



TOPOLOGY OPTIMIZATION WITH SEQUENTIAL LINEAR PROGRAMMING

Paulo Domingos Conejo

paulo.conejo@unioeste.br

Renato Massamitsu Zama Inomata

renato.inomata@gmail.com

Simone Aparecida Miloca

simone.miloca@unioeste.br

Paula Yumi Takeda

pytakeda@gmail.com

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná

R. Universitária, 1619, 85819-110, Paraná, Brazil

Abstract. *Optimization problems are quite common in many areas of knowledge. In particular, topology optimization provides structural conceptions to engineering based on the characteristic to be optimized and the respective physical or constructive constraints of the problem. A classic problem about this subject is to obtain the most compliant structure given a certain amount of material to be utilized, and one of the usual approaches is the optimization of a two dimensional beam. In this work we detail the theoretical results in this space and expand them to three dimensions. Some numerical tests was performed, obtaining results for different problems, varying the design domain, which is the region that delimits the problem. The finite element method was used for the discretization of the problems, associated to the density method with isotropic materials. For the optimization, a Sequential Linear Programming method was adopted, since the problem presents linear constraints, making it easy to use.*

Keywords: *Topology Optimization, Sequential Linear Programming, Finite Element*

1 INTRODUÇÃO

A Otimização é a área da Programação Matemática que consiste em minimizar ou maximizar uma determinada função, f , denominada função objetivo, sujeita a determinadas condições, Γ , denominadas restrições (Ribeiro, et al., 2013).

Um problema de otimização é usualmente escrito na forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

com $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Quando o conjunto viável Γ é o espaço n -dimensional, o problema de otimização é dito irrestrito. Quando a função objetivo f ou alguma das funções que definem o conjunto de restrições Γ for não linear, dizemos que o problema (1) é de Otimização não Linear. Do contrário, o problema (1) é de Otimização Linear.

A Otimização Topológica é ramo da Otimização que trata de projetar a topologia ótima de uma estrutura (Bendsoe et al., 2004). As primeiras otimizações topológicas, remontam estudos Michell (1904), em que trabalha a minimização de volume de uma estrutura formada por barras. O método para a escolha topológica, essencialmente, consiste em distribuir material no interior de um domínio, minimizando um funcional sob restrições pré-estabelecidas. Assim, a otimização topológica está voltada para a obtenção da estrutura mais rígida possível, sujeita a restrições, como um volume máximo de material.

A estrutura é submetida a um conjunto de forças, e restrita a um domínio, que é dividido em elementos. A cada elemento é associado uma variável que indica se ele contém material ou não.

A Otimização Topológica (OT) vem sendo aplicada ao projeto de mecanismos flexíveis de treliças e de estruturas sujeitas a restrições de contato com aparatos externos. Tais problemas são convertidos em problemas de Otimização Linear de grande porte, que requerem métodos de resolução com iterações baratas. Neste contexto, Dunning e Kim (2015) sugerem o método de Programação Linear Sequencial (PLS) como uma boa alternativa, visto que, em geral, tem custo computacional baixo. A (OT) combina essencialmente métodos de otimização com um método de Análise Numérica, especificamente neste caso em que as equações de equilíbrio são envolvidas, utilizaremos o Método dos Elementos Finitos (MEF) (Giacchini, 2012).

Por se tratar de otimização restrita, a solução será baseada nas condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (Kuhn, et al., 1951). Neste trabalho apresentamos a teoria do problema de Otimização Topológica em duas e três dimensões, detalhamos o PLS e minimizamos a flexibilidade de uma estrutura bidimensional com restrição de volume de material.

2 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica busca gerar uma estrutura ótima, com relação a alguma característica, sendo essa sujeita a algumas condições, denominadas restrições, e podem ser, por exemplo, as condições necessárias para manter o equilíbrio da estrutura. Essa estrutura é gerada através da redistribuição de material em um determinado espaço, denominado *domínio de projeto*.

Discretizado um domínio de projeto Ω , este será representado por uma malha de elementos, onde um elemento possui o valor de 1 caso faça parte da estrutura ótima ou 0 caso o elemento seja vazio. Dessa maneira, a variável para o problema (1) representa a densidade dos elementos.

Contudo, problemas com variáveis contínuas são resolvidos mais facilmente, visto que, devido a suavidade das funções é possível deduzir informações em uma vizinhança de uma variável (Wright, et al., 1999). Portanto, adotamos valores de densidade $x_i \in [0, 1]$, onde i representa cada um dos elementos pertencentes a Ω .

Embora seja interessante trabalhar com variáveis contínuas, segundo Senne (2009), estas não representam um significado físico adequado, visto que não serão utilizados diferentes materiais para a estrutura. Assim, para que seja possível aproximá-lo de um problema discreto, o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) foi utilizado, sendo que cada uma das densidades é elevada a um fator de penalização p , a fim de tornar as densidades mais próximas de 0 ou 1. A Fig. 1 ilustra os valores obtidos com diferentes fatores de penalização.

