



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL E MÉTODO DE PARTÍCULAS COMBINADOS PARA ANÁLISE BIDIMENSIONAL DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Giovane Avancini

Jeferson W. D. Fernandes

Rodolfo A. K. Sanches

giavancini@usp.br

jefersondossa@usp.br

rodolfo.sanches@usp.br

EESC/USP - Departamento de Engenharia de Estruturas

Av. Trabalhador São-carlense 400, 13566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil

Resumo. Os métodos de partículas se caracterizam por representar um problema por meio de um conjunto de partículas, cujas forças de interação são calculadas durante a análise. Neste trabalho é proposta uma formulação para análises de escoamentos incompressíveis onde partículas de massa constante são distribuídas por todo domínio, e uma malha de elementos finitos é criada para cada passo de tempo com o intuito de calcular as forças de interação. Assim, as equações de Navier-Stokes são descritas através de um referencial Lagrangeano e são solucionadas por meio de elementos finitos cujos parâmetros nodais são as posições atuais de cada partícula. Esta abordagem difere-se da técnica tradicional pois não utiliza os deslocamentos ou velocidades como variáveis principais, mas sim as posições das partículas e a pressão, essa última atuando como multiplicador de Lagrange impondo a condição de incompressibilidade. A forma variacional das equações é obtida aplicando-se o princípio da energia potencial total estacionária. Utiliza-se elementos triangulares com aproximação linear para ambos os campos de velocidade e pressão e a integração temporal é realizada por meio do método de Newmark. Devido à descrição Lagrangeana adotada, os termos de convecção desaparecem, dispensando-se o uso de métodos para estabilizar o campo de velocidades. Entretanto, o elemento adotado não satisfaz a condição de Babuska-Brezzi e portanto um termo estabilizante baseado no Laplaciano da pressão é adicionado à equação da continuidade. Por fim, são apresentados alguns exemplos numéricos para a validação da formulação proposta.

Palavras-chave: Método de Partículas, Método dos Elementos Finitos Posicional, Dinâmica dos Fluidos Computacional, Escoamentos Incompressíveis.

1 INTRODUÇÃO

As equações de Navier-Stokes, embora estudadas há muito tempo, continuam a desafiar matemáticos e engenheiros. Essas equações são comumente descritas através de um referencial Euleriano, onde as taxas das grandezas que cruzam as fronteiras de um volume de controle fixo no espaço são medidas durante a análise. Expressivos resultados no âmbito da dinâmica dos fluidos computacional (DFC) foram obtidos ao longo das últimas décadas utilizando essa abordagem (Anderson, 1995; Tannehill et al., 1997; Drikakis e Rider, 2005).

Entretanto, para problemas de convecção dominante, a aplicação do método clássico de Galerkin sobre uma descrição Euleriana resulta em matrizes assimétricas e surgem variações espúrias nos campos de velocidades causando problemas de estabilidade, sendo necessária a utilização de métodos estabilizantes (Zienkiewicz et al., 2005; Strang e Fix, 2008; Dick, 2009).

Ainda, algumas dificuldades são encontradas ao analisar problemas cujo domínio e contorno sofrem constantes distorções, como por exemplo alguns escoamentos de superfície livre. Outra desvantagem pode ser observada em problemas de interação fluido-estrutura (IFE), uma vez que o equilíbrio dos sólidos é descrito por meio de um referencial Lagrangeano, tornando necessária a utilização de técnicas de malhas adaptadas, como a descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE) proposta por Donea et al. (1982), ou de malhas não adaptadas, por exemplo o método de contorno imerso (Peskin, 2002).

Uma maneira de contornar tais problemas é descrever o movimento do fluido também em descrição Lagrangeana, possibilitando assim eliminar os termos convectivos, facilitar na identificação do contorno de superfícies livres e permitir o acoplamento direto com as estruturas. Nesse contexto, Gingold e Monaghan (1977) propuseram essa abordagem pela primeira vez através do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), dando origem assim a uma série de métodos conhecidos como *Meshless Methods* - métodos que não necessitam de malhas para a discretização do domínio espacial, onde as funções de forma dependem apenas das posições das partículas do fluido.

Esses métodos de partículas vêm se mostrando muito eficientes para a dinâmica dos fluidos computacional, principalmente no que se refere a problemas que sofrem constantes alterações em seu domínio, como escoamentos com superfície livre, e também problemas de IFE com condições de contorno complexas, como pode ser visto nos trabalhos de Premoze et al. (2003), Monaghan (2005), Liu et al. (2008), Liu e Liu (2010) e Monaghan (2012).

Mais adiante, Idelsohn et al (2003) propuseram um método numérico inovativo, conhecido como *Particle Finite Element Method* (PFEM). Esse método se caracteriza por utilizar uma formulação híbrida Método de Partículas e Método dos Elementos Finitos (MEF), unindo assim as vantagens individuais proporcionadas por cada um. Nessa abordagem, o domínio é representado por meio de um conjunto de partículas com massa fixa, que se movem de acordo com as equações de conservação do momento linear. Para cada passo de tempo, essas partículas são conectadas por uma malha de elementos finitos, cuja função é computar as forças de interação entre partículas vizinhas (Idelsohn et al., 2004; Aubry et al., 2005; Oñate et al., 2009; Oñate et al., 2011; Idelsohn et al., 2011).

A abordagem tradicional do MEF utiliza como incógnitas principais os deslocamentos, quando o material estudado é sólido, ou velocidades, quando o material em análise é fluido, podendo ainda considerar o campo de pressões como variável independente, o que acontece nas

chamadas formulações mistas. Um caso particular ocorre nos escoamentos incompressíveis, onde a pressão é introduzida de maneira implícita devido à equação da continuidade apresentar apenas termos referentes à velocidade, o que pode levar a problemas de estabilidade caso o elemento adotado não satisfaça a condição de Babuska-Brezzi.

Quando essa condição não é satisfeita, é necessário introduzir termos estabilizantes à equação da continuidade para que se obtenha um campo de pressões estável. Atualmente é possível encontrar diversas técnicas com essa finalidade, tais como os modelos apresentados por Courant (1943), Hughes et al. (1989) ou ainda a técnica conhecida como *Finite Calculus* (FIC), que adiciona termos na diagonal nula baseado em incrementos finitos dentro do domínio de um elemento, apresentada por Oñate (1998).

No início do século XXI, motivado pelos trabalhos de Bonet et al. (2000), Coda (2003) introduz, no contexto da mecânica das estruturas, a formulação posicional do MEF, que ao contrário das formulações desenvolvidas anteriormente, utiliza as posições atuais ao invés de deslocamentos e rotações como parâmetros nodais, contemplando naturalmente os efeitos da não linearidade geométrica devido à forma como é realizado o mapeamento das configurações do contínuo. Essa formulação vem se mostrando extremamente eficaz em análises estática e dinâmica de estruturas, como pode ser visto nos trabalhos de Greco e Coda (2006), Coda e Paccola (2009) e Sanches e Coda (2014).

