão de escoamento de 413.69 MPa, como mostrado na Fig. 12b.

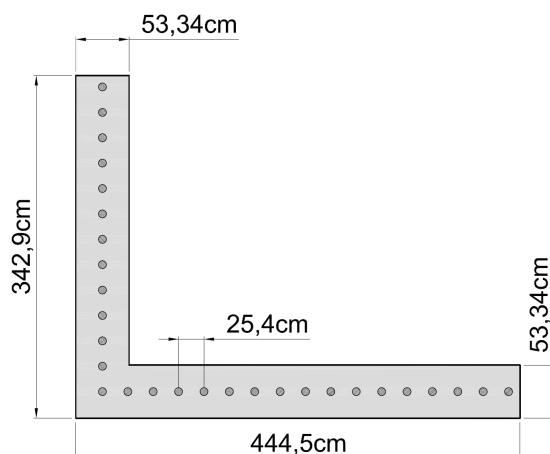


Figura 11: Seção “L”(Vinciprova e Oliveto, 2013)

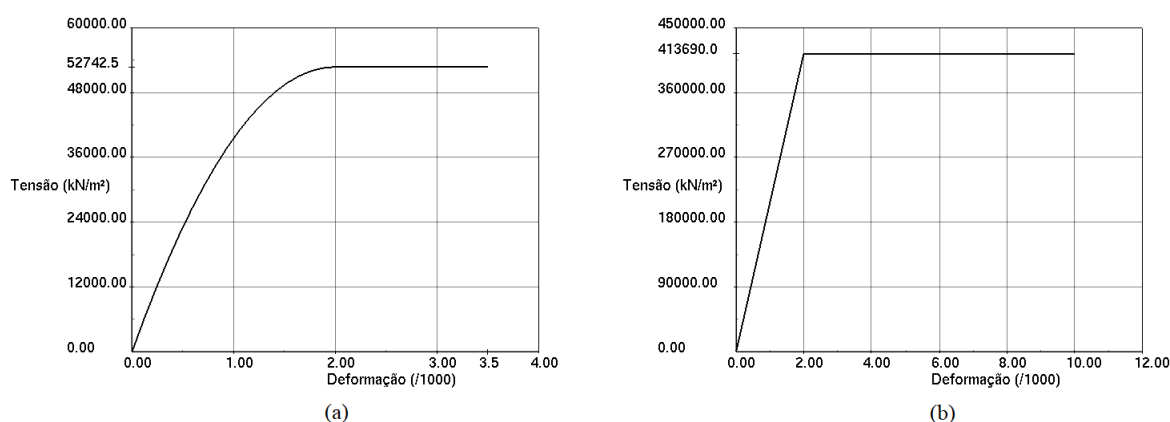


Figura 12: (a) Lei constitutiva do concreto; (b) Lei constitutiva do aço da seção “L”

Na Fig. 15 é comparado o diagrama de interação obtido neste trabalho com aquele obtido por Vinciprova e Oliveto (2013), com três intensidades de forças normais: $N = 195722 \text{ kN}$, $N = 40034 \text{ kN}$ e $N = 106757 \text{ kN}$, sendo que valores positivos representam compressão. Observa-se que as curvas estão em concordância para todos os carregamentos, mostrando a capacidade do algoritmo de compor diagramas de interação para uma seção transversal de forma genérica.

4.2 Seção retangular submetida à flexão oblíqua composta

Neste exemplo, Rodrigues (2015) apresenta uma seção retangular de 70 cm de altura e 30 cm de largura, com armadura composta por 4 barras de 35.7 mm de diâmetro, posicionadas nos cantos com cobrimento de 5 cm , solicitada à flexão oblíqua composta.

A lei constitutiva do concreto à compressão segue o diagrama parábola-retângulo (Eq. (18) e Eq. (19)), sendo $\alpha = 1,0$, $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$, $\varepsilon_{c1} = 2,0 \text{ ‰}$ e $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$, como ilustrado na Fig. 14a.

O comportamento do aço não é definido com precisão por Rodrigues (2015), assim, neste exemplo, adotou-se um trecho linear-elástico com módulo de elasticidade igual a 210000 MPa