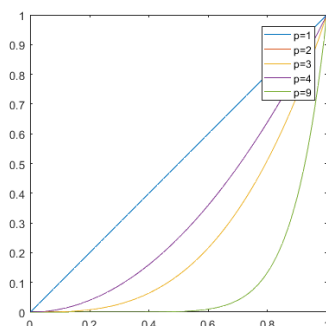


Figura 1: Efeito do aumento do fator de penalização p nas densidades x

Sigmund (1994) explica que conforme o aumento dos valores de p mais distintas são as áreas vazias e sólidas (há menor presença de densidades intermediárias), sendo que para $p \approx 3$ as soluções obtidas consistem quase que inteiramente de regiões sólidas ou vazias.

2.1 Formulação dos elementos em duas e três dimensões

Utilizamos placas retangulares de lados iguais e unitários para a estrutura bidimensional. Cada um de seus elementos possuirá quatro nós de coordenadas (x_i, y_i) , com $i = 1, 2, 3$ e 4 , que serão enumerados a partir do canto esquerdo inferior, em sentido anti-horário, conforme a imagem a seguir

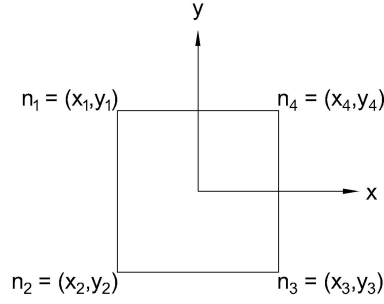


Figura 2: Elemento e seus nós

Cada elemento (com 4 nós) terá o vetor deslocamento $q = [q_1, q_2, \dots, q_8]^T$, onde os índices ímpares e pares representam, respectivamente, os deslocamentos horizontais e verticais. Partindo desses deslocamentos, é possível gerar a função $\hat{u} = [u(x, y), v(x, y)]^T$ capaz de interpolar os valores dos deslocamentos horizontais e verticais, u e v , para quaisquer coordenadas (x, y) pertencentes ao elemento

$$\begin{aligned} u(x, y) &= q_1 N_1(x, y) + q_3 N_2(x, y) + q_5 N_3(x, y) + q_7 N_4(x, y), \\ v(x, y) &= q_2 N_1(x, y) + q_4 N_2(x, y) + q_6 N_3(x, y) + q_8 N_4(x, y). \end{aligned}$$

$N_i(x, y)$ com $i = 1, 2, 3$, e 4 , são funções $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, chamadas de funções de forma. Seja $N_i \equiv N_i(x, y)$, temos que

$$\begin{aligned} N_i &= 1 \quad \text{no nó } n_i, \\ N_i &= 0 \quad \text{nos demais nós.} \end{aligned}$$

Assim, as funções de forma para os nós de 1 a 4 serão

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-x)(1-y), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+x)(1-y) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+x)(1+y), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-x)(1+y). \end{aligned} \quad (2)$$

Finalmente, através da Eq. (2) podemos escrever os deslocamentos na forma matricial,

$$\hat{u}_{(2 \times 1)} = N_{(2 \times 8)} q_{(8 \times 1)}, \quad (3)$$

na qual,

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Deformações e tensões. As deformações de um ponto de um sólido bidimensional podem ser expressas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5)$$

Seja L o operador diferencial

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix},$$

podemos reescrever a Eq. (5) na forma matricial

$$\varepsilon_{(3 \times 1)} = L_{(3 \times 2)} \hat{u}_{(2 \times 1)}, \quad (6)$$

mas, da Eq. (3),

$$\varepsilon_{(3 \times 1)} = L_{(3 \times 2)} N_{(2 \times 8)} q_{(8 \times 1)} = B_{(3 \times 8)} q_{(8 \times 1)}, \quad (7)$$

com $B = LN$, que é chamada de *matriz de deformações*.

Pela Eq. (4) e Eq. (6), é possível obter

$$B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1+y & 0 & 1-y & 0 & 1+y & 0 & -1-y & 0 \\ 0 & -1+x & 0 & -1-x & 0 & 1+x & 0 & 1-x \\ -1+x & -1+y & -1-x & 1-y & 1+x & 1+y & 1-x & -1-y \end{bmatrix}. \quad (8)$$

O material dos elementos é isotrópico, e, além disso, serão consideradas deformações pequenas, caracterizando o regime elástico linear. Com base nessas hipóteses, pode ser aplicada a *Lei de Hooke* para obter a tensão σ ,

$$\sigma_{(3 \times 1)} = D_{(3 \times 3)} \varepsilon_{(3 \times 1)}, \quad (9)$$

na qual D é a matriz que contém os comportamentos elásticos do material. Nela, será considerada apenas um estado plano de tensões, visto que o elemento é uma placa (espessura pequena em relação as demais dimensões). Assim,

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

com, E é o *módulo de elasticidade*, ou também *módulo de Young*, e ν o *coeficiente de Poisson*, que é a razão entre a deformação lateral e axial do material.

