



ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UMA MEMBRANA HIPERELÁSTICA ESFÉRICA

Pedro Felipe Tavares do Amaral

Renata Machado Soares

Frederico Martins Alves da Silva

pftamaral@gmail.com

msrenata@gmail.com

silvafma@ufg.br

Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, UFG

Av. Universitária, 1488, Setor Universitário, 74605-200, Goiânia, GO, Brazil

Abstract. Neste trabalho são apresentados estudos dos comportamentos estático e dinâmico de uma membrana esférica. Tal membrana é composta por um material hiperelástico, incompressível, homogêneo e isotrópico definido por dois modelos constitutivos distintos: Mooney-Rivlin e Neo-Hookeano. As equações de equilíbrio são obtidas a partir da teoria de grandes deformações ao considerar a membrana submetida a uma pressão interna uniformemente distribuída. A partir da análise estática encontram-se as tensões e deformações da membrana e da análise dinâmica obtêm-se as relações frequência-amplitude, a análise de estabilidade linear e a resposta no tempo. Mostra-se que para um mesmo material, os dois modelos hiperelásticos podem apresentar respostas dinâmicas consideravelmente diferentes.

Keywords: Membrana esférica, Material hiperelástico, Tensões, Frequência natural.

1 INTRODUÇÃO

As membranas são superfícies delgadas, sem rigidez à compressão e flexão. Como forma estrutural, as membranas fornecem uma boa relação entre peso total e capacidade resistente, sendo ideais em vários tipos de aplicações. Além dos usos civil e arquitetônico, as membranas também têm importância em equipamentos e estruturas espaciais e no campo da biomecânica. Tais membranas podem ser compreendidas através do estudo dos comportamentos linear e não-linear, estático e dinâmico. Uma das primeiras descrições das não-linearidades geométricas e físicas, levando em conta a contribuição de grandes deformações, é o trabalho de Green e Adkins (1960), que forma a base da elasticidade não-linear.

O trabalho de Tielking e Feng (1974) é um dos primeiros a fazer a abordagem em funcionais de energia para grandes deformações em membranas. Desenvolve-se uma descrição de geometria axissimétrica, que é depois particularizada para abordar os casos de uma geometria circular com inclusão rígida, uma elipsoide e uma esfera. Utiliza-se o modelo de material de Mooney-Rivlin e faz-se a minimização do potencial de energia utilizando o método de Ritz. Através desse trabalho, concluiu-se que os métodos de energia apresentam soluções similares a outros métodos publicados anteriormente.

A descrição dos materiais hiperelásticos pode ser encontrada no trabalho de Selvadurai (2006), onde o autor analisa as deflexões de uma membrana circular de borracha natural, submetida a deslocamentos controlados por um indentador rígido. Nesse trabalho, os modelos hiperelásticos da literatura são desenvolvidos computacionalmente e seus resultados são comparados com os resultados experimentais. Em outro trabalho, Hoss (2009) faz um estudo de modelos constitutivos de elastômeros incompressíveis e calibra os parâmetros em relação a resultados obtidos em laboratório. O autor também sugere novos meios de avaliação de conformidade do modelo à curva experimental.

Pesquisas sobre equilíbrio e estabilidade não-linear das membranas esféricas de Mooney-Rivlin são desenvolvidas por diversos autores. Alexander (1971) apresenta um estudo de instabilidade de balões hiperelásticos esféricos e propõe uma analogia ao efeito de snap-through. Nesse trabalho faz-se a verificação experimental com balões de Neoprene e confirmam-se efeitos de bifurcação não esférica. Akkas (1978) estuda uma membrana sujeita a diferentes estágios de carregamento, por acréscimo de pressão interna. O trabalho apresenta uma análise paramétrica, para a qual se traçaram os caminhos de equilíbrio de inflação estática e dinâmica. Consequentemente, foi possível prever a existência do fenômeno de snap-out, que ocorre em inflações dinâmicas. Xin-Chun (1991) apresenta em seu trabalho análises paramétricas quanto ao carregamento e às propriedades dos materiais e sua influência no equilíbrio e instabilidade do sistema. Os resultados obtidos mostram a dependência paramétrica dos caminhos de equilíbrio e dos pontos de instabilidade.

Ainda dentro dos estudos sobre membranas esféricas de Mooney-Rivlin, Verron *et al.* (1999) estudam os efeitos de uma inflação dinâmica. Utiliza-se uma formulação de energia, da qual é possível obter as equações de equilíbrio dinâmico. Faz-se uma análise linear de estabilidade e confecção dos planos-fase do sistema. Insere-se um acréscimo de pressão periódico, para o qual são traçadas novas trajetórias de equilíbrio, identificando diferentes pontos de instabilidade durante a inflação dinâmica. Observa-se também que a frequência e a amplitude de vibrações de uma membrana esférica de Mooney-Rivlin dependem fortemente do histórico de pressão interna. Já Eriksson e Nordmark (2012) estudam a instabilidade de um

balão esférico e um cilindro com carregamento de pressão uniforme interna. Aplica-se uma variação paramétrica ao material, cujos resultados analíticos de instabilidade foram comparados com os de simulação numérica, onde utilizaram-se elementos triangulares de interpolação linear, mostrando a importância da correta calibração do modelo do gás introduzido no interior da membrana e do modelo do material.

O estado inicial de tensões e deformações da membrana também é um fator que determina as respostas estática e dinâmica. Gonçalves, Soares e Pamplona (2009), estudam a resposta de vibração não-linear de uma membrana circular sujeita a um estado de pré-tração e recebendo uma pressão lateral com variabilidade temporal. O modelo de material utilizado é o Neo-Hookeano. O campo de deformações não-linear é aproximado pelo método de Galerkin. Mostra-se que há conformidade entre os resultados assim obtidos e os resultados da formulação de elementos finitos. Observa-se que há grande influência da tensão inicial aplicada quanto à resposta de vibração e que diferentes leis constitutivas para o material hiperelástico levam à mesma relação de frequência-amplitude. Estudos semelhantes com diferentes geometrias são encontrados em Soares (2009), Soares e Gonçalves (2012, 2014) e Silva (2015).

