



UM ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO DE VIBRAÇÕES LIVRES EM CASCAS CILÍNDRICAS PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO

Davidson de Oliveira França Júnior

Lineu José Pedroso

Neander Berto Mendes

davidson.francajunior@gmail.com

lineu@unb.br

neanderberto@hotmail.com

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental - Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) – Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF, Brasil.

Resumo. *As cascas cilíndricas são normalmente caracterizadas por uma estrutura esbelta bastante utilizada na engenharia civil, indústria mecânica, naval, aeroespacial, e outras áreas. Esse tipo de estrutura é utilizada na construção de silos para armazenagem de sólidos, plataformas off-shore, reservatórios, tanques para estocagem de fluidos, entre outros. Em consequência, destaca-se a importância da análise estrutural dinâmica nesse tipo de estrutura. Para esta análise têm-se como base as soluções analíticas apresentadas por Soedel (2005) e pelos estudos realizados por Sharma e Johns (1971). Assim, este trabalho realiza uma análise dinâmica de cascas cilíndricas em vibrações livres, investigando as frequências naturais e modos de vibração para este tipo de estrutura. Os resultados analíticos da casca, para diferentes condições de contorno, são comparados com os resultados numéricos obtidos pelo método dos elementos finitos, através do software SAP2000. Os resultados comparativos conduzem a valores muito semelhantes, não existindo praticamente nenhuma diferença entre resultados encontrados analiticamente e numericamente.*

Palavras-chave: *Vibrações Livres, Casca Cilíndrica, Método dos Elementos Finitos, SAP2000.*

1 INTRODUÇÃO

As estruturas em geral têm como papel principal transmitir as cargas verticais, horizontais e solicitações dinâmicas para o solo através dos seus elementos estruturais com uma adequada capacidade resistente e um bom desempenho em serviço. No Brasil, cada vez mais as construções possuem uma arquitetura mais arrojada, impondo assim elementos estruturais ainda mais esbeltos, com grandes vãos e maiores curvaturas. Desta forma, aparecem as cascas cilíndricas, que são caracterizadas por uma estrutura esbelta bastante utilizada na engenharia civil, indústria mecânica, naval, aeroespacial e outras áreas.

Destaca-se também que esse tipo de estrutura é empregado em silos para armazenagem de sólidos, plataformas *off-shore*, reservatórios, adutoras, tanques para estocagem de fluidos, tubulação para diversos fluidos, entre outros. Portanto é fácil observar a importância da análise estrutural estática e dinâmica desse tipo de estrutura.

Assim, tendo-se como base as soluções analíticas apresentadas por Soedel (2005) e os estudos realizados por Sharma e Johns (1971), este trabalho procura contribuir na análise dinâmica de cascas cilíndricas em vibrações livres, apresentando e comparando essas formulações, em termos de frequências naturais e modos de vibração sob diferentes condições de contorno da casca. Logo, esse trabalho contribui de forma significativa para análise dinâmica de cascas cilíndricas, pois Sharma e Johns (1971) apresentam apenas os resultados para uma casca com condição de contorno engastada-livre.

Finalmente, os resultados analíticos são comparados com os resultados numéricos, obtidos pelo método dos elementos finitos (MEF) através do *software* SAP2000. Além disso, este trabalho também estuda a resposta dinâmica para diferentes parâmetros geométricos da casca, de modo que é possível confrontar as duas técnicas analíticas citadas com os resultados numéricos para diferentes relações geométricas entre comprimento/raio (L/R) da casca.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversas pesquisas sobre o comportamento estático e dinâmico de cascas cilíndricas têm sido realizadas no decorrer dos anos, sendo fundamentada em teorias clássicas, tais como as técnicas analíticas propostas por Love (1888), Donnell (1933), Flugge (1934), Mushtari (1938), Reissner (1941), Sanders (1959), Timoshenko (1959), entre outros. As diferentes técnicas analíticas propostas diferem entre si por fatores, como por exemplo, as deformações assumidas para a casca como também pelos métodos de solução do problema.

A partir da base teórica consolidada nas teorias clássicas, muitos artigos sobre vibrações de livres de cascas cilíndricas foram desenvolvidos ao longo do tempo, tratando não somente da estrutura da casca cilíndrica, mas também acrescentando mais variáveis ao problema, como por exemplo, os estudos realizados por [Sharma e Johns (1971), Lakis e Paidoussis (1971), Chiba et al. (1984), Amabili (1996), Kim et al. (2003), Soedel (2005), Mendes (2013), Lopez (2014), Mendes et al. (2014), Mendes et al. (2015) e Mendes et al. (2016)], que incorporam nas análises a presença de fluido e/ou a influência de anel enrijecedor, e ainda, da interação nas bordas das paredes da casca com outros elementos estruturais tais como placas de fundo e/ou tampa.

A literatura de vibrações livres em cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno é bastante restrita, pois a grande maioria dos estudos abordam cascas cilíndricas com condição de contorno apoiada-apoiada nas extremidades. Assim, dentre os diferentes trabalhos que contemplam diferentes condições de contorno na análise dinâmica de cascas cilíndricas pode-se destacar os estudos realizados por Forsberg (1964), no qual estudou a influência das condições de contorno apoiada-apoiada e engastada-engastada nas frequências naturais quando sob influência da restrição axial para ambas as extremidades da casca. Koga (1988) apresentou um método assintótico que incorpora a análise da resposta dinâmica, uma casca com condições de contorno livre-livre, apoiada-apoiada com e sem restrição axial.