A matriz de rigidez. Sabendo que as espessuras das placas são constantes, a energia potencial será dada por

$$\Pi = \sum_i t_i \int_i \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon dA, \quad (11)$$

no qual t_i representa a espessura do elemento i .

Considerando que as coordenadas do elemento variem de -1 a 1, da Eq. (9) e Eq. (11), temos que

$$\Pi = \sum_i \frac{1}{2} t_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (D\varepsilon)^T \varepsilon \, dxdy = \sum_i \frac{1}{2} t_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varepsilon^T D\varepsilon \, dxdy.$$

Além disso, da Eq. (7),

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_i \frac{1}{2} q^T \left[t_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \, dxdy \right] q \\ &= \sum_i \frac{1}{2} q^T k_e q, \end{aligned}$$

com

$$k_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \, dxdy, \quad (12)$$

a matriz de rigidez para um elemento e possui dimensões (8×8) . A matriz de rigidez é simétrica e positiva definida, essa demonstração pode ser encontrada em Giacchini (2012).

Matriz de rigidez global. A matriz de rigidez obtida na Eq. (12) representa a rigidez de apenas um elemento, porém é possível expandir esse conceito para uma malha.

Se para um elemento, a matriz de rigidez possuía dimensão 8×8 , correspondentes a quantidade de deslocabilidades do elemento (2 deslocabilidades/nó $\times$ 4 nós), para a rigidez global teremos uma matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$, onde n_n é o número de nós da malha. Os graus de liberdade que apresentam índices ímpares são os que representam os deslocamentos horizontais, enquanto que os pares representam os deslocamentos verticais.

Seja n_{el} o número total de elementos da malha, a rigidez global pode ser obtida através de um somatório das rigidezes K_i dos $i = 1, \dots, n_{el}$ elementos. Para obter K_i , será utilizada uma matriz $P_i \in \mathbb{R}^{2n_n \times 8}$ formada pelas colunas da matriz identidade $I \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$, assim

$$K_i = P_i k_e P_i^T, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (13)$$

A matriz K_i é uma superposição das rigidezes k_e , porém disposta em uma matriz $2n_n \times 2n_n$, de maneira que os graus de liberdade de k_e estejam relacionados ao seus respectivos graus de liberdade obtidos pela numeração da rigidez global $\mathbf{K}$.

Com a matriz de rigidez global $\mathbf{K}$, podemos resolver o sistema

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (14)$$

que é a condição de equilíbrio estático para a estrutura (também conhecida como restrição tecnológica). O vetor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é o vetor global de deslocamentos, enquanto que $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é o vetor global de forças nodais.

Elemento em terceira dimensão. Para o elemento tridimensional são necessárias algumas adaptações. Seja o eixo z correspondente à terceira dimensão, as funções de forma são semelhantes às obtidas na Eq. (2), assim

$$N_i = \frac{1}{8}(1 \pm x)(1 \pm y)(1 \pm z), \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

A matriz B é análoga à Eq. (8). Já a matriz de elasticidade D obtida na Eq. (10), é

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}.$$

Portanto, k_e é

$$k_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B \, dx dy dz.$$

2.2 Formulação do problema

O problema de otimização topológica que temos interesse é o de minimizar a flexibilidade, que é equivalente a maximizar a rigidez, sujeita a uma restrição de quantidade máxima de material a ser utilizado pela estrutura. Ou seja,

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Flexibilidade} \\ \text{s.a.} \quad & \text{Volume da estrutura} \leq \text{Volume máximo.} \end{aligned}$$

Seja n_{el} o número de elementos da estrutura, e x o vetor das densidades dos elementos, a função objetivo, $f_o : \mathbb{R}^{n_{el}} \rightarrow \mathbb{R}$, é dada por

$$f_o(x) = F^T U(x). \quad (15)$$

O domínio de projeto é uma viga retangular, com apoios na lateral que apresenta a carga, e um apoio na extremidade oposta. Este problema surge de uma simplificação por simetria de uma viga isostática e bi-apoiada, conforme Fig. 3. Os locais que apresentam apoios terão deslocamentos nulos.

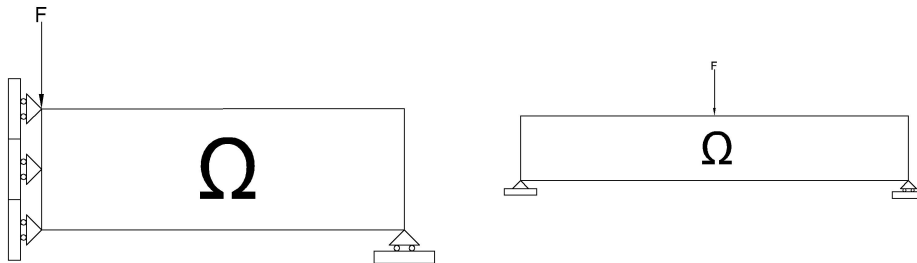


Figura 3: Domínio de projeto e viga isostática bi-apoiada

A matriz $K(x)$ é

$$K(x) = \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i^p K_i, \quad (16)$$

com K_i dado pela Eq. (13) e p a penalidade associada ao método SIMP.