Neste trabalho apresenta-se um estudo dos comportamentos mecânico estático e dinâmico de uma membrana de geometria esférica submetida a uma pressão radial uniformemente distribuída em sua superfície interna, de modo a estabelecer a influência do estado inicial de pressão e dos parâmetros do modelo constitutivo. A membrana será composta por material elastomérico de característica hiperelástica, modelada como um material dos tipos de Mooney-Rivlin e Neo-Hookeano, incompressível, homogêneo e isotrópico. Obtêm-se as equações de equilíbrio estático e dinâmico por meio da variação do Lagrangeano. A seguir, as tensões principais, as deformações e as frequências naturais e respostas no tempo são obtidas.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para a formulação matemática da membrana de geometria esférica parte-se das relações geométricas entre as configurações deformada e indeformada da membrana para a descrição dos funcionais de energia e posterior aplicação do Princípio de Hamilton.

2.1 Relações geométricas para a membrana esférica

Seja uma membrana esférica indeformada de raio a e espessura h . Definem-se, primeiramente, coordenadas esféricas, nas quais (r, s, θ) são referentes ao estado indeformado e (x, y, θ) representam o estado deformado da membrana, como pode ser observado na Fig. 1.

Considerando uma deformação axissimétrica da membrana, não há alteração na coordenada angular θ e assume-se que o plano r - s é coincidente ao plano x - y . Desse modo, as coordenadas (x, y) podem ser expressas como uma função dependente da variável r .

$$x = x(r) \tag{1}$$

$$y = y(r) \tag{2}$$

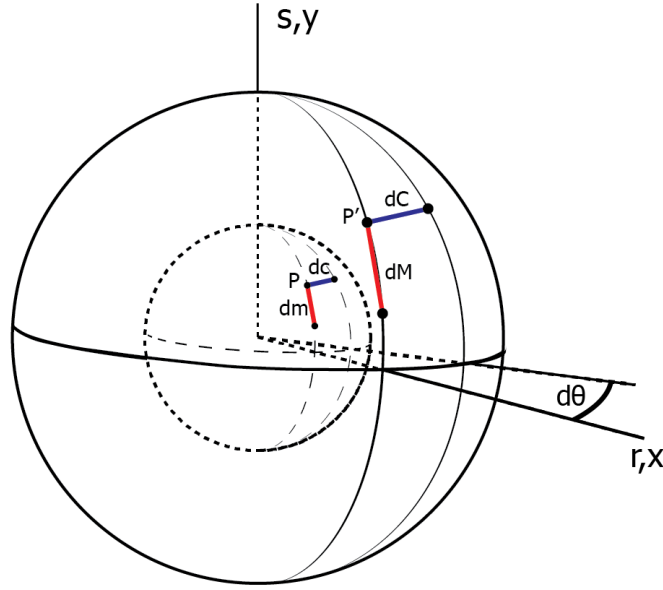


Figura 1. Representação do sistema de coordenadas e dos elementos infinitesimais.

O ponto $P(r, s, \theta)$, localizado na superfície indeformada, sofre um deslocamento até a configuração $P'(x, y, \theta)$. Os elementos infinitesimais meridionais (dm, dM) e circunferenciais (dc, dC), adjacentes a P têm seus comprimentos dados em função das coordenadas r, s e θ . A partir da relação entre esses elementos, definem-se as razões de extensão principais λ_1 e λ_2 .

$$\lambda_1 = \frac{dM}{dm} = \left[\frac{(x_{,r})^2 + (y_{,r})^2}{1 + (s_{,r})^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$\lambda_2 = \frac{dC}{dc} = \frac{x}{r} \quad (4)$$

onde $(\)_{,r} = \frac{d(\)}{dr}$.

Os invariantes de deformação I_1, I_2 e I_3 são descritos em função das extensões principais como apresentados nas seguintes equações:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (5)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (6)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (7)$$

A terceira extensão principal é descrita pela razão entre a espessura da membrana deformada, H , e a espessura indeformada, h . Uma vez que o material é considerado incompressível, o terceiro invariante é unitário, de modo que a extensão principal λ_3 também possa ser descrita como função de λ_1 e λ_2 , conforme a Eq. (8).

$$\lambda_3 = \frac{H}{h} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (8)$$

Define-se, então, a função de densidade de energia do material de Mooney-Rivlin, na Eq. (9) onde C_1 e α são parâmetros do material. O material Neo-Hookeano é descrito quando o parâmetro α é nulo.

$$W = C_1[(I_1 - 3) + \alpha(I_2 - 3)] \quad (9)$$

As tensões desenvolvidas na membrana são dadas pela diferenciação da função de densidade de energia em relação às extensões meridional e circunferencial:

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (10)$$

Na Fig. 2 apresentam-se o raio da membrana indeformada (a), o raio da membrana deformada (A) e o ângulo meridional (ϕ). As coordenadas da membrana indeformada (r, s) e deformada (x, y), são descritas em função de ϕ e do tempo (t), que será considerado na análise dinâmica. Dessa forma têm-se:

$$r = a \cos \phi \quad (11)$$

$$s = a \sin \phi \quad (12)$$

$$x = x(\phi, t) \quad (13)$$

$$y = y(\phi, t) \quad (14)$$

Substituindo-se as Eqs. (11) a (14) nas razões de extensão principal apresentadas nas Eqs. (3), (4) e (8), obtêm-se as seguintes expressões para as extensões principais:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{(x_{,\phi})^2 + (y_{,\phi})^2}}{a} \quad (15)$$

$$\lambda_2 = \frac{x}{a \cos \phi} \quad (16)$$

$$\lambda_3 = \frac{a^2 \cos \phi}{x \sqrt{(x_{,\phi})^2 + (y_{,\phi})^2}} \quad (17)$$

$$\text{onde } ()_{,\phi} = \frac{d()}{d\phi}; ()_{,\phi\phi} = \frac{d^2()}{d\phi^2}.$$