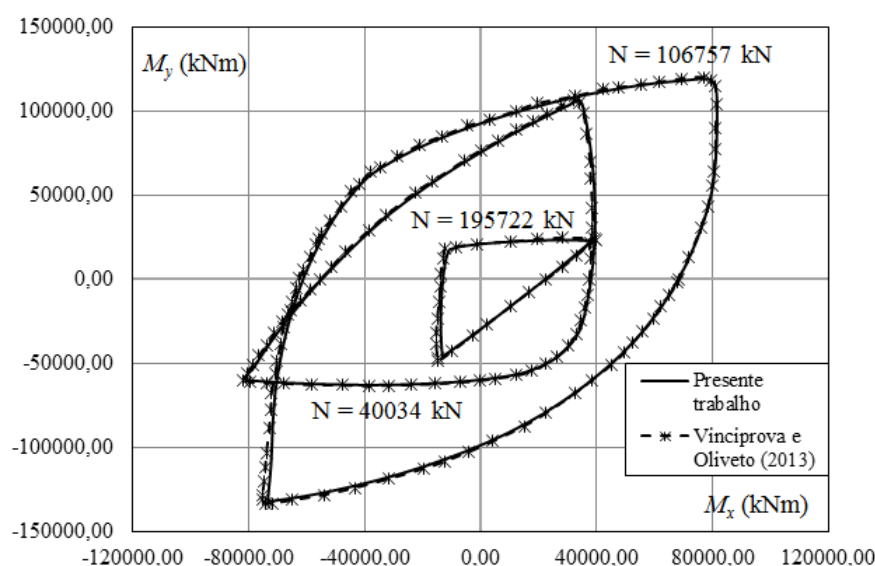


Figura 13: Diagramas de interação dados pelo presente trabalho e Vinciprova e Oliveto (2013)

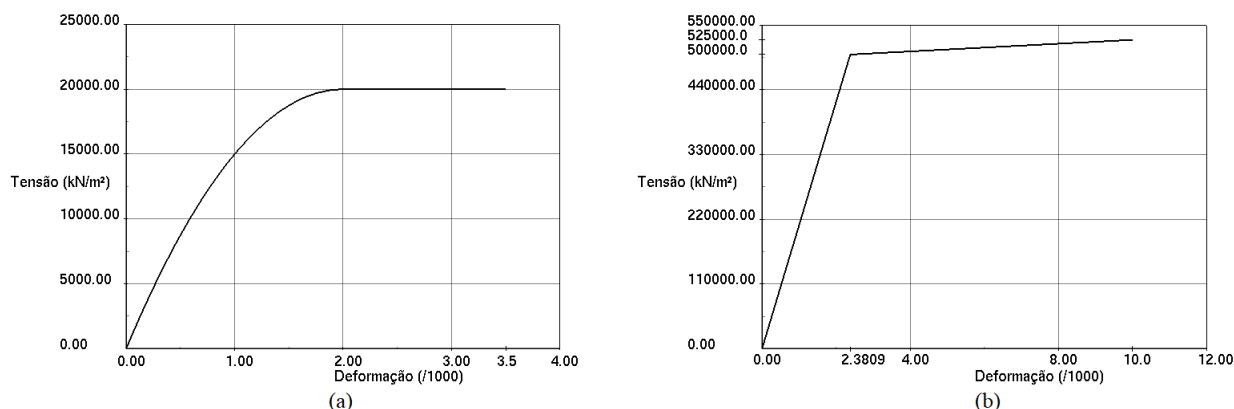


Figura 14: (a) Lei constitutiva do concreto; (b) Lei constitutiva do aço da seção retangular

e tensão de escoamento de 500 MPa , seguido de um trecho elastoplástico com encruamento com módulo de “hardening” igual a 3281 MPa , como mostra a Fig. 14a.

Na Fig. 15 é comparado o resultado obtido neste trabalho e em Rodrigues (2015), compondo o diagrama de interação da seção para três normais: $N = 1000 \text{ kN}$, $N = 0 \text{ kN}$, $N = -750 \text{ kN}$, $N = 5000 \text{ kN}$ e $N = -1500 \text{ kN}$. A discordância entre os resultados é atribuída à diferença entre as leis constitutivas do aço, especialmente sobre carregamentos de tração, onde o aço é mais solicitado. Ainda assim, o algoritmo foi capaz de descrever a com bastante conformidade o diagrama apresentado por Rodrigues (2015).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi apresentada uma proposta de implementação para cálculo da capacidade resistentes de seções transversais de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta. A proposta apresentada tem como principal objetivo a generalização da implementação de modo

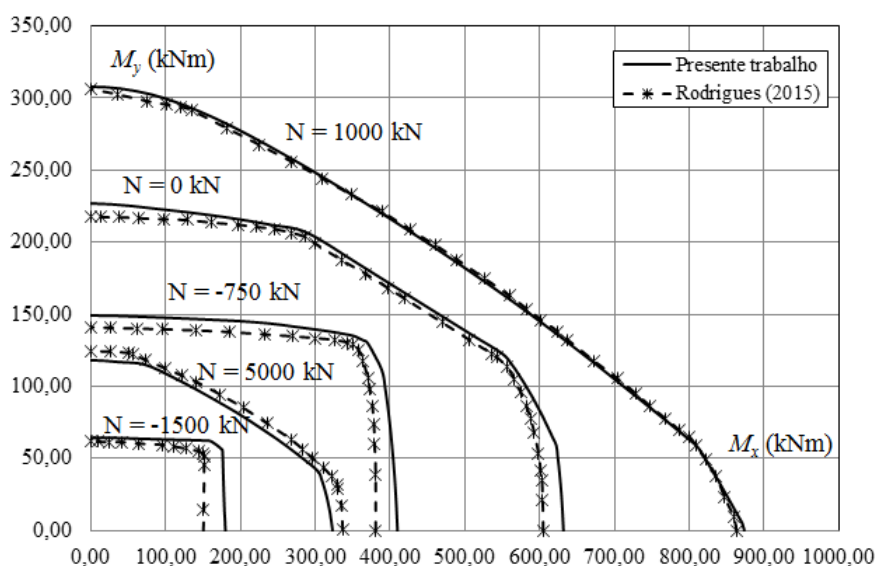


Figura 15: Diagramas de interação dados pelo presente trabalho e Rodrigues (2015)

que o código seja de fácil aprimoramento e expansão, ou até mesmo a aplicação junto a outras implementações ou softwares.