Sabendo que todos os elementos possuem a mesma dimensão, assim, seja v_f a fração de volume, V_{max} será o volume máximo da estrutura tal que

$$v_f = V_{max}/n_{el}. \quad (17)$$

Como $x \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} U(x)^T K_i U(x) = \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i^p (u_i^T k_e u_i) \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} x_i \leq (n_{el})(v_f) \\ & 0 < x^{\min} \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (18)$$

onde u_i é o vetor de deslocamentos nodais do elemento i .

É importante que $x^{\min}$ seja superior a 0 pois o problema, que é contínuo, se aproximaria de um problema discreto, gerando uma instabilidade numérica devido a grande variação das densidades dos elementos (Gomes et al., 2011) e (Sene, 2009).

Para a aplicação da Programação Linear Sequencial é necessário conhecer os gradientes da função objetivo e das funções de restrição do problema a fim de linearizar o problema. Contudo, a restrição já é linear, tornando necessário apenas linearizar a função objetivo.

A derivada da função objetivo é obtida derivando, com relação a x_i , a equação da condição de equilíbrio dada pela Eq. (14). Assim

$$K(x)U(x) = F \Rightarrow \frac{\partial K(x)}{\partial x_i} U(x) + K(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = 0, \quad (19)$$

visto que $\partial F / \partial x_i = 0$, pois o carregamento não depende da densidade. Além disso, derivando a Eq. (16),

$$\frac{\partial K(x)}{\partial x_i} = p(x_i)^{p-1} K(x). \quad (20)$$

Seja $K \equiv K(x)$ e $U \equiv U(x)$, utilizando as Eq. (15), Eq. (19) e Eq. (20), temos

$$\frac{\partial f_o(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U^T}{\partial x_i} K U + U^T \frac{\partial K}{\partial x_i} U + U^T K \frac{\partial U}{\partial x_i} = -p(x_i)^{p-1} U^T K U.$$

2.3 Tabuleiro de xadrez

Segundo Sigmund (1994), o *tabuleiro de xadrez* é definido como “região com elementos vazios e sólidos alternados, dispostos em forma de um tabuleiro de xadrez”. Essa “porosidade” não deve ser entendida como uma estrutura ótima, sendo que ela está diretamente relacionada com instabilidades numéricas devido a modelagem dos elementos. Jog e Haber (1996) mencionam que elementos de ordem 4, ou seja que apresentam 4 nós, apresentavam o problema do tabuleiro de xadrez, contudo, os autores não encontraram o surgimento desse comportamento com elementos de ordem 8 ou 9.

Sigmund (1994) comenta que existem diferentes maneiras de se contornar o problema do tabuleiro de xadrez. Em seu trabalho, o autor sugere a utilização de métodos de processamento de imagens para redução de ruídos, caracterizando o *filtro espacial*.

Filtros são operadores matemáticos, mais especificamente um produto de convolução entre uma função e a função das densidades (Bourdin, 2001). Eles atuam em uma vizinhança de um elemento, alterando suas características, como o vetor gradiente da função objetivo, ou as densidades dos elementos.

O filtro do vetor gradiente da função objetivo. Andreassen et al. (2011) propõe um filtro baseado na média ponderada do vetor gradiente da função objetivo em uma vizinhança para cada elemento da estrutura. Seja $i = 1, \dots, n_{el}$, f a função objetivo, B_i uma bola de raio $r_{\min}$ centrada no centro do elemento i , os componentes do gradiente, $\partial f / \partial x_i$, serão substituídos por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sum_{j \in B_i} \hat{H}_{ij}} \sum_{j \in B_i} \hat{H}_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el},$$

com

$$\hat{H}_{ij} = \begin{cases} r_{\min} - s_{ij}, & \text{se } j \in B_i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (21)$$

um fator de peso que varia conforme s_{ij} , que é a distância euclidiana entre os elementos i e j . Quanto mais próximo um elemento j está de seu elemento central i maior é a atuação do filtro.

O filtro da média ponderada das densidades. Este filtro é análogo ao anterior e modifica a densidade de um elemento central e pela média ponderada das densidades dos elementos i dentro de uma vizinhança B_e com raio $r_{\min}$. As novas densidades são dadas por

$$\hat{x}_e = \frac{1}{\sum_{i \in B_e} \hat{H}_{ei}} \sum_{i \in B_e} \hat{H}_{ei} x_i.$$

É importante notar que o gradiente das funções objetivo e das restrições são modificados também, e podem ser obtidos aplicando a regra da cadeia. Portanto

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = \sum_{e \in B_j} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{x}_e} \frac{\partial \hat{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e \in B_j} \frac{1}{\sum_{i \in B_e} \hat{H}_{ei}} \hat{H}_{ej} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{x}_e},$$

ζ a função que representa ou a função objetivo ou a restrição de volume e $\hat{H}_{ei}$ obtido através da Eq. (21).