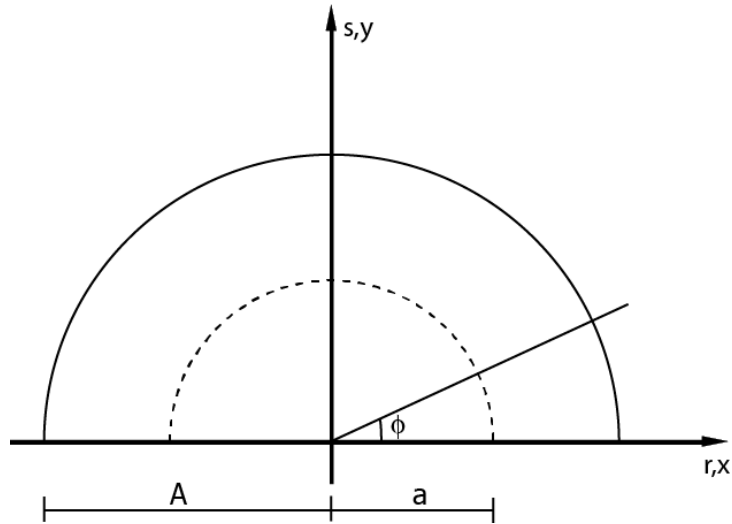


Figura 2. Vista lateral das configurações indeformada e deformada da membrana.

2.2 Funcionais de energia

Escreve-se o funcional de energia do sistema, incluindo os termos de energia elástica de deformação (U), trabalho das forças externas (W_k) e do termo de energia cinética (T).

A energia elástica de deformação é dada pela integração da função de densidade de energia de deformação (W) na totalidade do volume indeformado da membrana:

$$U = \int_V W \cos(\phi) dV \quad (18)$$

O volume infinitesimal para integração é dado por:

$$dv = 2\pi h a \cos \phi d\phi \quad (19)$$

Segundo Tielking e Feng (1974), Kumar e DasGupta (2013) e Soares (2009), o trabalho realizado pelas forças externas é definido pela variação do volume envolto pela membrana:

$$W_k = p \int_V dV \quad (20)$$

Para a geometria esférica submetida à uma extensão radial axissimétrica tem-se o seguinte trabalho da pressão (p):

$$W_k = p\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 y_{,\phi} d\phi \quad (21)$$

A carga p é composta por uma parcela estática, p_{est} , e uma parcela dinâmica, onde β é a razão entre o módulo da carga estática e a dinâmica. Define-se a razão Ω em que ω_f é a frequência de excitação da carga dinâmica e ω_o é a frequência natural.

$$p = p_{est} + \beta p_{est} \cos(\Omega t) \quad (22)$$

$$\Omega = \frac{\omega_f}{\omega_o} \quad (23)$$

A energia cinética é definida por:

$$T = ha^2 \gamma \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos \phi (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)] d\phi \quad (24)$$

onde $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$; $(\ddot{}) = \frac{d^2}{dt^2}$ e γ é a densidade do material.

Por fim, define-se a função de Lagrange:

$$L = T - U + W_k \quad (25)$$

2.3 Equações para a análise estática não linear

Na análise estática, a função de Lagrange L reduz-se à energia total de deformação, II e utiliza-se o princípio de Hamilton para minimização do funcional de energia, obtendo as equações de equilíbrio. Definem-se as soluções do deslocamento x e y , como funções trigonométricas.

$$x = A \cos \phi \quad (26)$$

$$y = A \sin \phi \quad (27)$$

Estas respostas trigonométricas, utilizadas nas equações de equilíbrio, geram uma única equação em ambas as direções x e y , tornando o problema descrito em função da coordenada radial:

$$4hC_1(A_1^8\alpha - A_1^2a^6\alpha + A_1^6a^2 - a^8) - pA_1^7a^2 = 0 \quad (28)$$

Define-se a razão entre os raios deformado e indeformado:

$$\delta = \frac{A}{a} \quad (29)$$

Substituindo a Eq. (29) na Eq. (28), obtém-se a expressão para a pressão interna da membrana em função da razão de extensão radial (δ):

$$p = 4hC_1 \frac{\alpha(\delta^8 - \delta^2) + \delta^6 - 1}{\delta^7 a} \quad (30)$$

As tensões desenvolvidas nas direções meridional e circunferencial são iguais, e obtidas através da Eq. (10):

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2C_1 \frac{\alpha(\delta^8 - \delta^2) + \delta^6 - 1}{\delta^4} \quad (31)$$

2.4 Equações para a análise dinâmica não-linear

Para a análise dinâmica, estabelece-se que o raio deformado (A) depende do tempo, sendo composto pela soma do raio da deformação estática (A_1) e o raio da perturbação dinâmica em torno da posição de equilíbrio (A_2):

$$A = A_1 + A_2(t) \quad (32)$$

Com a definição do raio da esfera na Eq. (32), aplica-se o princípio de Hamilton à função de Lagrange, Eq. (25), fazendo sua minimização, gerando a equação não-linear dinâmica, Eq. (33). Inclui-se na equação a parcela dissipativa, em que ζ é o coeficiente de amortecimento e ω é a frequência natural de vibração.

$$\begin{aligned} \gamma h a \ddot{A}_2 + \frac{4C_1 h}{a} \left[\frac{1}{(A_1 + A_2(t))^5} - (A_1 + A_2(t)) \right] [1 + \alpha(A_1 + A_2(t))^2] \\ + p(A_1 + A_2(t)) = 2\zeta \omega \gamma h \dot{A}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

Para a análise linear de estabilidade, considera-se a carga p como estática e desconsidera-se o amortecimento do sistema. A parcela dinâmica do raio deformado, A_2 , é reescrita em função da frequência de vibração, ω , e do tempo, conforme Eq. (34). Com a substituição da Eq. (34) na Eq. (33) e a linearização para os termos de primeira ordem de A_2 , obtém-se a Eq. (35), que relaciona a frequência de vibração do sistema e o nível de carga p .