Pedroso et al. (1994) elaborou um algoritmo baseado no método das diferenças finitas para a análise de vibrações livres de cascas cilíndricas para diferentes condições de contorno. Soluções analíticas e resultados experimentais foram utilizados junto às simulações numéricas, para o qual os resultados apresentaram uma boa correlação.

Dai et al. (2012) desenvolveu uma solução exata em série para a análise de vibração livre em cascas cilíndricas para condições de contorno arbitrárias. As equações elásticas foram baseadas na teoria de Flugge e os três deslocamentos da casca foram representados por uma série de Fourier e funções auxiliares. Com isso, os valores de parâmetro de frequência foram comparados com os resultados obtidos através do método dos elementos finitos e com os resultados já abordados em teorias clássicas. Outros tantos estudos foram repertoriados na literatura, mas deixam de ser mencionados uma vez que pouco contribuíram ao presente trabalho.

3 FORMULAÇÃO TEÓRICA

3.1 Teoria de Soedel

A casca cilíndrica é composta de paredes delgadas de comprimento L , raio médio R , ângulo radial ϕ e espessura h . O material da casca é considerado como sendo elástico com módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν e massa específica ρ . As coordenadas do vetor deslocamento na superfície da casca na direção axial, circunferencial e radial são respectivamente u , v e w . A Figura 1 apresenta a geometria da casca cilíndrica.

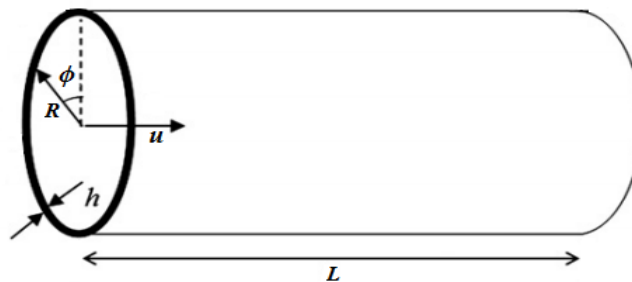


Figura 1. Geometria da casca cilíndrica (Dai, 2012, modificada).

Na determinação das equações de equilíbrio dinâmico Soedel (2005) realiza a análise de um elemento infinitesimal da casca, uma vez que todas as cargas atuantes são supostamente agindo na superfície média. Assim, tendo como base as forças internas de membrana e os

momentos fletores na superfície, parte-se da segunda lei de Newton, ou seja, $\sum F = m.a$ e para cada direção do elemento infinitesimal têm-se as seguintes equações de equilíbrio dinâmico da casca cilíndrica.

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_{\phi z}}{\partial \phi} + P_z - \rho.h \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_\phi}{R} + P_\phi - \rho.h \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - \frac{N_\phi}{R} + P_r - \rho.h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Para determinar a solução das equações diferenciais de movimento, Soedel (2005) assume como solução das equações os seguintes deslocamentos u , v e w .

$$u(z, \phi, t) = u(z, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (4)$$

$$v(z, \phi, t) = v(z, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (5)$$

$$w(z, \phi, t) = w(z, \phi) \cdot e^{j\omega t} \quad (6)$$

Sendo que $e^{j\omega t}$ é a parcela do tempo na solução das equações, $u(z, \phi)$, $v(z, \phi)$ e $w(z, \phi)$ são as deformadas modais (modos de vibração). As soluções mostradas se caracterizam por uma separação de variáveis, em que e é a base dos logaritmos neperianos, $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, ω é a frequência natural de vibração e t é o tempo. Onde P_z , P_ϕ e P_r são iguais a zero para análise em vibrações livres (movimentos da estrutura sem nenhuma força aplicada).

Por conseguinte, substituindo as equações 4, 5 e 6 nas equações 1, 2 e 3, e ainda, chamando simplificadaamente $u(z, \phi)$, $v(z, \phi)$ e $w(z, \phi)$ por u , v e w tem-se finalmente no domínio da frequência as seguintes equações:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi z}}{\partial \phi} + \rho h \omega^2 u = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial N_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_\phi}{R} + \rho h \omega^2 v = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - \frac{N_\phi}{R} + \rho h \omega^2 w = 0 \quad (9)$$

Sendo:

$$Q_\phi = \frac{\partial M_{z\phi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad Q_z = \frac{\partial M_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\phi z}}{\partial \phi} \quad (10)$$

Soedel (2005) se baseia na teoria de cascas delgadas de Love, sendo as deformações e as curvaturas assumidas na superfície média da casca dadas por:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{\phi z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (11)$$

$$\chi_z = -\frac{\partial \beta_z}{\partial z}, \quad \chi_\phi = \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\phi}{\partial \phi}, \quad \chi_{z\phi} = \frac{\partial \beta_\phi}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_z}{\partial \phi} \quad (12)$$

Onde:

$$\beta_z = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{e} \quad \beta_\phi = \frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (13)$$