Dessa forma, este trabalho propõe o desenvolvimento, a partir de um funcional de energia, de uma formulação híbrida do método dos elementos finitos posicional e método de partículas para a análise de escoamentos incompressíveis, cujos parâmetros nodais são as posições atuais das partículas de fluido juntamente com a pressão, que atua como um multiplicador de Lagrange impondo a condição de incompressibilidade do material. Esta formulação é a base para o desenvolvimento de um futuro acoplamento monolítico entre o fluido e a estrutura, expandindo a área de aplicação da formulação posicional.

2 CINEMÁTICA

Toma-se uma porção infinitesimal P pertencente a um domínio arbitrário B contendo fluido, tal que $P \in B$, inserido no espaço Euclidiano tridimensional em um dado instante de tempo t , conforme a Fig. 1. No instante inicial $t = 0$, o corpo ocupa sua configuração inicial Ω_0 . Para um instante $t > 0$, esse domínio sofre uma mudança de configuração, passando a ocupar sua configuração atual Ω . A função mudança de configuração, que mapeia os pontos da configuração inicial para a atual, é dada por:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t), \quad (1)$$

em que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{X}$ são, respectivamente, as posições atual e inicial de um ponto P e f é a função responsável por relacionar essas posições.

A velocidade de cada ponto é a taxa de variação de suas posições com o tempo. Assim, aplicando a derivada material na Eq. 1 obtém-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt}, \quad (2)$$

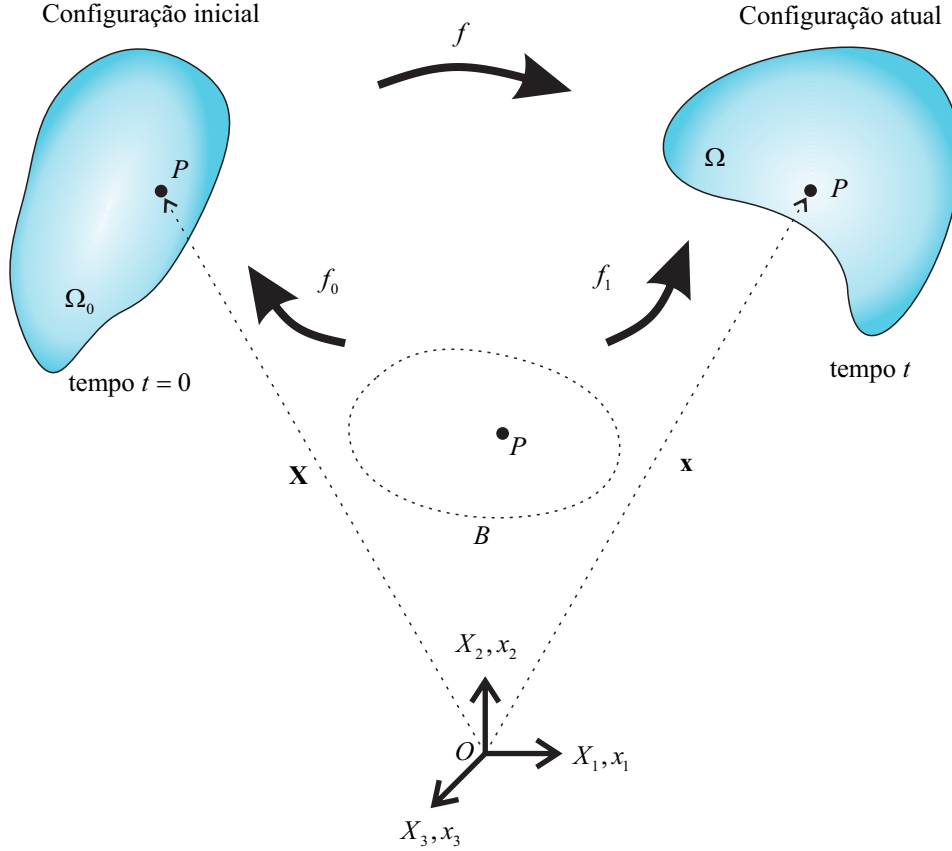


Figura 1: Configurações ocupadas por um domínio de fluido nos instantes inicial e atual

onde $\dot{\mathbf{x}}$ é a velocidade material de um ponto, e o índice $(\cdot)$ representa o operador derivada temporal. Analogamente calcula-se a aceleração como a taxa de variação temporal das velocidades:

$$\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{D^2\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{Dt^2}. \quad (3)$$

Por último, uma grandeza muito importante no estudo da mecânica do contínuo é o gradiente da função mudança de configuração, definido como:

$$\mathbf{F} = \text{Grad}(f(\mathbf{X}, t)) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (4)$$

em que $\text{Grad}(\cdot)$ representa o operador gradiente em relação a configuração inicial.

Essas equações permitirão descrever as grandezas necessárias para o estudo da dinâmica dos fluidos utilizando a configuração inicial como referência, o que é conhecido como descrição Lagrangeano total. Mais adiante serão discutidas as limitações de tomar-se como referência a configuração inicial para materiais fluidos, e como as equações são particularizadas para o caso em que a configuração atual é escolhida como referência, dito Lagrangeano atualizado.

3 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação da conservação da massa, ou como será chamada ao longo deste trabalho, equação da continuidade, pode ser escrita em descrição Lagrangeana como:

$$\rho_0 = \rho J, \quad (5)$$

onde ρ_0 e ρ são a massa específica do fluido nas configurações inicial e atual, e $J = \det \mathbf{F}$.

Para fluidos incompressíveis, a variação da massa específica com o tempo é nula, resultando assim em:

$$J = 1, \quad (6)$$

o que é equivalente à:

$$\text{Tr}(\text{Grad}(\mathbf{V})\mathbf{F}^{-1}) = 0, \quad (7)$$

onde $\text{Tr}()$ representa o operador traço de um tensor de segunda ordem.

4 EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Para um corpo contínuo qualquer, a equação que descreve seu movimento pode ser escrita em descrição Lagrangeana da seguinte forma:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{x}} - \text{Div}(\mathbf{P}) - \mathbf{B} = 0, \quad (8)$$

em que ρ_0 e $\mathbf{B}$ são, respectivamente, a densidade e as forças de domínio no instante inicial e $\mathbf{P}$ o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie, que pode ser relacionado com o tensor de Cauchy por meio da Eq. abaixo:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (9)$$

Por se tratar de um tensor não simétrico, é mais vantajoso trabalhar-se com o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, definido como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{F}^{-T} \quad (10)$$

5 RELAÇÃO CONSTITUTIVA

O tensor de tensões de Cauchy pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I}, \quad (11)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}'$ representa as componentes desviadoras do tensor de Cauchy, p é a pressão hidrostática e $\mathbf{I}$ o tensor identidade.