3 UM ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR SEQUENCIAL

Nesta seção apresentamos um algoritmo PLS, que será utilizado na resolução de subproblemas obtidos a partir do problema da Eq. (18). Com a introdução de variáveis de folga, um problema de otimização não linear geral (com desigualdades) como no problema (1) pode ser transformado em um problema com somente restrições de igualdade. Seja o problema não-linear

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & x^{\min} \leq x \leq x^{\max}, \end{aligned} \quad (22)$$

com $x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ o vetor para as n variáveis do problema; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) são funções com derivadas parciais primeiras Lipschitz contínua, de modo que f é a função objetivo e h_i com $i = 1, \dots, m$ são as m restrições de igualdade do problema; $x^{\min} = (x_1^{\min} \dots x_n^{\min})^T$ e $x^{\max} = (x_1^{\max} \dots x_n^{\max})^T$ são os vetores que contêm as restrições que limitam, respectivamente, inferiormente e superiormente as variáveis de x .

Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto dito *factível* ou *viável* se todas as suas restrições forem satisfeitas.

As aproximações lineares de f e h_i , que são feitas a partir da fórmula de Taylor, são

$$f(x+s) \approx f(x) + \nabla f(x)^T s, \quad h_i(x+s) \approx h_i(x) + \nabla h_i(x)^T s, \quad i = 1, \dots, m. \quad (23)$$

Denotamos por

$$A(x) = [\nabla h_1(x) \dots \nabla h_m(x)]^T \quad (24)$$

a matriz Jacobiana das restrições, e

$$C(x) = [h_1(x) \dots h_m(x)]^T \quad (25)$$

o vetor que possui os valores de cada uma das restrições no ponto x . Definimos também o conjunto X que representa as restrições canalizadas

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\min} \leq x \leq x^{\max}\}.$$

Usando as Eq. (24) e Eq. (25), podemos reescrever a Eq. (23). Assim, para a função objetivo

$$f(x+s) \approx f(x) + \nabla f(x)^T s \equiv L(x, s),$$

e, para as funções de restrição $C(x+s) \approx C(x) + A(x)s$.

É possível obter a solução aproximada de um problema não linear como na Eq. (22) com o auxílio da *Programação Linear Sequencial* (PLS), que consiste num método iterativo que se utiliza de uma sequência de problemas de programação linear, nos quais tanto a função objetivo

quanto as restrições são aproximações lineares das funções envolvidas no problema da Eq. (22). Assim, o subproblema linearizado em cada iteração k fica

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^k)^T s \\ \text{s.a.} \quad & A(x^k)s + C(x^k) = 0 \\ & \max\{-\delta_k, x^{\min} - x^k\} \leq s \leq \min\{\delta_k, x^{\max} - x^k\}, \end{aligned} \quad (26)$$

onde δ_k é a *região de confiança* do subproblema na iteração k , cuja função é evitar que este problema seja ilimitado e também ajudar a garantir a convergência global do algoritmo. Essa região indica que a linearização na Eq. (26) do problema da Eq. (22) o representa suficientemente bem.

Como outros métodos iterativos, partindo de x^k buscamos obter x^{k+1} , que neste caso é calculado com s_c , que é a solução ótima para o subproblema da iteração k . Assim

$$x^{k+1} = x^k + s_c.$$

É possível que as restrições não sejam satisfeitas, havendo uma *inviabilidade* no ponto, que será expressa pelas funções $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \|C(x)\|_2^2 \quad \text{e} \quad M(x, s) = \frac{1}{2} \|A(x)s + C(x)\|_2^2,$$

nas quais φ é a inviabilidade da Eq. (22) e M a inviabilidade do subproblema da Eq. (26).

Ainda sobre a inviabilidade, um ponto é dito φ -estacionário se x é um ponto que atende as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), descritas por Kuhn e Tucker (1951), do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(x) \\ \text{s.a.} \quad & x \in X. \end{aligned} \quad (27)$$

Quando se resolve o problema original da Eq. (22) de maneira aproximada, o objetivo é minimizar tanto a função objetivo quanto a sua inviabilidade. Contudo, nem sempre isso será possível, assim é necessário estabelecer uma função de mérito para priorizar o decréscimo de uma das duas funções (objetivo ou inviabilidade) (Senne, 2009).