As relações entre os esforços de membrana e de flexão têm como base as respectivas deformações. Assim, os esforços normais e momentos fletores são dados por:

$$N_Z = k(\varepsilon_{zz} + \nu \varepsilon_{\phi\phi}) \quad (14)$$

$$N_\phi = k(\varepsilon_{\phi\phi} + \nu \varepsilon_{zz}) \quad (15)$$

$$N_{Z\phi} = K \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{\phi z} \quad (16)$$

$$M_Z = D(\chi_Z + \nu \chi_\phi) \quad (17)$$

$$M_\phi = D(\chi_\phi + \nu \chi_z) \quad (18)$$

$$M_{Z\phi} = D \frac{(1-\nu)}{2} \chi_{\phi z} \quad (19)$$

Sendo:

K a rigidez de membrana e D a rigidez flexional definidas por:

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (20)$$

Com base nas equações 4, 5 e 6 é possível analisar somente as deformadas modais u , v e w , sendo que Soedel (2005) admite como solução para as deformações da superfície média da casca as seguintes equações:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \left(\frac{\partial}{\alpha_m \partial z} \right) \cos[n(\phi - \psi)] \\ B \sin[n(\phi - \psi)] \\ C \cos[n(\phi - \psi)] \end{Bmatrix} \phi_m(z) \quad (21)$$

Sendo A , B e C constantes que descrevem a amplitude dos deslocamentos axial (u), circunferencial (v) e radial (w) respectivamente. A parcela $\phi_m(z)$ representa as funções modais axiais, com as condições de contorno nas extremidades da casca. As funções de viga geralmente são usadas neste caso e α_m é um coeficiente que depende da condição de contorno. O número de meias-ondas longitudinal é m e o número de ondas circunferenciais é n .

Para um cilindro apoiado em ambas às extremidades sem restrição axial é empregado o modo de vibração de uma viga bi apoiada, de coeficiente $\alpha_m = m\pi/L$, definido por:

$$\phi_m = \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \quad (22)$$

Desta forma, substituindo a equação 22 no sistema de equações 21 tem-se para as deformadas modais da casca as seguintes expressões apresentadas por Soedel (2005):

$$u(z, \phi) = A \cos\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (23)$$

$$v(z, \phi) = B \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \text{sen}[n(\phi - \psi)] \quad (24)$$

$$w(z, \phi) = C \text{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \cos[n(\phi - \psi)] \quad (25)$$

Uma vez assumida as soluções para o comportamento dinâmico da casca cilíndrica bi-apoiada (Eq. 23 a 25), é então substituída nas equações das deformações e curvaturas (Eq. 11 a 13), que por sua vez, é substituída nas equações que representam as forças de membrana e momentos de flexão da casca (Eq. 14 a 19) e, por conseguinte, substituída nas equações governantes do problema (Eq. 7 a 11), sendo essas últimas sendo expressas da seguinte forma:

$$\left\{ \rho h \omega^2 - K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \right\} A + \left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) B + \left(K \frac{\nu}{R} \frac{m\pi}{L} \right) C = 0 \quad (26)$$

$$\left(K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) A + \left\{ \rho h \omega^2 - \left(K + \frac{D}{R^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \right\} B + \left\{ -\frac{K}{R} \frac{n}{R} - \frac{D}{R} \frac{n}{R} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \right\} C = 0 \quad (27)$$

$$\left(\frac{nK}{R} \frac{m\pi}{L} \right) A + \left\{ -\frac{K}{R} \frac{n}{R} - \frac{D}{R} \frac{n}{R} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \right\} B + \left\{ \rho h \omega^2 - D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] - \frac{K}{R^2} \right\} C = 0 \quad (28)$$

Ou na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \rho h \omega^2 - k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & \rho h \omega^2 - k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & \rho h \omega^2 - k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (29)$$

Em que:

$$k_{11} = K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right], \quad k_{12} = k_{21} = K \frac{1+\nu}{2} \frac{m\pi}{L} \frac{n}{R}, \quad k_{13} = k_{31} = K \frac{\nu}{R} \frac{m\pi}{L} \quad (30)$$

$$k_{22} = \left(K + \frac{D}{R^2} \right) \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right], \quad k_{23} = k_{32} = -\frac{K}{R} \frac{n}{R} - \frac{D}{R} \frac{n}{R} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \quad (31)$$

$$k_{33} = D \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 + \frac{K}{R^2} \quad (32)$$

Para uma solução não trivial o determinante da matriz apresentada na eq. 29 tem que ser igual à zero, no qual se obtém o seguinte polinômio característico.

$$\omega^6 + a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3 = 0 \quad (33)$$

Onde:

$$a_1 = -\frac{1}{\rho h} (k_{11} + k_{22} + k_{33}) \quad (34)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\rho h)^2} (k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33} + k_{11}k_{22} - k_{23}^2 - k_{12}^2 - k_{13}^2) \quad (35)$$

$$a_3 = \frac{1}{(\rho h)^3} (k_{11}k_{23}^2 + k_{22}k_{13}^2 + k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{23}k_{13} - k_{11}k_{22}k_{33}) \quad (36)$$