Considerando um fluido Newtoniano, as tensões desviadoras se relacionam linearmente com as taxas de deformação segundo a equação:

$$\sigma'_{ij} = d_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}, \quad (12)$$

onde d_{ijkl} é o tensor constitutivo de quarta ordem e $\dot{\epsilon}_{kl}$ é o tensor taxa de deformação de engenharia, definido a partir das velocidades como:

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right). \quad (13)$$

O tensor constitutivo na configuração atual pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$d_{ijkl} = \mu (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (14)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido e δ_{ij} o operador Delta de Kronecker.

Sabendo-se que o Tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie está relacionado com o tensor de Cauchy por $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$, substituindo essa expressão na Eq. 11 tem-se:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-T} - J\mathbf{F}^{-1}p\mathbf{I}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}' - pJ\mathbf{C}^{-1}, \quad (15)$$

sendo $\mathbf{C}$ conhecido como alongamento de Cauchy-Green à direita e $\mathbf{S}'$ a parcela desviadora do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Essa parcela relaciona-se com o tensor taxa de deformação de Green, sendo ambos tensores referentes à configuração inicial:

$$\mathbf{S}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\mathbf{E}}_{kl}, \quad (16)$$

em que:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \mathbf{F}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{F}, \quad (17)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (18)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (19)$$

As componentes do tensor constitutivo podem ser obtidas aplicando a transformação de Piola sobre o tensor constitutivo referente à configuração atual, como pode ser encontrado em livros textos que abordam materiais hiperelásticos e funções de energia, por exemplo Holzapfel (2000) e Marsden e Hughes (1994):

$$D_{ijkl} = F_{Ai}^{-1} F_{Bj}^{-1} F_{Ck}^{-1} F_{Dl}^{-1} d_{ABCD}. \quad (20)$$

6 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA APLICADO A FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

No âmbito da dinâmica dos fluidos, o método dos resduos ponderados é amplamente utilizado para obter-se a forma variacional das equações governantes, entretanto, neste trabalho será utilizado o Princípio da energia potencial total estacionária.

O funcional da energia potencial total possui três parcelas:

$$\Pi = \Pi_{int} - \Pi_{ext} + \Pi_{cin}, \quad (21)$$

em que Π_{int} , Π_{ext} e Π_{cin} são, respectivamente, as parcelas referentes à energia interna de deformação, energia potencial das forças externas e energia cinética, calculadas como:

$$\Pi_{int} = \int_{\Omega_0} \Psi dV, \quad (22)$$

$$\Pi_{ext} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS, \quad (23)$$

$$\Pi_{cin} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV. \quad (24)$$

O equilíbrio é obtido quando a primeira variação do funcional é nula, assim:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \delta(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dV + \int_{\Omega_0} \delta\Psi dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x} dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{x} dS = 0. \quad (25)$$

Sabe-se que $\mathbf{S}$ é conjugado energético de $\mathbf{E}$ pois:

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{E}} : \delta\mathbf{E} = \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \quad (26)$$

Substituindo a Eq. 15 na Eq. 26 é possível separar a energia interna de deformação em duas parcelas:

$$\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} = \mathbf{S}' : \delta\mathbf{E} - pJ\mathbf{C}^{-1} : \delta\mathbf{E}, \quad (27)$$

uma devida às tensões viscosas e outra devida à deformação volumétrica, uma vez que:

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E}. \quad (28)$$

Considerando que o funcional depende das posições atuais das partículas de fluido e das pressões, que atuam como multiplicadores de Lagrange impondo a incompressibilidade, tem-se um sistema de duas equações:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} \left(\int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dV + \int_{\Omega_0} \Psi dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS \right) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \left(\int_{\Omega_0} pJ\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E} dV \right) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \left(\int_{\Omega_0} pJ\mathbf{E}_v dV \right) = 0. \quad (30)$$

Nota-se que a Eq. 30, a qual foi obtida como a primeira variação do funcional de energia em relação as pressões, é equivalente à equação da conservação da massa apresentada na seção 3.

7 DISCRETIZAÇÃO POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Os valores das posições atuais e das pressões são interpolados por meio de funções lineares da seguinte maneira:

$$x_l = \sum_{j=1}^n N_j x_l^j \quad ; \quad p = \sum_{j=1}^n N_j p^j, \quad (31)$$

onde x_l e p representam, respectivamente, a coordenada na direção l e a pressão de um ponto genérico x pertencente ao domínio, N_j são funções de aproximação relacionadas ao nó j , x_l^j a posição atual na direção l e p^j a pressão de um nó j .

Substituindo as aproximações descritas pela Eq. 31 nas Eq. 29-30 obtém-se a forma discreta do sistema de equações:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j \ddot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV - \int_{\Omega_0} N_i p_l J \mathbf{C}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot N_i dV + \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot N_i dS = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{p}} = \int_{\Omega_0} N_i J \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E} dV = \int_{\Omega_0} N_i J \mathbf{E}_v dV = 0, \quad (33)$$

que na forma matricial pode ser escrito como:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_v^{int} + \mathbf{f}_p^{int} - \mathbf{f}^{ext} = 0, \quad (34)$$

$$\mathbf{q} = 0, \quad (35)$$

em que $\mathbf{M}$ é a matriz de massa diagonalizada e constante, $\mathbf{f}_v^{int}$ e $\mathbf{f}_p^{int}$ são os vetores de força interna devido respectivamente as tensões viscosas e pressão, $\mathbf{f}^{ext}$ o vetor de forças externas e $\mathbf{q}$ o vetor de continuidade, calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j dV \\ f_i^{int,v} &= \int_{\Omega_0} S'_{lk} \frac{\partial E_{lk}}{\partial x_i} dV \\ f_i^{int,p} &= - \int_{\Omega_0} N_j p_l J C_{lk}^{-1} \frac{\partial E_{lk}}{\partial x_i} dV \\ f_i^{ext} &= - \int_{\Omega_0} B_i N_i dV - \int_{\partial \Omega_0} T_i N_i dS \\ q_i &= \int_{\Omega_0} N_i J C_{lk}^{-1} E_{lk} dV \end{aligned} \quad (36)$$

8 INTEGRAÇÃO TEMPORAL

Neste trabalho, a integração temporal foi realizada por meio do integrador implícito de Newmark, que aproxima as velocidades e acelerações da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} + \mathbf{l}_t, \quad (37)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t}{\beta \Delta t^2} - \mathbf{g}_t, \quad (38)$$

onde Δt é o incremento de tempo, $\mathbf{l}_t$ e $\mathbf{g}_t$ são vetores que contêm contribuições do instante anterior, calculados como:

$$\mathbf{l}_t = \dot{\mathbf{x}}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_t, \quad (39)$$

$$\mathbf{g}_t = \frac{\mathbf{x}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{x}}_t, \quad (40)$$

e β e γ são parâmetros que dependem do comportamento adotado para a aceleração e que interferem na estabilidade do algoritmo. Segundo Franci (2015), o integrador de Newmark torna-se incondicionalmente estável se a condição abaixo for satisfeita:

$$\gamma \geq 2\beta \geq \frac{1}{2}. \quad (41)$$

Portanto, neste trabalho foram adotados como parâmetros de Newmark $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, o que corresponde a um comportamento linear para a aceleração dentro de um passo de tempo.