Através de uma combinação convexa entre $f(x)$ e $\varphi(x)$, estabelecemos uma função de mérito $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x, \theta) = \theta f(x) + (1 - \theta)\varphi(x), \quad \theta \in [0, 1].$$

O critério de aceitação ou rejeição do passo s_c é estipulado através das *reduções reais* (A_{red}) e *prevista* (P_{red}), de maneira que

$$A_{red}^{fct} = \varphi(x) - \varphi(x + s) \quad \text{e} \quad A_{red}^{opt} = f(x) - f(x + s) \quad (28)$$

são respectivamente as reduções reais para a função objetivo e para a inviabilidade do problema da Eq. (22). Seja também

$$P_{red}^{opt} = L(x, 0) - L(x, s) = -\nabla f(x)^T s \quad (29)$$

$$P_{red}^{fct} = M(x, 0) - M(x, s) = \frac{1}{2} \|C(x)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|A(x)s + C(x)\|_2^2, \quad (30)$$

respectivamente, as reduções previstas para a função objetivo e inviabilidade do subproblema linearizado da Eq. (26).

Finalmente, por meio das Eq. (28), Eq. (29) e Eq. (30), definimos A_{red} e P_{red} que são, respectivamente, as reduções reais e previstas pela função de mérito de maneira que

$$A_{red} = \theta A_{red}^{opt} + (1 - \theta) A_{red}^{fct} \quad \text{e} \quad P_{red} = \theta P_{red}^{opt} + (1 - \theta) P_{red}^{fct}.$$

O parâmetro θ é recalculado para cada iteração. Para determiná-lo utilizamos, em cada iteração k ,

$$\theta_k^{min} = \min \{1, \theta_0, \dots, \theta_{k-1}\} \quad \text{e} \quad \theta_k^{large} = \left[1 + \frac{N}{(k+1)^{1.1}} \right] \theta_k^{min},$$

sendo $N \geq 0$ um parâmetro que garante que θ tenha um decréscimo não monótono no decorrer das iterações. Definimos também

$$\theta_k^{sup} = \sup \left\{ \theta \in [0, 1] \mid P_{red} \geq 0.5 P_{red}^{fct} \right\}.$$

Por fim, θ_k é determinado através de

$$\theta_k = \min \left\{ \theta_k^{sup}, \theta_k^{large} \right\}.$$

No que segue, apresentamos o Algoritmo PLS, que resolve o problema da Eq. (22) de maneira aproximada.

Dado um ponto inicial $x^0 \in X$, um raio de confiança δ_0 , tal que $\delta_0 \geq \delta_{\min} \geq 0$, um θ_0 inicial tal que $\theta_0 = \theta_{\max} = 1$, e $k = 0$.

1. Tentar determinar um s_n que satisfaça

$$\begin{aligned} A(x^k)s_n &= -C(x^k) \\ \max\{-0.8\delta_k, x^{\min} - x^k\} &\leq s_n \leq \min\{0.8\delta_k, x^{\max} - x^k\} \end{aligned}$$

2. Caso não seja possível determinar s_n

- (a) $d_n \leftarrow -\nabla\varphi(x^k)$

- (b) Determinar $\bar{\alpha}$, solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & M(x^k, \alpha d_n) \\ \text{s.a.} \quad & \max\{-0.8\delta_k, x^{\min} - x^k\} \leq \alpha d_n \leq \min\{0.8\delta_k, x^{\max} - x^k\} \quad \text{e} \quad \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

- (c) $s_n^d \leftarrow \bar{\alpha} d_n$

- (d) Determinar s_c tal que $M(x^k, s_c) \leq M(x^k, s_n^d)$.

3. Caso contrário, partindo de s_n , encontrar s_c , solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^k)^T s \\ \text{s.a.} \quad & A(x^k)s = -C(x^k) \quad \text{e} \quad \max\{-\delta_k, x^{\min} - x^k\} \leq \alpha d_n \leq \min\{\delta_k, x^{\max} - x^k\} \end{aligned}$$

4. Determinar $\theta_k \in [0, \theta^{\max}]$
5. Se $A_{red} \geq 0.1P_{red}$,
 - (a) $x^{k+1} \leftarrow x^k + s_c$
 - (b) Se $A_{red} \geq 0.5P_{red}$, $\delta_{k+1} = \min\{2.5\delta_k, \|x^{\max} - x^{\min}\|_{\infty}\}$
 - (c) Senão, $\delta_{k+1} \leftarrow \delta_{\min}$
 - (d) $\theta^{\max} \leftarrow 1$
6. Senão
 - (a) $\delta_{k+1} \leftarrow 0.25\|s_c\|_{\infty}$
 - (b) $x^{k+1} \leftarrow x^k$
 - (c) $\theta^{\max} \leftarrow \theta^k$.

Essas etapas são repetidas até que o algoritmo atinja algum critério de parada.

Convergência do algoritmo PLS. O algoritmo pode encerrar suas iterações de três maneiras diferentes (Sene, 2009). Partindo disso, é possível mostrar que todo ponto de acumulação (ou ponto limite) da sequência de $\{x^k\}$ é φ -estacionário, ou seja, que atende as condições de KKT para o problema da Eq. (27). O resultado é dado no Teorema demonstrado em (Gomes et al., 2011).