Por fim, as raízes da equação característica que caracterizam as frequências naturais da casca cilíndrica são dadas por:

$$\omega_{1m,n} = \sqrt{-\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha}{3} - \frac{a_1}{3}\right)} \quad (37)$$

$$\omega_{2m,n} = \sqrt{-\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{3} - \frac{a_1}{3}\right)} \quad (38)$$

$$\omega_{3m,n} = \sqrt{-\frac{2}{3} \sqrt{a_1^2 - 3a_2} \cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{3} - \frac{a_1}{3}\right)} \quad (39)$$

$$\text{Onde: } \alpha = \cos^{-1} \frac{27a_3 + 2a_1^3 - 9a_1a_2}{2\sqrt{(a_1^2 - 3a_2)^3}} \quad (40)$$

Segundo Soedel (2005), as três frequências naturais são associadas a cada combinação de m ($m=1, 2, 3\dots$) e n ($n=1, 2, 3\dots$). Com isso, a frequência mais baixa está associada ao modo em que a componente transversal predomina, por outro lado, as outras duas componentes apresentam as maiores frequências. Uma vez dispondo das frequências naturais da estrutura podem-se determinar então as deformadas modais da casca cilíndrica com base no sistema de

equações 29. Resolvendo A e B em função da variável C tem-se que as formas modais combinadas que são associadas as três frequências naturais são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{i,m,n} = C_{i,m,n} \begin{Bmatrix} \frac{A_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \cos\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \cos[n(\phi-\psi)] \\ \frac{B_{i,m,n}}{C_{i,m,n}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \operatorname{sen}[n(\phi-\psi)] \\ \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L}z\right) \cos[n(\phi-\psi)] \end{Bmatrix} \quad (41)$$

3.2 Teoria de Sharma e Johns

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos realizados na técnica analítica apresentada por Sharma e Johns (1971), no qual o problema foi formulado usando a técnica de Rayleigh-Ritz para obter uma solução analítica aproximada para diferentes condições de contorno a partir das funções modais de viga e as deformações assumidas para a casca são embasadas na teoria de Flugge (1967).

O grande diferencial dessa técnica é caracterizado por supor que a deformação por cisalhamento na casca é zero, logo a relação entre o comprimento e raio (L/R) assumidos para a casca tem influência direta com os resultados obtidos. Inicialmente, as deformações na superfície da casca assumidas para a respectiva direção longitudinal, circunferencial e radial são descritas nas equações a seguir:

$$u = -C \frac{R}{n^2} \varphi_m(z) \cos(n\phi) \cos(\omega t) \quad (42)$$

$$v = -C \frac{1}{n} \varphi_m(z) \operatorname{sen}(n\phi) \cos(\omega t) \quad (43)$$

$$w = C \varphi_m(z) \cos(n\phi) \cos(\omega t) \quad (44)$$

Onde ω é a frequência natural circular da casca, n é o número de ondas circunferenciais, m é o número de semi-ondas longitudinais, φ_m é a deformada modal de viga para diferentes condições de contorno, ϕ é o ângulo circunferencial da casca, R é o raio, t é o tempo e C é a constante de amplitude modal. Aplicando a técnica de Rayleigh-Ritz, a frequência natural da casca é determinada igualando-se o determinante da seguinte matriz a zero.

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \Delta I_2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \Delta & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (45)$$

Sendo:

$$A_{11} = \lambda_m^2 + (1+\beta)(1-\nu)n^2 I_2 / 2 \quad (46)$$

$$A_{12} = -\nu n \lambda_m I_1 - (1-\nu)n \lambda_m I_2 / 2 \quad (47)$$

$$A_{13} = -\nu \lambda_m I_1 + \beta \lambda_m \left[-\lambda_m^2 + (1-\nu) n^2 I_2 / 2 \right] \quad (48)$$

$$A_{22} = n^2 + (1+3\beta)(1-\nu) \lambda_m^2 I_2 / 2 \quad (49)$$

$$A_{23} = n + \beta n \lambda_m^2 \left[\nu I_1 + 3(1-\nu) I_2 / 2 \right] \quad (50)$$

$$A_{33} = 1 + \beta \left[\lambda_m^4 + (n^2 - 1)^2 + 2\nu n^2 \lambda_m^2 I_1 + 2(1-\nu) n^2 \lambda_m^2 I_2 \right] \quad (51)$$

Onde:

$$\lambda_m = P_m R, \quad P_m = \frac{\lambda_i}{L} \quad (52)$$

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_0^L P_m^2 \left[\int \phi_m(z) dz \right]^2 dz \quad (53)$$

$$I_2 = \frac{1}{L} \int_0^L [\phi_m'(z)]^2 dz \quad (54)$$

Destaca-se que λ_i é um coeficiente obtido com base na equação transcendental para cada condição de contorno. As integrais representadas pelas equações 53 e 54 dependem da função de viga assumida para o modo longitudinal, ou seja, uma vez substituída as diferentes funções de viga para respectivas condições de contorno, pode-se então determinar a solução analítica para a casca cilíndrica. Tem-se ainda que, resolvendo o determinante da matriz igual a zero o polinômio característico com base no parâmetro de frequência é dado por:

$$\Delta = \lambda_{m,n}^2 = \frac{\lambda_m^4 + \beta n^2 \lambda_m^2 \left[\lambda_m^2 n^2 + 2\nu n^2 (n^2 - 1) I_1 + 2(1-\nu) (n^2 - 1)^2 I_2 \right] + \beta n^4 (n^2 - 1)^2}{\lambda_m^2 I_2 + n^2 (n^2 + 1)} \quad (55)$$

Sendo:

$$\beta = \frac{h^2}{12R^2} \quad (56)$$

$$\Delta = \frac{\rho R^2 (1-\nu^2) \omega^2}{E} \quad (57)$$

A frequência natural adimensional pode também ser expressa em Hertz, dada por:

$$F_{m,n} = \frac{\lambda_{m,n}}{2\pi R} \left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (58)$$

Sendo $m=1,2,3,\dots$ o número de semi-ondas longitudinais, $n=2,3,4,\dots$ o número de ondas circunferenciais, E é o módulo de elasticidades, R é o raio médio da superfície, ρ é a massa específica do material da casca e ν é o coeficiente de Poisson.