$$A_2(t) = A_2 \cos(\omega t) \quad (34)$$

$$-A_1^4 a^4 \omega^2 h \gamma + 32A_1^6 C_1 \alpha h - 8C_1 - 7A_1^5 a^2 p + 24A_1^4 C_1 a^2 h = 0 \quad (35)$$

As relações de frequência-amplitude são obtidas através da utilização do método de Galerkin-Urabe, Eq. (36), onde Θ é a equação não-linear dinâmica, Eq. (33). A equação resultante permite determinar a razão entre a frequência de vibração, ω , e a frequência natural, ω_o para uma determinada amplitude de perturbação, A_2 .

$$\frac{2\pi}{\omega} \int_0^\omega \Theta(t) \cos(\omega t) dt = 0 \quad (36)$$

Para a obtenção das respostas no tempo e planos-fase, utiliza-se a adimensionalização da variável de tempo (Eq. 37), que resulta na equação adimensional no tempo, Eq. (38).

$$\tau = \omega_o t \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \gamma h a A_{2,\tau\tau} + \frac{4C_1 h}{a} \left[\frac{1}{(A_1 + A_2(\tau))^5} - (A_1 + A_2(\tau)) \right] [1 + \alpha(A_1 + A_2(\tau))^2] \\ + p(A_1 + A_2(\tau)) = 2\zeta \omega^2 \gamma h A_{2,\tau} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{onde } ()_{,\tau} = \frac{d}{d\tau}; ()_{,\tau\tau} = \frac{d^2}{d\tau^2}.$$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Apresentam-se os resultados dos comportamentos não-lineares estático e dinâmico da membrana esférica hiperelástica. Faz-se uma comparação entre os modelos Neo-Hookeano (*NH*) e de Mooney-Rivlin (*MR*) para um mesmo material. Em sequência, apresentam-se os resultados da análise da estabilidade estática não-linear, relação frequência-amplitude e os comportamentos não-lineares da vibração livre e da vibração forçada.

Para a obtenção dos resultados, considerou-se uma membrana indeformada de raio $a = 1\text{m}$, espessura $h = 0,001\text{m}$, densidade $\gamma = 1200\text{ kg/m}^3$. A Tabela 1 mostra os parâmetros do modelo hiperelástico, que são baseados na calibragem experimental para um material elastomérico, realizada no trabalho de Selvadurai (2006).

Tabela 1. Coeficientes dos modelos hiperelásticos.

Modelo	C_1 (MPa)	α
Neo-Hookeano	0,17	0
Mooney-Rivlin	0,1361	0,0592

3.1 Análise estática não-linear

Primeiramente, apresentam-se os resultados da análise estática não-linear da membrana esférica. Na Fig.3 mostra-se a relação do incremento de pressão interna, ΔP , e a extensão radial δ para os modelos Neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin, utilizando a Eq. (30). Os dois modelos apresentam-se semelhantes nos estágios iniciais de extensão, diferenciando-se consideravelmente a partir dos valores máximos de pressão, que ocorre em $\delta = 1,383$ para *NH* e em $\delta = 1,433$ para o modelo *MR*. Na faixa de extensões em que $\delta > 2$, observa-se que o modelo *MR* apresenta menores pressões internas do que o modelo *NH*.

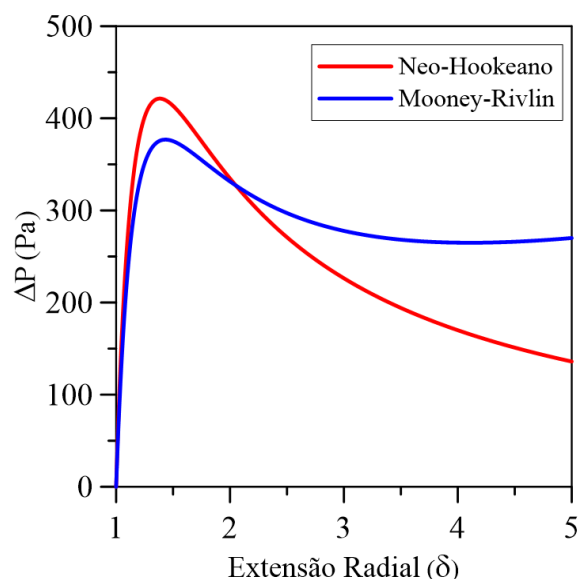


Figura 3. Incremento de pressão interna (ΔP) em função da extensão radial (δ).

Na Fig. 4, mostra-se a variação da tensão (σ) para valores crescentes da extensão radial, a partir da Eq. (31). Inicialmente, ambos modelos apresentam certa linearidade e comportamento semelhante. Com o aumento da extensão radial, observa-se que o modelo *MR* apresenta não-linearidade mais acentuada e maiores valores de tensão do que o modelo *NH*.

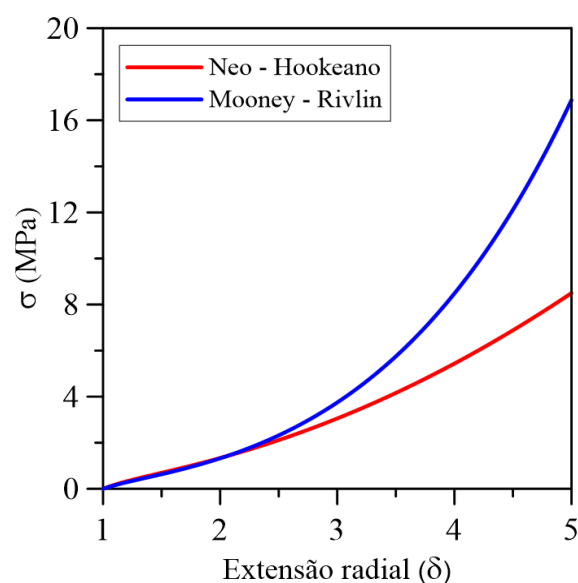


Figura 4. Tensão principal da membrana (σ) em função da extensão radial (δ).