Teorema 1. *Seja $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência infinita limitada gerada pelo Algoritmo PLS, e seja $\tilde{s}_n$ o vetor obtido no passo 2c do Algoritmo PLS de maneira que*

$$\|\tilde{s}_n\|_2 \leq \mathcal{O}(\|C(x^k)\|_2).$$

Então, todos os pontos de acumulação de $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ são φ -estacionários. Além disso, se todos os pontos de acumulação $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ são viáveis e regulares, existe um ponto de acumulação x^ que é estacionário para o problema da Eq. (22). Em particular, se todos os pontos φ -estacionários são viáveis e regulares, existe uma subsequência de $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge para um ponto estacionário regular da Eq. (22).*

3.1 O algoritmo para o Problema de Otimização Topológica

O algoritmo elaborado para resolver o problema de Otimização Topológica foi implementado em Fortran. A matriz de rigidez e o vetor deslocamento foram obtidos a partir do sistema linear $KU = F$, resolvido com Gradientes Conjugados, levando em consideração a esparsidade da matriz de rigidez. A sequência de subproblemas lineares foram resolvidos com o ALGEN-CAN (Tango Project, 2017).

A Fig. 4 representa um fluxograma com respeito as etapas do algoritmo.

Os dados iniciais fomentados ao algoritmo são: as dimensões do domínio de projeto (em x e y); v_f que é a fração de volume que servirá como restrição de material à estrutura; a penalidade p do método SIMP; o raio $r_{\min}$ para a atuação do filtro; δ^0 e $\delta_{\min}$, os valores relacionados a região de confiança; E que é o módulo de rigidez do material; e ν o coeficiente de Poisson, que varia de 0 a 1.



Figura 4: Fluxograma do algoritmo

Na inicialização são geradas as densidades iniciais, que possuirão como valor inicial v_f . Além disso, é gerado também a matriz de rigidez k_e de um elemento, dada pela Eq. (12) e as constantes $\hat{H}_{ij}$, dadas pela Eq. (21).

De posse desses valores o algoritmo inicia a análise dos elementos finitos, obtendo a matriz de rigidez $K(x)$ dada pela Eq. (16), e os deslocamentos $U(x)$ obtidos usando a restrição tecnológica dada pela Eq. (14). Em seguida, são obtidos os valores da função objetivo e de seu gradiente, etapa chamada de análise de sensibilidades. O filtro é então aplicado e finalmente realizamos a etapa de otimização, atualizando assim as variáveis. O processo é repetido até que o critério de parada seja atingido. Nesta implementação, o algoritmo irá convergir caso a variação das variáveis seja inferior a 1%, ou seja

$$\|x^k - x^{k+1}\|_{\infty} < 0.01.$$

4 TESTES NUMÉRICOS

Os testes numéricos envolveram três situações de domínios de projetos: 60×20 , 120×40 e 120×40 com um buraco, representando, por exemplo, a passagem de uma tubulação na viga.

Comparamos a topologia final obtida, utilizando o método da PLS e o Critério da Otimalidade, implementado por Andreassen et al. (2011), e também a atuação dos dois filtros abordados neste trabalho. As figuras a seguir mostram os resultados obtidos, sendo que as topologias à esquerda são as referentes ao método da PLS, e à direita, ao Critério da Otimalidade. Os parâmetros de entrada foram $\nu = 0.3$, $E = 1$, $p = 3$, V_{max} dado pela Eq. (17) com $v_f = 0.5$, raios da região de confiança $\delta_0 = 0.1$ e $\delta_{min} = 0.05$. O raio de atuação do filtro foi de 5% do maior lado do domínio de projeto, ou seja, $r_{min} = 3$ e $r_{min} = 6$ para os domínios de projeto de 60×20 e 120×40 , respectivamente.

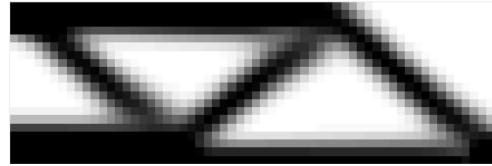
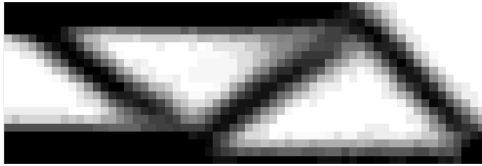


Figura 5: Domínio de projeto 60×20 , filtro do vetor gradiente

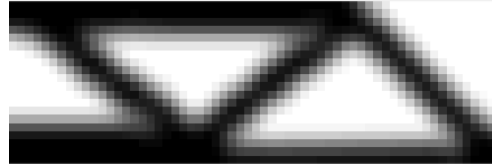
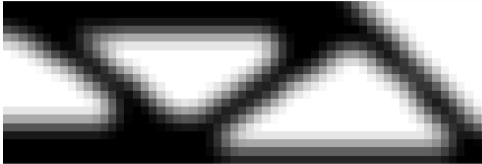