Substituindo as Eq. 37-38 no sistema de equações 34-35:

$$\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{int,v} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{int,p} - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{ext} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_{t+\Delta t} = 0, \quad (42)$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = 0, \quad (43)$$

9 LINEARIZAÇÃO VIA NEWTON-RAPHSON

Devido a característica não linear das Eq. 42-43, o método iterativo de Newton-Raphson foi adotado para linearizar as equações. Assim, iguala-se as Eq. 42-43 a vetores de resíduos, que devem ser nulos quando as condições de equilíbrio e incompressibilidade forem satisfeitas:

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k, \mathbf{p}_{t+\Delta t}^k) = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{int,v} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{int,p} - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{ext} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_{t+\Delta t} = 0, \quad (44)$$

$$\mathbf{r}_c = (\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k) = \mathbf{q}_{t+\Delta t} = 0. \quad (45)$$

A seguir, expande-se ambas equações em séries de Taylor truncando-as nos termos de ordem superior, dando origem ao seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \mathbf{x}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{r}_m \\ -\mathbf{r}_c \end{Bmatrix}. \quad (46)$$

Uma vez calculados os acréscimos, atualiza-se os valores das posições e das pressões:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{x}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}, \quad (47)$$

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1}. \quad (48)$$

10 ESTABILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Sabe-se que no regime de incompressibilidade, algumas combinações de funções utilizadas para interpolar os valores nodais das posições e das pressões são instáveis e podem levar a resultados incoerentes em termos de pressão (Zienkiewicz e Taylor, 2000; Elman et al., 2005). Isso ocorre, por exemplo, ao utilizar funções de mesma ordem para ambas as variáveis.

Basicamente, há dois modos de solucionar esse problema, usar funções de forma que satisfaçam a condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) ou adicionar termos estabilizantes à equação da continuidade. Neste trabalho optou-se pela segunda opção, uma vez que empregando-se os conceitos de métodos de partículas torna-se indesejável o uso de funções de forma de ordem superior devido a necessidade de refazer a malha a partir de uma nuvem de pontos para cada passo de tempo.

O método estabilizante aqui utilizado foi proposto por Oñate et al. (2010) e consiste em adicionar uma parcela referente ao Laplaciano da pressão à equação da continuidade, impondo que a conservação da massa aconteça para um domínio finito (para detalhes de como esta expressão foi derivada, checar a referência). Assim, a equação modificada passa a ser:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\int_{\Omega_0} p \mathbf{J} \mathbf{E}_v dV \right) - \int_{\Omega_0} \tau \mathbf{J} \nabla^2 p dV + \int_{\partial \Omega_0} \tau \mathbf{J} \mathbf{N} \nabla p dS = 0, \quad (49)$$

onde ∇ e ∇^2 representam, respectivamente, os operadores gradiente e laplaciano, $\mathbf{N}$ é o vetor normal ao contorno inicial e τ um parâmetro estabilizante calculado como:

$$\tau_i = \frac{h_i^2 |\mathbf{r}_m|}{16\mu |\nabla p|} \quad (50)$$

em que h_i é o comprimento do elemento na direção i e $\mathbf{r}_m$ é o resíduo da equação da conservação do momento linear.

11 GERAÇÃO DE UMA NOVA MALHA

Devido a característica que os fluidos possuem de não resistirem a tensões desviadoras e de deformarem-se indefinidamente, grande parte dos problemas necessitam de uma constante atualização da malha para que não ocorra inversão de elementos. Embora a utilização de um referencial Lagrangeano possa trazer vantagens ao eliminar os termos convectivos e possibilitar a solução de exemplos onde o domínio ou contorno sofrem grandes distorções, a dificuldade é transferida para a utilização de técnicas efetivas de identificação do contorno e geração de malha.

Uma vez que este trabalho apresenta uma formulação nova para a solução de problemas de dinâmica dos fluidos, ainda não foi implementado uma técnica eficiente para a identificação automática do contorno, limitando assim a solucionar problemas onde o contorno não sofra grandes alterações, podendo ser mantido constante durante toda a análise.

Em relação a geração da malha para cada passo de tempo, um programa de código aberto chamado *Triangle* foi utilizado, o qual é baseado na técnica de triangularização de Delaunay.

12 EXEMPLOS NUMÉRICOS

12.1 Rompimento de uma barragem

O primeiro exemplo a ser estudado trata-se de um *benchmark* no âmbito da dinâmica dos fluidos e consiste em uma barragem inicialmente em repouso, que após o início da análise sua comporta é instantaneamente aberta (Fig. 2). Considerou-se um fluido com massa específica