A análise da estabilidade estática não-linear é feita através da equação dinâmica linearizada, Eq. (35). Na Fig. 5(a), mostra-se a relação entre o quadrado da frequência de vibração (ω^2) e a extensão radial. O modelo *NH* se torna instável em $\delta = 1,383$, ponto de máximo apresentado na Fig. 3, e não apresenta, posteriormente, ganho de estabilidade, pois o valor da frequência do sistema (ω) permanece imaginário. Já o modelo *MR* se torna instável em $\delta = 1,433$, ponto de máximo apresentado na Fig. 3, porém volta a ser estável a partir de

$\delta = 4,104$, ponto de mínimo apresentado na Fig. 3. Na Fig. 5(b) mostra-se a relação entre o quadrado da frequência e a pressão interna aplicada. Vê-se que há apenas um ponto de intersecção com o eixo nulo para o modelo *NH*, e dois pontos de intersecção para o modelo *MR*, confirmando o comportamento descrito na Fig. 5(a). Estes resultados apresentam conformidade com os de Xin-Chun (1991) e Verron *et al.* (1999).

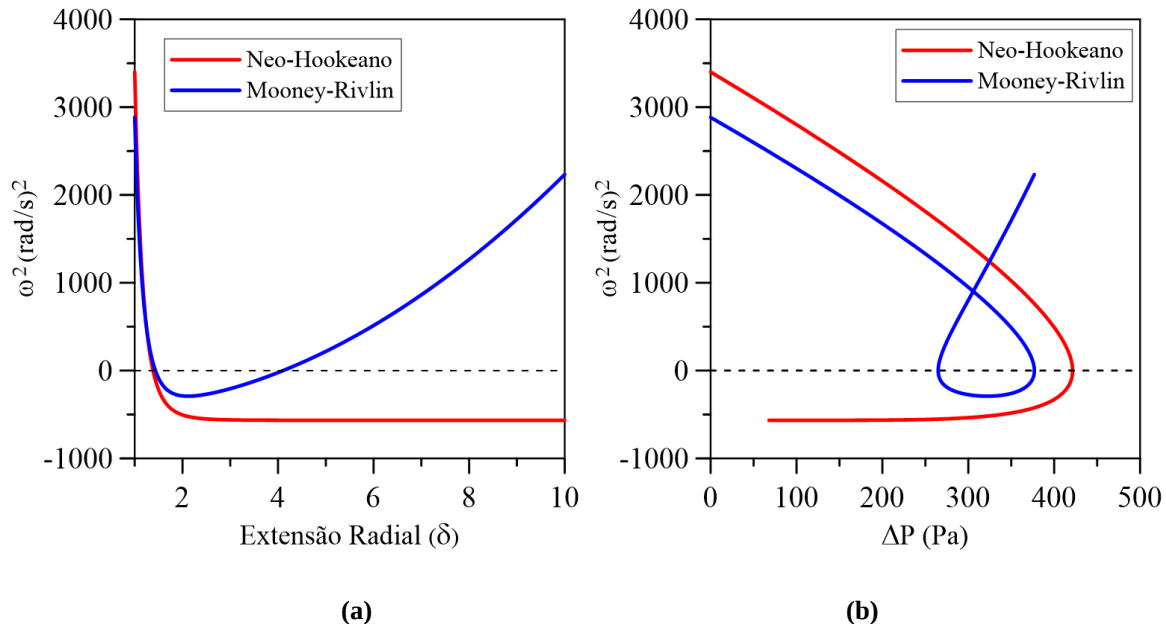


Figura 5. (a) Quadrado da frequência natural em função da extensão radial. (b) Quadrado da frequência natural em função da pressão interna.

3.2 Análise dinâmica não-linear

Inicialmente, são produzidas as relações frequência amplitude para os modelos *NH* e *MR*. Utiliza-se o método de Galerkin-Urabe, Eq. (36), integrando a equação dinâmica não-linear, Eq. (33), ao longo de um ciclo temporal. Na Fig. 6, mostra-se a relação da razão das frequências de vibração não-lineares, normalizadas em relação a frequência linear de vibração, e as amplitudes da perturbação aplicada ao raio tracionado estaticamente. Na Fig. 6(a) determinam-se três níveis de extensão radial para o modelo *NH*. Observa-se que há não-linearidade na resposta do modelo, a qual é mais acentuada para a curva $\delta = 1,37$, que é o carregamento mais próximo ao ponto de instabilidade. Na Fig. 6(b) são determinados quatro níveis de extensão radial para o modelo *MR*. Observa-se que o comportamento é não-linear para os níveis anteriores ao ponto de instabilidade, sendo mais acentuada em $\delta = 1,42$. Constata-se que o nível $\delta = 4,5$, após o ganho de estabilidade, a relação frequência-amplitude se apresenta com menor não linearidade quando comparada as demais.