Os modos de viga são correlacionados ao efeito de flexão na direção longitudinal, porém quando incorporado nas equações da casca fornece, juntamente com as deformações assumidas para os modos azimutais, a deformada completa para a casca cilíndrica para os diferentes números de nodos m e n sob as respectivas condições de contorno. Para a solução analítica através de diferentes condições de contorno, parte-se dos modos de viga e dos

respectivos coeficientes das equações transcendentais apresentada por Blevins (1979) no livro *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*.

Tabela 1. Modos de vibração longitudinal em vigas

Condição de contorno	Modo de vibração longitudinal (φ_m)
Apoiada-Apoiada	$\text{sen}\left(\frac{m\pi z}{L}\right)$
Apoiada-Livre	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Engastada-Engastada	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Engastada-Livre	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Engastada-Apoiada	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$
Livre-Livre	$\cosh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) - \sigma_i \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) + \text{sen}\left(\frac{\lambda_i z}{L}\right) \right]$

4 INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS

Nesta seção apresentam-se os procedimentos realizados na análise numérica através do *software* baseado em elementos finitos SAP2000. Para a análise dinâmica da casca cilíndrica o elemento *Shell-Thin* é utilizado na modelagem, sendo este caracterizado por um elemento finito quadrilátero com quatro nós, possuindo seis graus de liberdade em cada nó. As capacidades desse elemento incluem efeitos de flexão, torção e forças de membrana da casca cilíndrica.

Com a modelagem através do elemento *Shell* o *software* SAP2000 realiza a análise de vibração livre da estrutura através da análise modal. Essa análise é fundamental para se determinar as frequências naturais e o comportamento da estrutura na análise numérica. O *software* realiza a análise modal através da rotina *Eigenvector*, ou seja, determina os auto-valores e auto-vetores de forma direta sem amortecimento. Estes modos naturais de vibração representam adequadamente o comportamento da estrutura quando empregado o nível de refinamento adequado para a malha em elementos finitos (CSi Analysis Reference Manual, 2015).

Com a finalidade de se obter boas soluções numéricas através do Método dos Elementos Finitos no *software* SAP2000 o estudo de convergência das malhas adotadas para a casca foi realizado. Assim, o erro percentual dos resultados numéricos quando comparados com os resultados analíticos é dado por:

$$Erro(\%) = \left| \frac{\omega_{ANALÍTICO} - \omega_{NUMÉRICO}}{\omega_{ANALÍTICO}} \right| \cdot 100 \quad (59)$$

Nas análises, as seguintes propriedades dos materiais foram adotadas: a casca é feita de aço com módulo de Young $E=210$ GPa, razão de Poisson $\nu=0,3$ e massa específica $\rho=7680$ Kg/m³. Inicialmente foi estudada uma casca cilíndrica com espessura de 1,5 mm, comprimento (L) 665 mm e raio (R) de 175 mm, ou seja, uma relação L/R de 3,8.

Para a condição de contorno apoiada-apoiada sem restrição axial foi realizado quatro níveis de refinamento da malha em elementos finitos e comparada com os resultados obtidos pela técnica analítica de Soedel (2005). Na figura 2 são mostrados os quatro níveis de refinamento da malha realizados na modelagem da casca e os respectivos números de divisões na direção longitudinal e circunferencial.

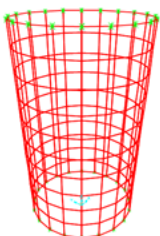
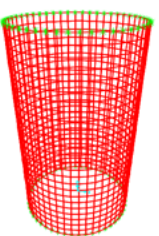
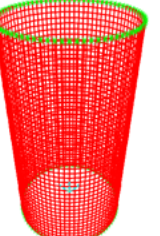
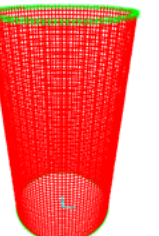
Modelo	Nível de Refinamento da Malha (Nº de divisões na altura x Nº de divisões na circunferência)			
	1 (10 x 20)	2 (25 x 50)	3 (40 x 80)	4 (60 x 100)
Estrutura da casca cilíndrica no SAP2000				

Figura 2. Estrutura da casca cilíndrica para o refinamento da malha.

Com base na análise numérica da estrutura para diferentes níveis de refinamento foi possível realizar o estudo de convergência da malha que apresentam as extremas frequências (mínimas e máximas) para os modos arbitrários em estudo adotados. A figura 3 mostra a convergência dos resultados para os diferentes níveis de refinamento da malha.