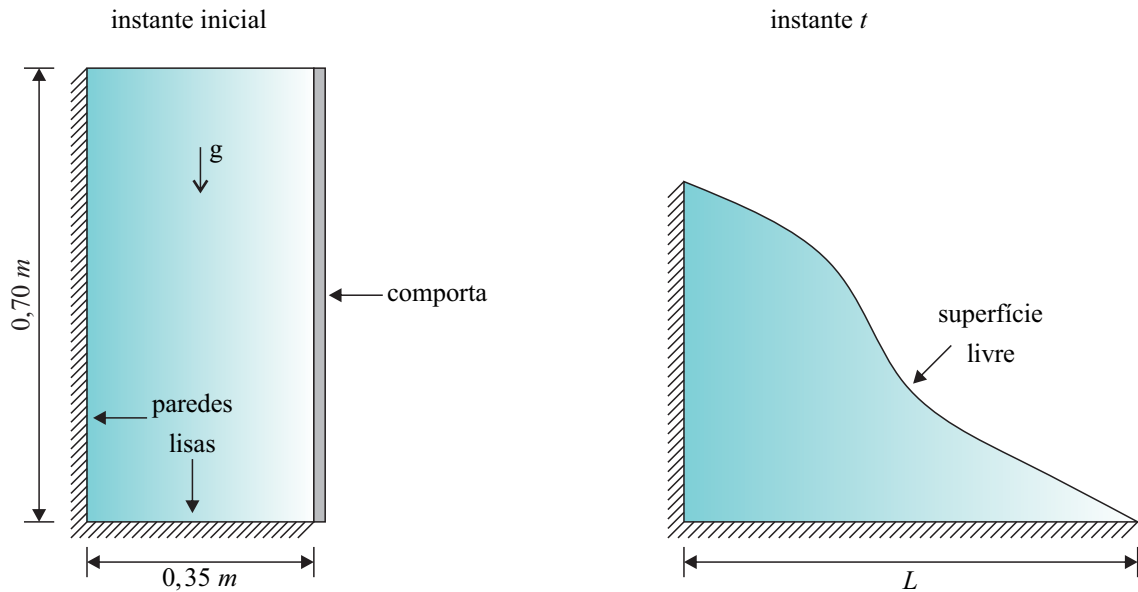


Figura 2: Geometria inicial da barragem

igual a $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$, viscosidade dinâmica $\mu = 10^{-3} \text{ Pa.s}$, aceleração da gravidade de $g = 1.0 \text{ m/s}^2$ e um acréscimo de tempo $\Delta t = 5.10^{-4} \text{ s}$. O problema foi discretizado em 3636 partículas de modo que o comprimento característico de cada elemento fosse igual à 0.01 m , totalizando 10908 graus de liberdade.

A solução deste trabalho foi obtida de modo experimental por Martin e Moyce (1958) enquanto que Nithiarasu (2005) apresentou resultados de uma análise numérica por meio do algoritmo CBS (*Characteristic-Based Split*).

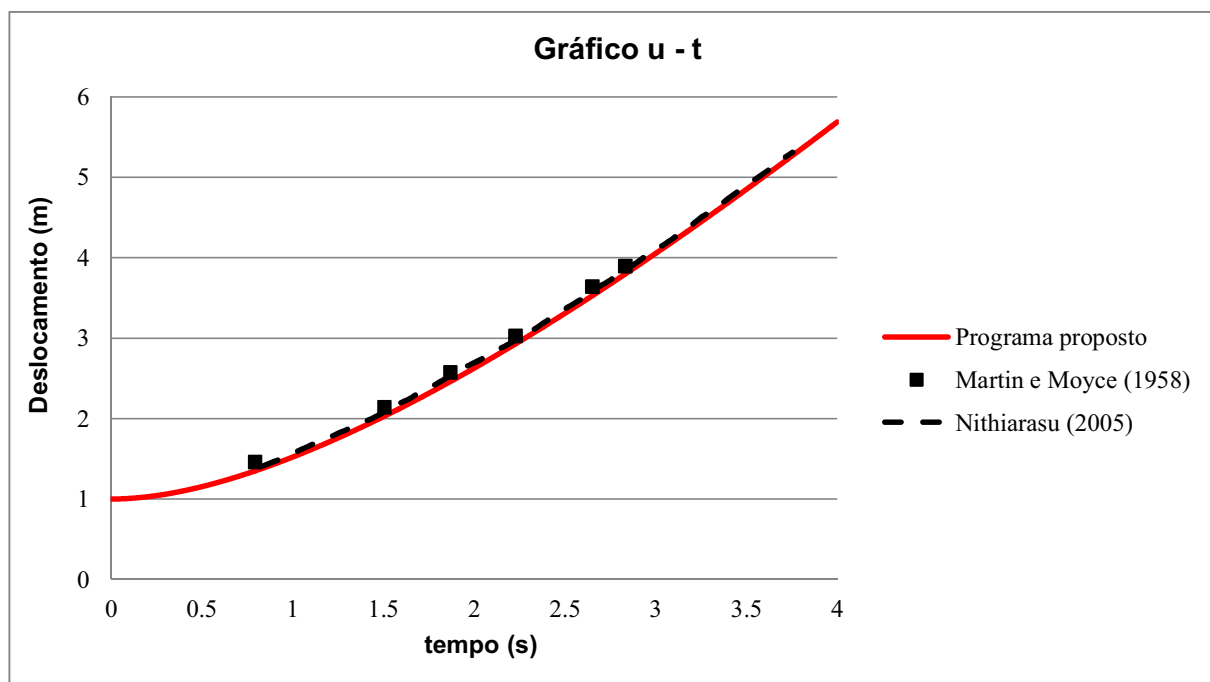


Figura 3: Posição atual relativa em função do tempo adimensional

Os resultados referentes à posição deslocada da extremidade inferior direita são mostrados na Fig. 3, onde L é a posição atual, L_0 a posição inicial e t^* o tempo adimensional, calculado por $t^* = t\sqrt{2g/L_0}$. Percebe-se que o programa proposto apresentou resultados condizentes com os valores de referência, e o integrador temporal de Newmark não apresentou instabilidades. A seguir, são mostrados os campos de velocidade e pressão para os instantes t^* iguais a 1.5, 2.5.

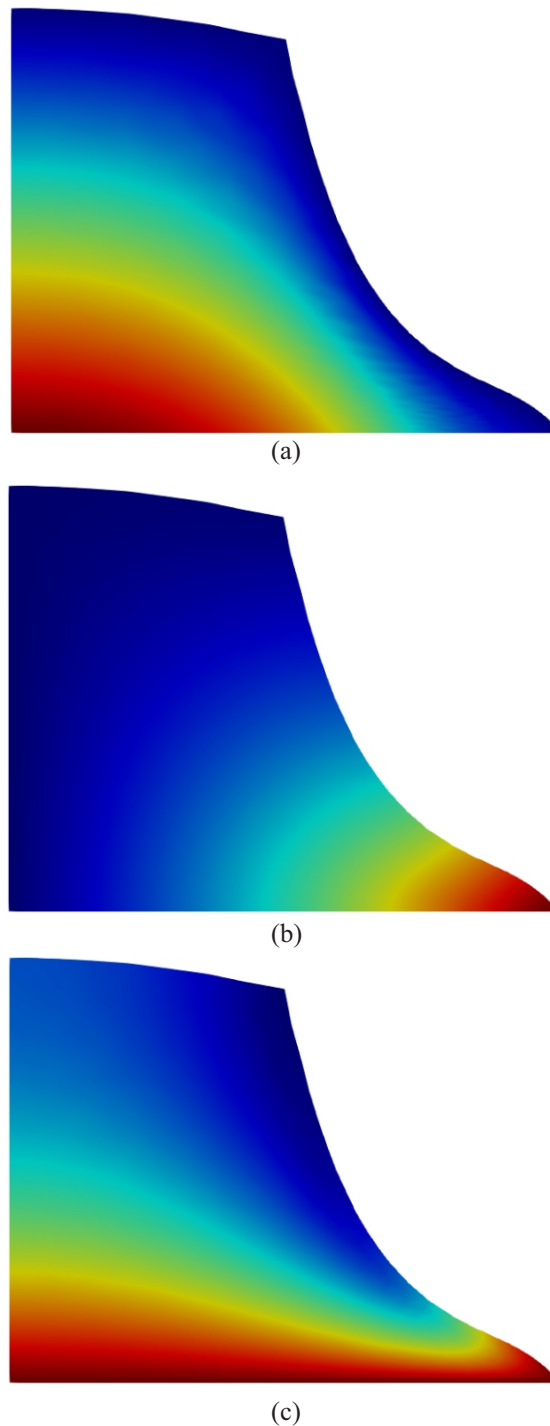


Figura 4: (a) pressão, (b) velocidade x, (c) velocidade y para um instante de tempo $t^* = 1.5$