Figura 6: Domínio de projeto 60×20 , filtro da média ponderada das densidades

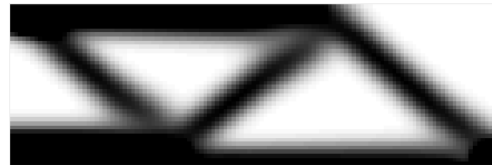


Figura 7: Domínio de projeto 120×40 , filtro do vetor gradiente



Figura 8: Domínio de projeto 120×40 , filtro da média ponderada das densidades

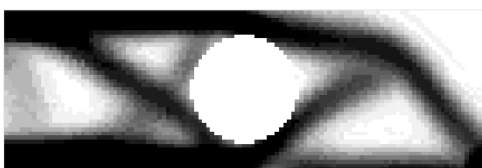


Figura 9: Domínio de projeto 120×40 , filtro do vetor gradiente, com buraco

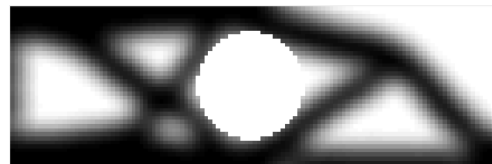


Figura 10: Domínio de projeto 120×40 , filtro da média ponderada das densidades, com buraco

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado a modelagem matemática de um problema de otimização topológica, bem como alguns aspectos da Programação Linear Sequencial, que foi o método de otimização utilizado para resolver o problema apresentado nos testes numéricos.

Pelas Fig. 5, 6, 7 e 8, podemos observar que as topologias geradas para ambos os métodos e filtros são bastante semelhantes. Dessas, única estrutura que demonstrou diferenças entre os métodos de otimização foi na Fig. 8, na qual para a PLS, a estrutura apresentou uma formação de barras menores na parte superior. Observamos que isto foi ocasionado pelo raio $r_{\min}$ da atuação do filtro, visto que um raio maior homogeniza uma maior área para a distribuição de material no local.

Quanto às Fig. 9 e 10, o filtro das densidades apresentou estruturas com um maior número de barras. Além disso, na Fig. 10 o método do Critério da Otimalidade e PLS geraram topologias levemente diferentes. É um fato que o problema tem muitos minimizadores, e que uma mudança de metodologia pode levar a resultados diferentes.

Uma vantagem da PLS sobre o Critério da Otimalidade é que o segundo é um método sem teoria formal de convergência. Isso não se observa com a PLS, que possui uma boa teoria de convergência quando sujeita a certas hipóteses.

Podemos observar a importância da otimização topológica no contexto da engenharia. Além da capacidade de gerar concepções estruturais ótimas, ela se mostra bastante versátil quanto aos problemas que podem ser resolvidos. Devemos ressaltar também a importância de diferentes métodos de otimização, que não só podem gerar soluções distintas, mas também podem ter uma melhor aplicabilidade ou implementação a um problema com características específicas.

REFERÊNCIAS

- Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B. & Sigmund, O., 2011. *Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code*. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 43, n. 1, pp. 1–16.
- Bendsoe, M. P., & Ole, S., 2004. *Topology optimization by distribution of isotropic material*. Springer Berlin Heidelberg. pp. 1–69.
- Bourdin, B., 2001. *Filters in topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, n. 9, pp. 2143–2158.
- Dunning, P. D., & Kim, A., 2015. Introducing the sequential linear programming level-set method for topology optimization Structural Multidisc. Optimization, 51, pp. 631–643.
- Gomes, F. A. M., & Senne, Thadeu A., 2011. *An SLP algorithm and its application to topology optimization*. Computational & Applied Mathematics, v. 30, n. 1, pp. 53–89.
- Giacchini, B. L., 2012. *Uma breve introdução ao Método dos Elementos Finitos*. Departamento de Matemática: Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Jog, C. S., & Haber, R. B., 1996. *Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design*. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 130, n. 3–4, pp. 203–226.

- Kuhn, H. W., & Tucker, A. W., 1951. *Nonlinear Programming*. Proceedings Of The Second Berkeley Symposium On Mathematical Statistics And Probability, Berkeley, pp. 481-492.
- Michell, A. G. M., 1904. The limits of economy of material in framed structures. *Philosophical Magazine*, 8(6), pp. 589–597.
- Ribeiro A. A., & Karas E. W., 2013. *Otimização Contínua Aspectos Teóricos e Computacionais*. Cengage Learning, São Paulo.
- Senne, T. A., 2009. *Otimização topológica de mecanismos flexíveis*. Dissertação de Mestrado, UNICAMP.
- Sigmund, O., 1994. *Design of material structures using topology optimization*. Tese de Doutorado. Technical University of Denmark.
- TANGO Project. ALGENCAN Version 2.4.0. 2017. <https://www.ime.usp.br/egbirgin/tango>.
- Wright, S. J., & Nocedal, J., 1999. *Numerical optimization*. Springer Science, v. 35, n. 67-68.