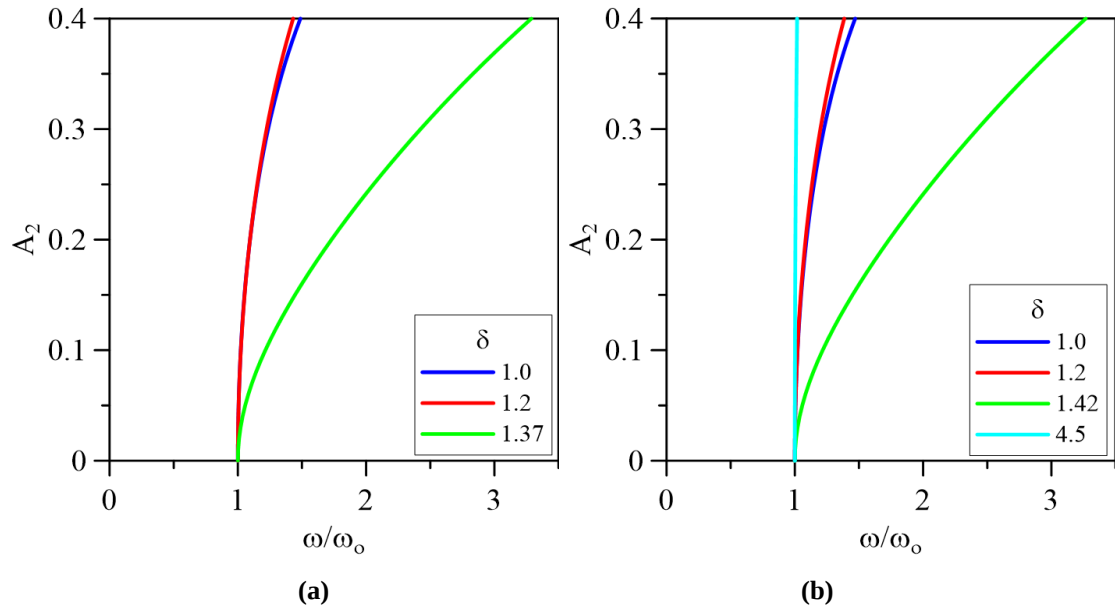


Figura 6. Relações frequência normalizada-amplitude para diversos níveis de extensão radial. (a) Neo-Hookeano. (b) Mooney-Rivlin.

A partir da solução da Eq. (33) e empregando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, é possível traçar os planos-fase da vibração livre não-linear de ambos modelos hiperelásticos. Observa-se na Fig. 7 algumas das possíveis órbitas para o nível de extensão radial $\delta = 1,15$. No modelo *NH*, Fig. 7(a), há órbitas fechadas em torno do primeiro ponto de equilíbrio (centro em torno de $A_2 \approx 0$) e outras órbitas que divergem nas proximidades do segundo ponto de equilíbrio (sela em $A_2 = 0,84$ – coincidente com a trajetória de equilíbrio da Fig. 3). No modelo *MR*, Fig. 7(b), há dois centros ($A_2 \approx 0$; $A_2 = 5,16$) e um ponto de sela ($A_2 = 1,51$). É possível encontrar órbitas em torno de cada um dos centros ou em torno dos três pontos de equilíbrio simultaneamente. Tais resultados apresentam similaridade com os encontrados em Verron *et al.* (1999).

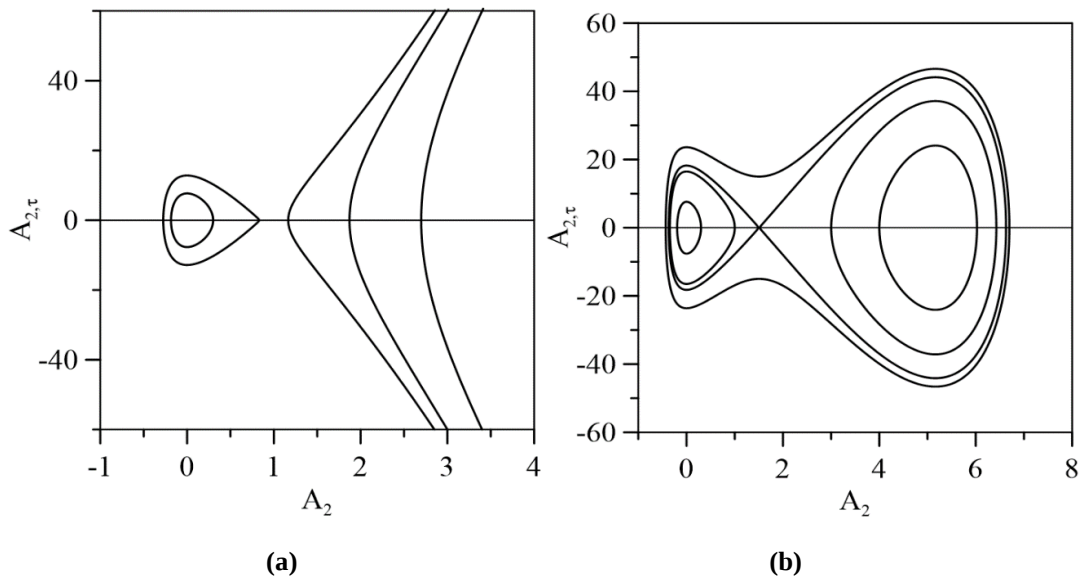


Figura 7. Planos-fase da membrana para $\delta = 1,15$. (a) Neo-Hookeano. (b) Mooney-Rivlin.

Para a vibração forçada, utilizam-se os parâmetros mostrados na Tabela 2. São desenvolvidas as relações amplitude-tempo da resposta dinâmica não-linear da membrana e os planos-fase. No primeiro exemplo utiliza-se o parâmetro de carga $\beta = 0,02$. Na Fig. 8, mostra-se a possibilidade de escape da solução de *MR*, realizando algumas órbitas em torno dos três pontos de equilíbrio antes de se estabilizar em torno do segundo atrator, $A_2 = 5,16$. As Figs. 9 e 10 mostram os comportamentos dos modelos *NH* e *MR*, utilizando $\beta = 0,10$. Nas Figs. 9(a)-(b), observa-se que o modelo *NH* realiza algumas órbitas em torno do ponto (0,0), porém escapa do vale potencial e não apresenta órbitas fechadas posteriormente. Já no modelo *MR*, Figs. 10(a)-(b), a resposta dinâmica apresenta-se contida no mesmo vale potencial, tendo suas órbitas estáveis.

Tabela 2. Parâmetros para simulação da vibração forçada.