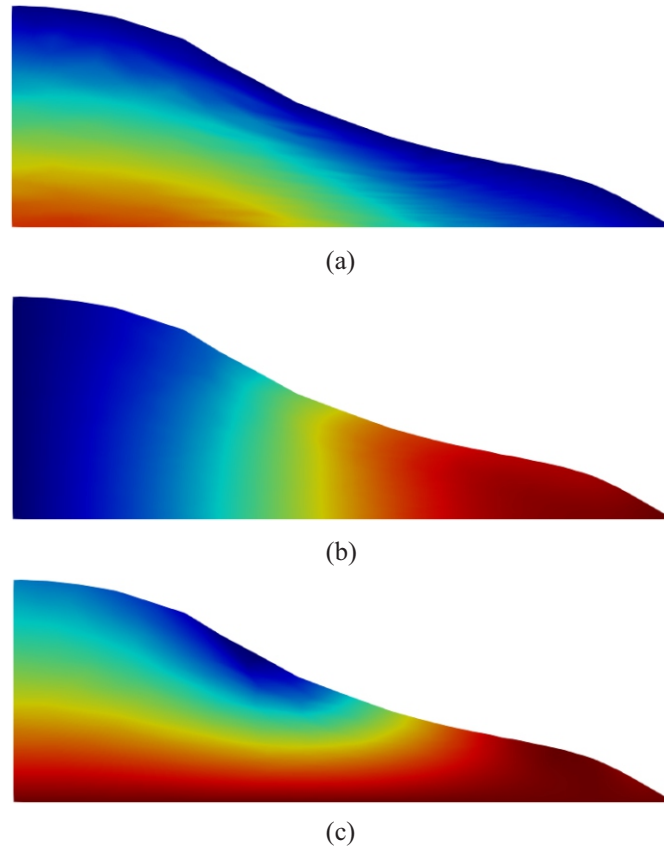


Figura 5: (a) pressão, (b) velocidade x, (c) velocidade y para um instante de tempo $t^* = 2.5$

12.2 Propagação de uma onda solitária

Como segundo exemplo estuda-se a propagação de uma onda solitária não linear. O problema consiste em um fluido com superfície livre confinado entre três paredes lisas, sendo uma horizontal e duas verticais, como pode ser visto na Fig. 6. As condições iniciais foram calculadas com base no trabalho de Laitone (1960), o qual apresenta soluções analíticas para um domínio infinito. Assim, substitui-se $t = 0$ nas equações abaixo para obter-se o valor da altura da superfície livre, das velocidades na direção x e y e das pressões:

$$h = d + H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right], \quad (51)$$

$$v_x = \sqrt{gd} \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right], \quad (52)$$

$$v_y = \sqrt{3gd} \left(\frac{H}{d} \right)^{3/2} \left(\frac{y}{d} \right) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \tanh \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right], \quad (53)$$

$$p = \rho g(h - y), \quad (54)$$

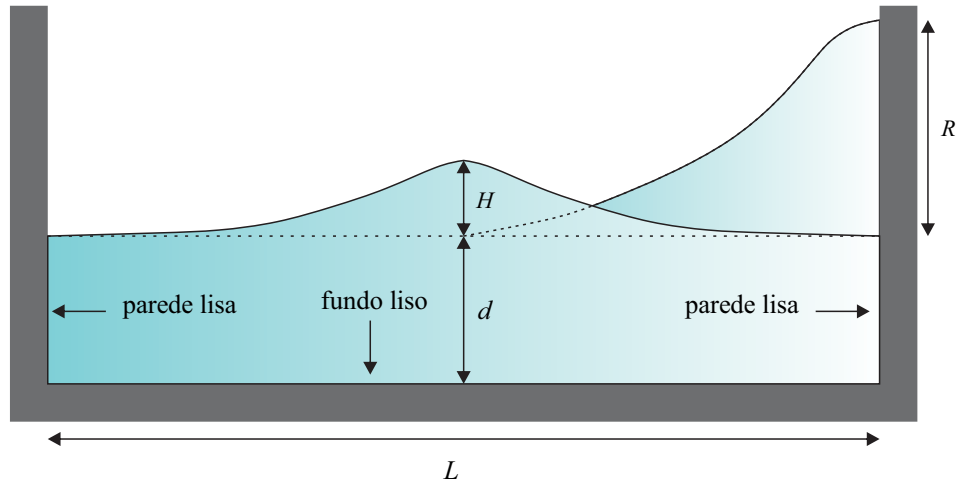


Figura 6: Definição do problema de propagação de uma onda solitária

em que nas equações acima c é uma constante calculada como:

$$c = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{d} - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{d} \right)^2 + O \left(\frac{H}{d} \right)^3. \quad (55)$$

Para a análise foi considerado um fluido com massa específica $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$, viscosidade dinâmica $\mu = 0.01 \text{ Pa.s}$, aceleração da gravidade $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, altura inicial $H = 0.3 \text{ m}$, comprimento total $L = 16d$ em que $d = 1.0 \text{ m}$ e um incremento de tempo $\Delta t = 0.025 \text{ s}$. O domínio foi discretizado em 2426 partículas de modo que o comprimento característico de cada elemento fosse praticamente constante e igual à 0.1 m , totalizando 7278 graus de liberdade. A Figura 7 mostra o conjunto de partículas para diferentes instantes de tempo.