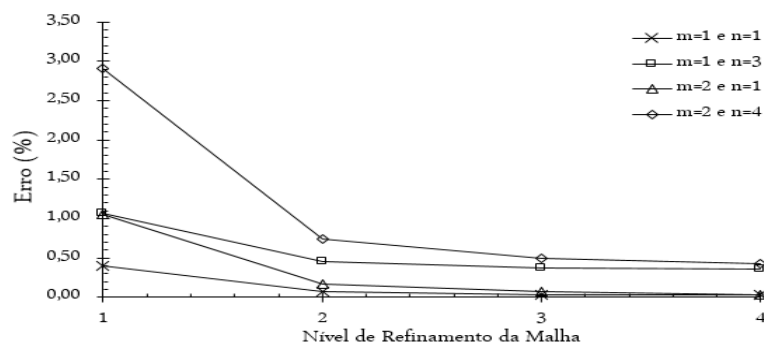


Figura 3. Estudo da convergência na análise numérica.

Com base na figura 3, pode-se observar que o erro entre a técnica analítica de Soedel (2005) e os valores numéricos é pequeno. Destaca-se ainda que à medida que a malha vai sendo mais refinada, para as combinações modais em estudo, o erro vai diminuindo e convergindo a valores constantes e pequenos. Desta forma, os resultados finais empregados

nas comparações foram os da malha quatro, pois esta apresenta um menor percentual de erro quando comparado com a técnica analítica citada.

Uma vez determinado o nível adequado de refinamento da malha para esta geometria de casca, foi possível então estender a relação entre os níveis de subdivisão longitudinal e circunferencial dos elementos da malha para outras geometrias de casca e, consequentemente, realizar o estudo paramétrico da casca com diferentes relações geométricas. Assim, para as outras geometrias de casca o raio foi mantido fixo de valor $R=175$ mm e variando-se o comprimento (L) de acordo com as seguintes relações (L/R) mostradas na figura 4 a seguir.

Modelo	Relação Geométrica L/R (Nº de divisões na altura x Nº de divisões na circunferência)			
	0,5 (8 x 100)	1 (16 x 100)	2 (32 x 100)	3 (48 x 100)
Estrutura da Casca Cilíndrica no SAP2000				
	3,8 (60 x 100)	5 (79 x 100)	10 (158 x 100)	15 (237 x 100)
				

Figura 4. Modelagens realizadas para diferentes relações geométricas da casca.

Com as diferentes modelagens da casca cilíndrica validadas foi possível alterar as condições de contorno nas extremidades da casca e obter os respectivos resultados pelo método numérico e comparar com as técnicas analíticas em estudo. A figura 5 mostra um fluxograma com a sequência das etapas realizadas neste trabalho.

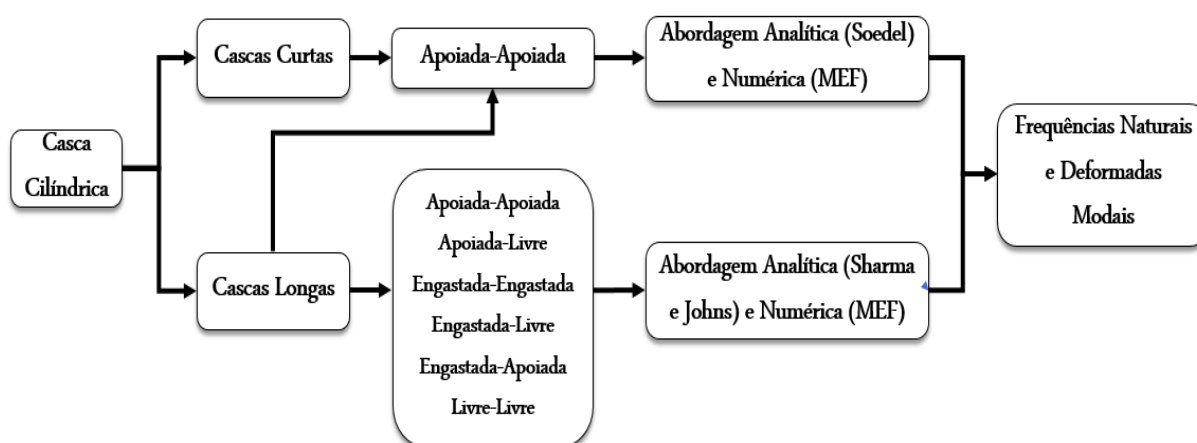


Figura 5. Fluxograma com a metodologia realizada.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 Casca bi-apoiada sem restrição axial

A primeira condição de contorno em estudo é uma casca bi-apoiada em ambas extremidades sem restrição axial. Para esta condição de contorno, é empregada a técnica analítica de Soedel (2005), a técnica de Sharma e Johns (1971) e os valores obtidos na análise numérica. Na tabela 2, são apresentados os resultados das frequências naturais, analíticas pela teoria de Soedel e numéricas pelo MEF, para uma casca com relação $L/R=3,8$, ou seja, $L=0,665$ m, $R=0,175$ m, $h=0,001$ m, $E=2 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0,3$ e $\rho=7680$ kg/m³, sendo que (i, m, n) é o índice e respectivas combinações modais.