Parâmetro	Valor
Extensão radial inicial (δ_0)	1,15
Frequência de excitação (Ω)	0,9
Coefficiente de amortecimento (ξ)	0,01

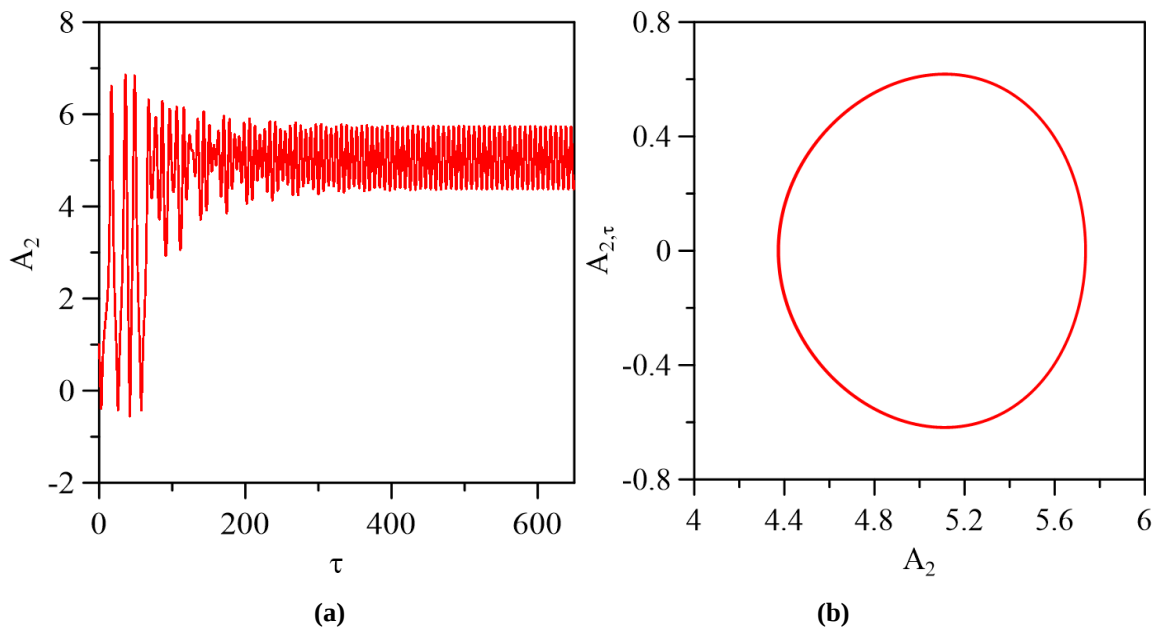


Figura 8. Trajetória no tempo do modelo de Mooney-Rivlin, $\beta = 0,02$. (a) Oscilação da membrana no tempo; (b) Plano-fase da vibração permanente.

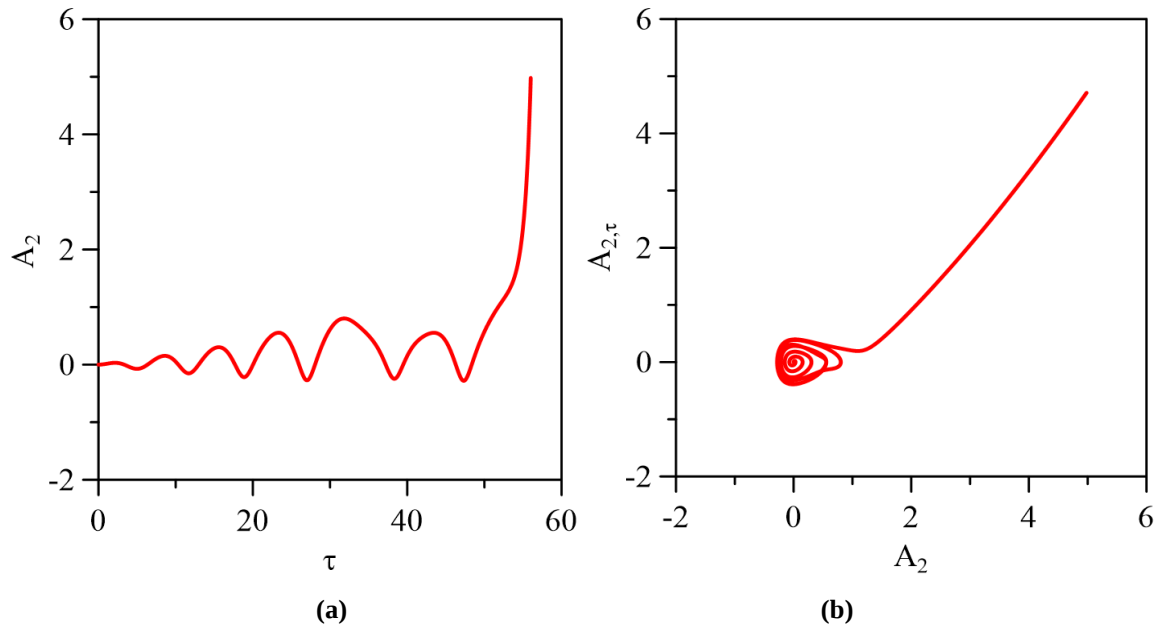


Figura 9. Trajetória no tempo para modelo Neo-Hookeano, $\beta = 0,10$. (a) Oscilação da membrana no tempo; (b) Plano-fase com trajetória de escape.