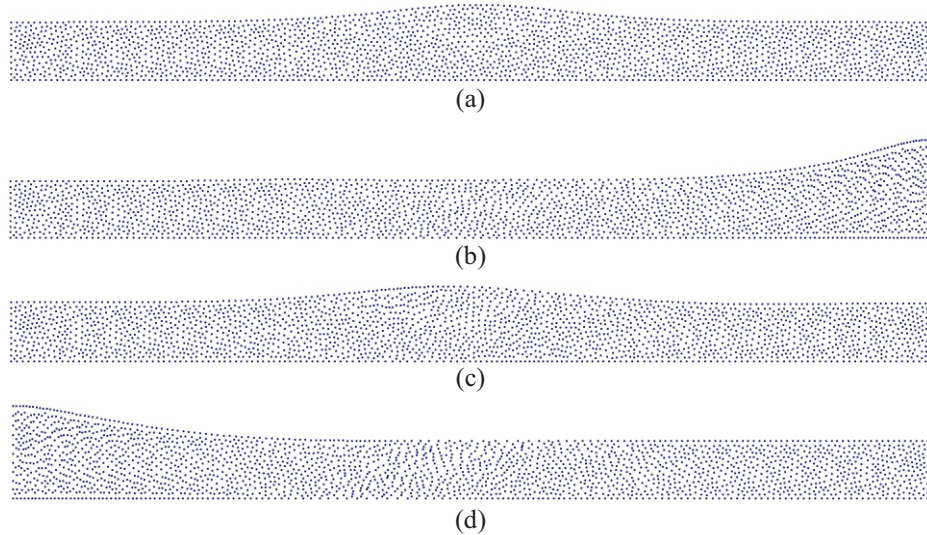


Figura 7: Conjunto de partículas nos instantes (a) $t = 0$, (b) $t = 2.3 \text{ s}$, (c) $t = 4.6 \text{ s}$ e (d) $t = 6.9 \text{ s}$

É possível observar que a onda atinge sua maior altura ao chocar-se com a parede direita, por volta do instante $t = 2.3 \text{ s}$, retorna a posição inicial em $t = 4.6 \text{ s}$, colide com a parede

esquerda aproximadamente em $t = 6.9s$ e assim sucessivamente. Esses valores são coerentes com as respostas presentes nos trabalhos de Sung et al. (2000) e Nithiarasu (2005). Os campos de velocidade e pressão são apresentados para os instantes $t = 2.3s$ e $t = 4.6s$, nos quais é possível observar a ausência de oscilações.

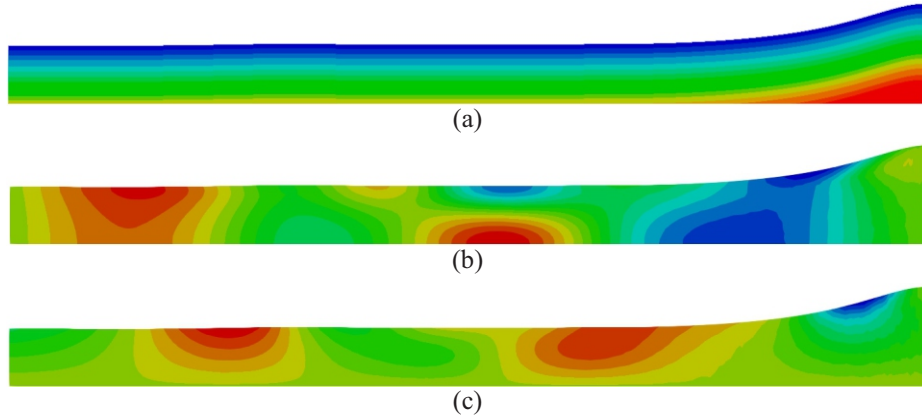


Figura 8: Campos de (a) pressão, (b) velocidade em x e (c) velocidade em y no instante $t = 2.3s$

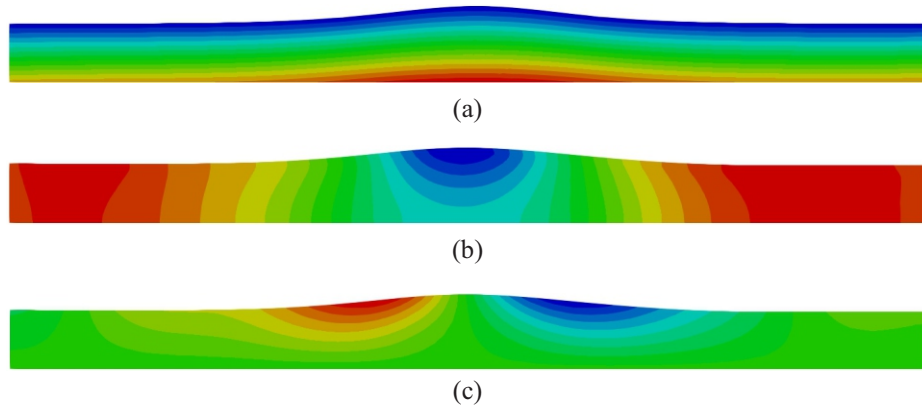


Figura 9: Campos de (a) pressão, (b) velocidade em x e (c) velocidade em y no instante $t = 4.6s$

Na Figura 10 estão apresentadas as variações da altura com o tempo nas paredes direita e esquerda. Observa-se um pequeno amortecimento em relação a resposta obtida por Nithiarasu (2005), que utilizou incompressibilidade artificial diferentemente da formulação aqui apresentada.

Cabe ressaltar que não foram apresentados testes comparativos quanto à taxa de convergência espacial e temporal da formulação para os exemplos aqui expostos. Essas análises estão sendo desenvolvidas e os resultados serão apresentados em trabalhos futuros.

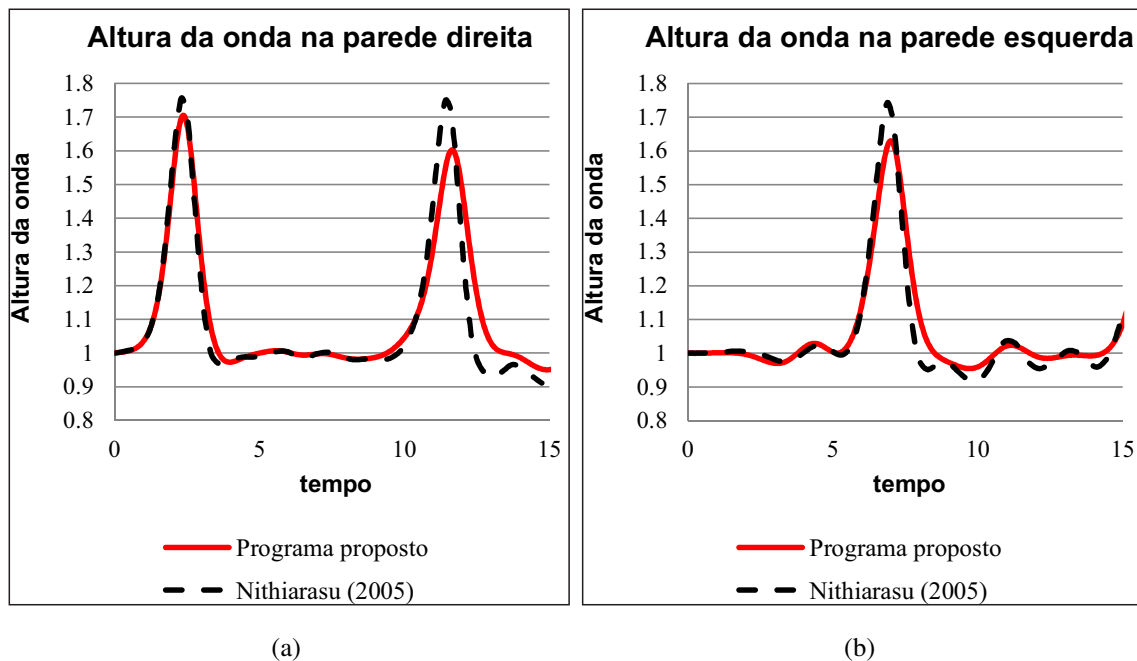


Figura 10: Variação da altura com o tempo (a) na parede direita e (b) na parede esquerda