Destaca-se nesta implementação, a possibilidade de se obter a capacidade resistente de seções transversais de geometria qualquer, com diferentes arranjos de armadura e quaisquer leis constitutivas para o aço e para o concreto. Ressalta-se também que o software é capaz de compor diagramas de interação ou ábacos de dimensionamento, gerando tabelas com as séries de dados que podem ser usadas diretamente na verificação de seções ou no cálculo de armaduras, pode-se também, com estes resultados, criar um banco de dados para outros softwares de dimensionamento de estruturas de concreto armado.

A descrição do projeto de classes resume o estado atual do programa, que ainda está em desenvolvimento e segue as premissas da licença GNU para softwares livres e de código aberto, que será disponibilizado para download ao final da implementação.

Quanto aos resultados apresentados, observou-se a boa concordância com os exemplos testados, contudo, são necessários mais testes que garantam a validação da implementação para diferentes seções transversais e diferentes leis materiais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo auxílio financeiro permitindo a participação no congresso e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro em forma de bolsa de mestrado.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014. *NBR-6118: Projeto de Estruturas de Concreto - procedimento*.

- Araújo, J. M., 2014. *Curso de Concreto Armado*. Rio Grande, Dunas. vol.3, 4.ed.
- Boone, T. J., Wawrzynek, P. A., Ingraffea, A. R., 1987. Simulation of the Fracture Process at Rock Interfaces. *Fourth International Conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 519-531.
- Bonet, J. L., Romero, M. L., Miguel, P. F. & Fernandez, M. A., 2004. A Fast Stress Integration Algorithm for Reinforced Concrete Sections with Axial Loads and Biaxial Bending. *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 213-225.
- Cadamuro Júnior, I. W., 1997. *Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado com Seção Qualquer Solicitados por Flexão Composta Oblíqua*, Mestrado, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, Brasil.
- Campos Filho, A., 1982. *Análise de Pilares de Concreto Armado Submetidos à Flexo-Compressão Oblíqua*, Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS, Brasil.
- Campos Filho, A., 2014. *Dimensionamento e Verificação de Seções Poligonais de Concreto Armado Submetidas à Flexão Composta Oblíqua*. Porto Alegre, Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil.
- Campos, N. B. F., 1994. *Contribuição ao Estudo de Pilares em Concreto Armado com Seção Qualquer Submetidos à Flexão Composta Oblíqua*. Mestrado, Universidade De São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Chiorean, C. G., 2010. Computerised Interaction Diagrams and Moment Capacity Contours for Composite Steel-Concrete Cross-Sections. *Engineering Structures*, vol. 32, pp. 3734-3757.
- De Vivo, L., & Rosati, L., 1998. Ultimate Strength Analysis of Reinforced Concrete Sections Subject to Axial Force and Biaxial Bending. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 166, pp. 261-287.
- Fossetti, M. & Papia, M., 2012. Dimensionless Analysis of RC Rectangular Sections Under Axial Load and Biaxial Bending. *Engineering Structures*, vol. 44, pp. 34-45..
- Fusco, P. B., 1981. *Estruturas de Concreto Armado, Solicitações Normais, Teoria e Aplicações*. Rio de Janeiro, BRA: Guanabara 2 s.a.
- Guan, Z., Zhang, J. & Li, J., 2014. A Robust Computational Method For Ultimate Strength Analysis of Arbitrary Reinforced Concrete and Composite Sections Subjected to Axial Force and Biaxial Bending. *Advances in Structural Engineering*, vol. 17, n. 1, pp. 83-96.
- Kreyszig, E., 2006. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, EUA: John Wiley Sons.
- Papanikolaou, V. K., 2012. Analysis of Arbitrary Composite Sections in Biaxial Bending and Axial Load. *Computers and Structures*, vol. 98-99, pp. 33-54.
- Rodrigues, R. V., 2015. A New Technique for Ultimate Limit State Design of Arbitrary Shape RC Sections under Biaxial Bending. *Engineering Structures*, vol. 104, pp. 1-17.
- Vinciprova, F., & Oliveto, A., 2013. Ultimate Strength Domain of Reinforced Concrete Sections under Biaxial Bending and Axial Load. *ACI Structural Journal*, vol. 110, n. 1, pp. 3-13.