Tabela 2. Comparativo entre os valores das frequências naturais da casca cilíndrica obtidas pela técnica analítica de Soedel e MEF.

i	m	n	$F_{i,m,n}$	$F_{i,m,n}$	Erro (%)
			Analítico (Hz)	Numérico (Hz)	
1	1	1	1343,01	1342,61	0,03
1	1	2	600,63	600,68	0,01
1	1	3	316,05	317,17	0,36
1	1	4	215,42	221,17	2,67
1	2	1	2917,71	2916,66	0,04
1	2	2	1703,62	1704,12	0,03
1	2	3	1026,14	1027,28	0,11
1	2	4	668,35	671,17	0,42

Com base na tabela 2, as frequências naturais da estrutura mostram uma boa aproximação entre resultados analíticos e numéricos. Destaca-se ainda que, para as primeiras semi-ondas longitudinais (m) e $i=1$, uma relação entre as frequências naturais analíticas da casca e o número de ondas circunferenciais (n) é mostrada na figura 6.

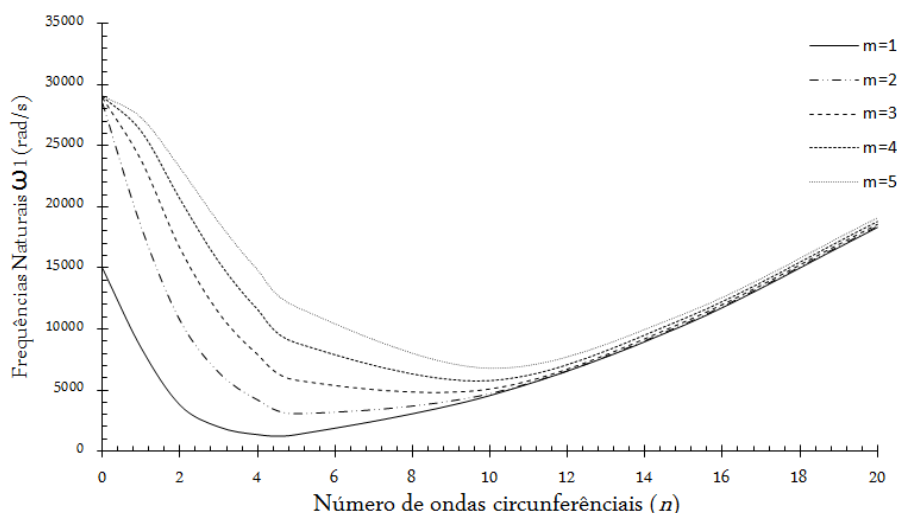


Figura 6. Relação entre as frequências naturais vs número de ondas circunferenciais obtidas através da técnica analítica de Soedel.

Com base na figura 6 é possível observar que as menores frequências naturais da casca cilíndrica não ocorrem necessariamente para valores pequenos de n (número de onda circunferenciais). Por outro lado, as frequências naturais aumentam de acordo o parâmetro m (número de semi-ondas longitudinais) cresce. Nesse sentido, é possível notar que as frequências mais baixas para a estrutura dependem diretamente das relações geométricas entre o L/R (comprimento/raio) e h/R (espessura/raio).

Destaca-se ainda que à medida que n cresce as frequências naturais tendem para valores comuns independentemente do número de semi-ondas longitudinais (m), ou seja, o comportamento da casca é dominado por energia de flexão. Vale ressaltar que as frequências mostradas na figura 5 estão associadas ao índice $i=1$, ou seja, as frequências predominantemente radiais. A figura 7 mostra todas as frequências com índice $i=1$ (radial), $i=2$ (circunferencial) e $i=3$ (axial).