13 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo desenvolveu-se uma formulação que combina o método de partículas e o método dos elementos finitos posicional para análises de escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis, utilizando uma descrição Lagrangeana e tendo como foco problemas de contorno móveis. Foram discutidas as vantagens e desvantagens de utilizar-se esse tipo de descrição ao invés da abordagem Euleriana, assim como as facilidades e dificuldades encontradas dependendo da configuração adotada como referência. Por fim, a formulação foi testada para problemas de escoamentos com superfície livre, e os resultados comparados a aqueles presentes na literatura, mostrando a coerência e comprovando a eficiência do método proposto. Para os exemplos estudados neste trabalho, o custo computacional devido à geração da malha para cada passo de tempo foi praticamente nulo, entretanto, o tempo de processamento desta etapa é diretamente proporcional ao número de partículas utilizado para a discretização do problema. Como desenvolvimentos futuros sugere-se o uso desta formulação para problemas de interação fluido-estrutura e também a extensão para o caso tridimensional.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo e à CAPES pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

Anderson, J.D., 1995. *Computational fluid dynamics*. New York: McGraw-Hill.

- Aubry, R., Idelsohn, S.R. & Oñate, E., 2005. Particle finite element method in fluid-mechanics including thermal convection-diffusion. *Computers & structures*, 83(17), pp. 14591475.
- Bonet, J., Wood, R.D., Mahaney, J. & Heywood, P., 2000. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(5), pp. 579595.
- Coda, H. B., 2003. *Anlise no linear geomtrica de slidos e estruturas: Uma formulao posicional baseada no MEF*. Tese, Escola de Engenharia de So Carlos.
- Coda, H.B. & Paccola, R.R., 2009. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. *Mathematical problems in engineering*.
- Courant, R., 1943. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American mathematical Society*, 49(1), pp. 123.
- Dick, E., 2009. Introduction to finite element methods in computational fluid dynamics. *Computational fluid dynamics*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 235274.
- Donea, J., Giuliani, S. & Halleux, J.P., 1982. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1-3), pp.689723.
- Drikakis, D. & Rider, W., 2006. *High-resolution methods for incompressible and low-speed flows*. Springer Science & Business Media.
- Elman, H.C., 2005. Preconditioning strategies for models of incompressible flow. *Journal of Scientific Computing*, 25(1), pp. 347366.
- Franci, A., 2015. *Unified Lagrangian formulation for fluid and solid mechanics, fluid-structure interaction and coupled thermal problems using the PFEM*. PhD thesis, Universitat Politcnica de Catalunya.
- Franci, A., Oñate, E. & Carbonell, J.M., 2015. Unified Lagrangian formulation for solid and fluid mechanics and FSI problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 298, pp. 520547.
- Gingold, R.A. & Monaghan, J.J., 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3), pp.375-389.
- Greco, M. & Coda, H.B., 2006. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and vibration*, 290(3), pp. 11411174.
- Holzappel, G.A., 2000. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Hughes, T.J., Franca, L.P. & Hulbert, G.M., 1989. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2), pp. 173189.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. & Del Pin, F., 2003. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(6), pp. 893912.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. & Pin, F.D., 2004. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free?surfaces and breaking waves. *International journal for*

numerical methods in engineering, 61(7), pp. 964989.

Idelsohn, S.R., Mier-Torrecilla, M., Marti, J. & Oñate, E., 2011. The particle finite element method for multi-fluid flows. *Particle-Based Methods*, Springer Netherlands, pp. 135158.

Laitone, E.V., 1960. The second approximation to cnoidal and solitary waves. *Journal of Fluid Mechanics*, pp. 430444.

Liu, M.B., Liu, G.R. & Zong, Z., 2008. An overview on smoothed particle hydrodynamics. *International Journal of Computational Methods*, 5(01), pp.135188.

Liu, M.B. & Liu, G.R., 2010. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. *Archives of computational methods in engineering*, 17(1), pp.2576.

Marsden, J.E. & Hughes, T.J., 1994. *Mathematical foundations of elasticity*. Courier Corporation.

Martin, J.C. & Moyce, W.J., 1952. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pp. 312324.

Monaghan, J.J., 2005. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics*, 68(8), p.1703.

Monaghan, J.J., 2012. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44, pp.323346.

Nithiarasu, P., 2005. An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristicbased split (CBS) scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(12), pp. 14151428.

Ogden, R.W., 1997. *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation.

Oñate, E., 1998. Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 151(1-2), pp. 233265.

Oñate, E., Idelsohn, S.R. & Felippa, C.A., 2010. Consistent pressure Laplacian stabilization for incompressible continua via higher-order finite calculus. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(175), pp. 171195.

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Celigueta, M.A., Rossi, R. & Latorre, S., 2010. Possibilities of the particle finite element method in computational mechanics. *Computer Methods in Mechanics*, pp. 271310.

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Celigueta, M.A., Rossi, R., Marti, J., Carbonell, J.M., Ryzhakov, P. & Surez, B., 2011. Advances in the particle finite element method (PFEM) for solving coupled problems in engineering. *Particle-Based Methods*, pp.149.

Peskin, C.S., 2002. The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11, pp.479517.

Premoze, S., Tasdizen, T., Bigler, J., Lefohn, A. & Whitaker, R.T., 2003. Particle-Based Simulation of Fluids. *Computer Graphics Forum*. Blackwell Publishing, Inc, v. 22, n. 3, pp. 401410.

Sanches, R.A.K. & Coda, H.B., 2014. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-

Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, 38(14), pp. 34013418.

Strang, G. & Fix, G.J., 1973. *An analysis of the finite element method* (Vol. 212). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-hall.

Sung, J., Choi, H.G. & Yoo, J.Y., 2000. Time-accurate computation of unsteady free surface flows using an ALE-segregated equal-order FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. 14251440.

Tannehill, J.C., Anderson, D. & Pletcher, R.H., 2012. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC Press.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. & Nithiarasu, P., 2005. *The finite element method: fluid dynamics* (Vol. 3). Butterworth-heinemann.

Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., 2000. *The finite element method: the basis*, 6th edn.