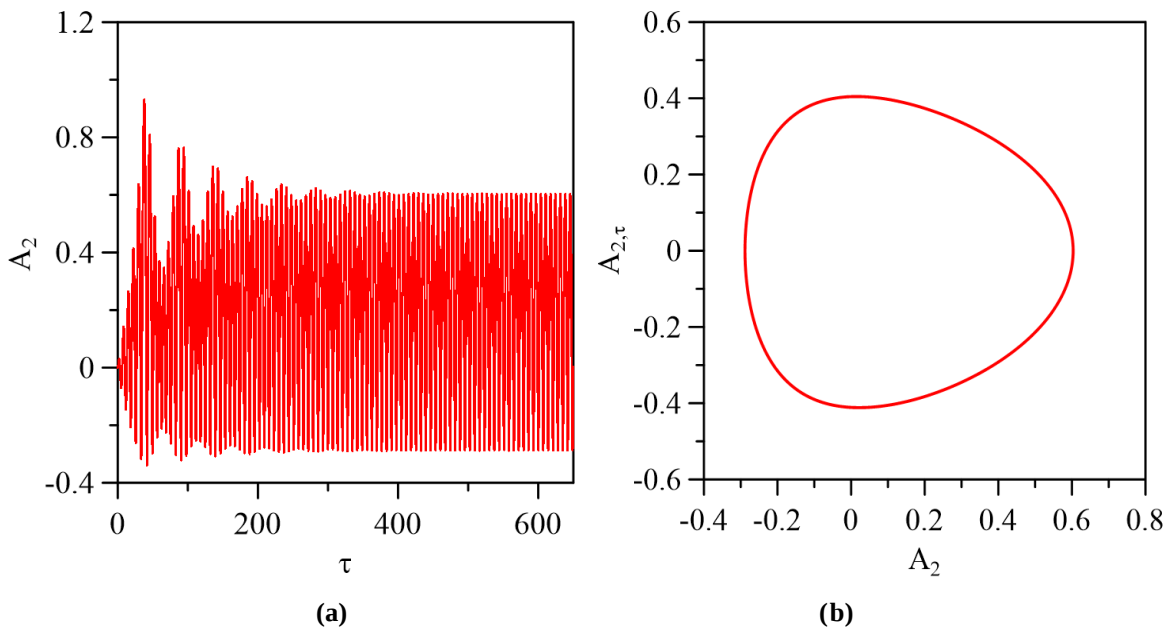


Figura 10. Trajetória no tempo para Mooney-Rivlin $\beta = 0,10$. (a) Oscilação da membrana no tempo; (b) Plano-fase no regime permanente.

4 CONCLUSÕES

Realizaram-se diferentes análises para investigar o comportamento de uma membrana esférica hiperelástica segundo dois modelos constitutivos: Neo-Hookeano e Mooney-Rivlin. Percebe-se que para os estágios iniciais de extensão, o comportamento estático destes modelos

é semelhante. Isso pode ser visto nas relações de pressão interna em função radial (Fig. 3) e nas tensões internas (Fig. 4).

Diferenças mais acentuadas são vistas no comportamento dinâmico e nos fenômenos de instabilidade. Vê-se que o modelo Neo-Hookeano se torna permanentemente instável após sua extensão radial crítica, enquanto o modelo de Mooney-Rivlin apresenta uma resposta estável após o fenômeno de snap-through, conforme sugerido por Alexander (1971).

Os planos-fase, com suas respectivas bacias de atração, mostram que há apenas um atrator para o modelo Neo-hookeano, e dois atratores para o modelo de Mooney-Rivlin, o qual possui três tipos de órbitas diferentes, conforme encontrado em Verron *et al.* (1999).

A simulação do comportamento dinâmico em que há amortecimento e excitação periódica mostra que os dois modelos sujeitos às mesmas condições possuem respostas diferentes. Para o primeiro exemplo, com o fator $\beta = 0,02$, que o modelo de Mooney-Rivlin pode saltar do primeiro vale potencial e realizar órbitas em torno dos três pontos de equilíbrio e sua estabilização em torno do segundo atrator. No segundo exemplo, vê-se que o modelo Neo-Hookeano realizou algumas órbitas em torno de seu atrator e se tornou instável, escapando de seu vale potencial. No entanto, o modelo de Mooney-Rivlin se estabilizou em torno do seu primeiro ponto de equilíbrio.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos às instituições que possibilitaram a realização desta pesquisa: ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKKAS, N. On the Dynamic Snap-out Instability of Inflated Non-Linear Spherical Membranes. *International Journal of Non-linear Mechanics*. Netherlands, v 13, 177 – 183, 1978.
- ALEXANDER, H. Tensile Instability of Initially Spherical Balloons. *International Journal of Engineering Science*. Netherlands, v 9, 151 – 162, 1971.
- BATRA, R.C. Instabilities in Biaxially Loaded Rectangular Membranes and Spherical Balloons Made of Compressible Isotropic Hyperelastic Balloons. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. Netherlands, v 57, 130 – 139, 2003.
- ERIKSSON A.; NORDMARK A. Instability of hyper-elastic balloon-shaped space membranes under pressure loads. *Computer Methods and Applied Engineering*. Netherlands, v 237-240, 118 – 129, 2012.
- GONÇALVES, P.B.; SOARES R.M; PAMPLONA, D. Nonlinear Vibrations of a radially stretched circular hyperelastic membrane. *Journal of Sound and Vibration*. Netherlands, 2009.
- GREEN, A. E.; ADKINS, J. E. *Large Elastic Deformation*, Oxford University Press, London, 1960.
- HOSS, L. *Modelos Constitutivos Hiperelásticos para Elastômeros Incompressíveis: ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo*. 2009. 290 f. Tese (Mestrado em

Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009.

SELVADURAI, A.P.S. Deflections of a rubber membrane. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. Netherlands, v 54, 1093 – 1119, 2006.

SILVA, R. S. *Estudo do comportamento dinâmico de membranas retangulares hiperelásticas*. 2015. 92 f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2015.

SOARES, R.M. *Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas*. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2009.

SOARES, R.M; GONÇALVES, P.B. Nonlinear vibrations and instabilities of a stretched hyperelastic annular membrane. *International Journal of Solids and Structures*. Netherlands, v 49, 514 – 526, 2012.

SOARES, R.M; GONÇALVES, P.B. Large amplitude nonlinear vibrations of a Mooney-Rivlin rectangular membrane. *Journal of Sound and Vibration*. Netherlands, v 333, 2920 – 2935, 2014.

TIELKING, J.T; FENG, W.W. The Application of the Minimum Potential Energy Principle to Nonlinear Axisymmetric Membrane Problems. *Journal of Applied Mechanics*. United States, v 41, 491-496, 1974.

VERRON, E; R.A. KHAYAT; A. DERDOURI; B. PESEUX. Dynamic Inflation of Hyperelastic Spherical Membranes. *Journal of Rheology*. United States, v 43, 1083 – 1097, 1999.

XIN-CHUN, S. Tensile Instability of Nonlinear Spherical Membrane with Large Deformation. *Applied Mathematics and Mechanics*. China, v 12, 993-1000, 1991.