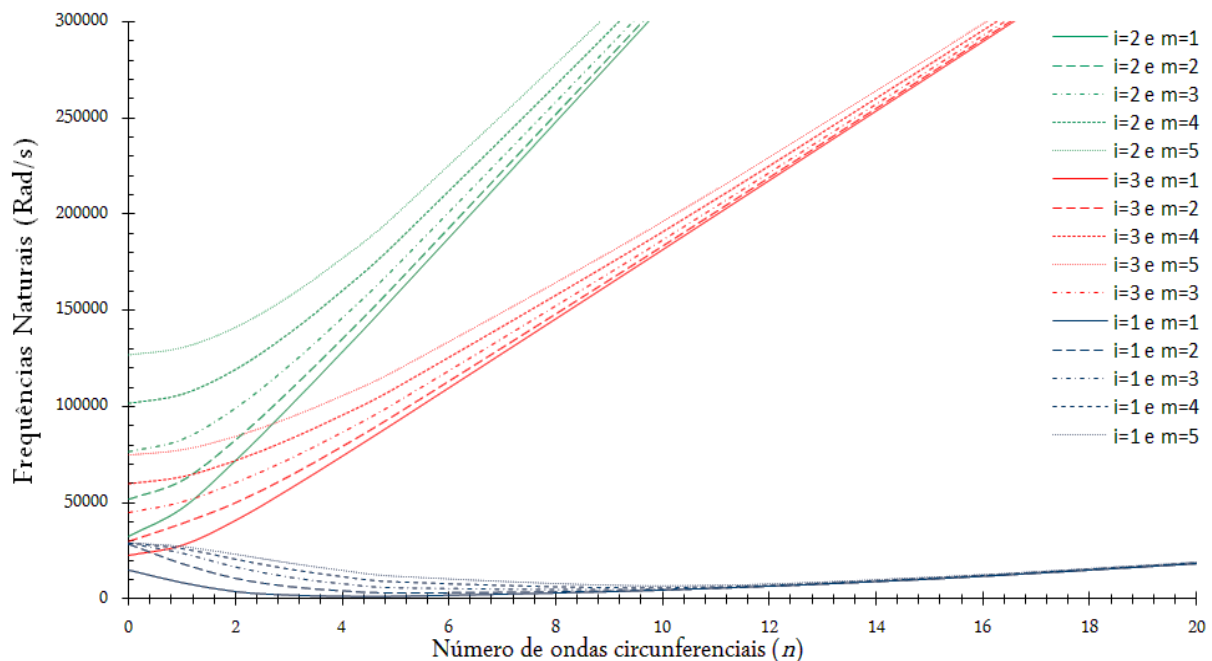


Figura 7. Relação entre os valores de frequência natural vs número de ondas circunferenciais obtidos através da teoria de Soedel para os modos radial ($i=1$), circunferencial ($i=2$) e axial ($i=3$).

A figura 7 apresentam todas as frequências naturais em estudo associadas sob o modo radial ($i=1$), circunferencial ($i=2$) e axial ($i=3$). Desta forma, as menores frequências são dominadas pelo modo radial ($i=1$), o que por sua vez são mais relevantes quando se sabe que as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para essas baixas frequências.

Para realizar a comparação entre as deformadas modais analíticas e numéricas foi adotado o modo $i=1$, $m=1$ e $n=2$. Assim, substituindo o valor da frequência natural nas equações 45 foram possíveis determinar a forma modal axial e radial, uma vez que para o ângulo Φ adotado igual a zero não apresenta deformação circunferencial. A figura 8 apresenta os resultados obtidos para as deformadas modais no sentido axial (a) e as deformadas modais no sentido radial (b).

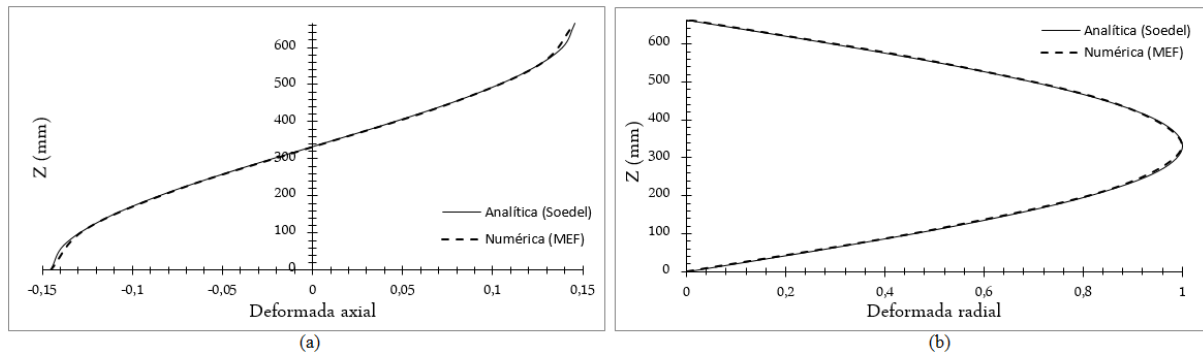


Figura 8. Deformadas modais analíticas através da teoria de Soedel e numéricas pelo MEF para uma casca com modo $m=1$ e $n=2$: (a) Deformada axial; (b) Deformada radial.

As deformadas modais apresentadas na figura 8 apresentam valores analíticos coincidentes que os valores numéricos obtidos através do SAP2000. Assim, fica nítido que a teoria de Soedel (2005) simula adequadamente o comportamento dinâmico de cascas cilíndricas em vibrações livres e que a modelagem numérica e refinamento da malha foram realizados de forma correta.

Na tabela 3, são apresentados os resultados das frequências naturais analíticas pela técnica de Soedel e numéricas através do MEF para a casca cilíndrica com as diferentes relações geométricas (L/R), sendo a casca cilíndrica de $h=0,015$ m, $E=2,10 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0,3$ e $\rho=7680$ kg/m³. As diferentes relações geométricas e as malhas abordadas na análise podem ser vistas na figura 4.

Tabela 3. Comparativo entre os valores das frequências naturais da casca cilíndrica obtidas pela técnica analítica de Soedel e MEF para diferentes relações geométricas de modos $m=1$ e $n=4$.

L/R	$F_{i,m,n}$ Analítico (Hz)	$F_{i,m,n}$ Numérico (Hz)	Erro (%)
0,5	3406,35	3405,99	0,01
1	1784,89	1791,67	0,38
2	642,89	648,72	0,91
3	343,08	351,98	2,59
3,8	254,26	266,05	4,64
5	200,85	214,73	6,91
10	166,77	182,86	9,65
15	164,28	180,52	9,89

A técnica analítica de Soedel (2005) representa adequadamente o comportamento dinâmico para cascas cilíndricas curtas, no qual pode-se observar na tabela 3 que os valores encontrados analiticamente e numericamente praticamente coincidiram para diferentes relações geométricas das cascas. Nota-se ainda que a medida que a relação geométrica L/R aumenta, ou seja, a casca se torna mais longa, o erro também aumenta, porém ainda com valores aceitáveis.

Para várias espessuras de cascas, ou seja, diferentes relações h/R foi determinado as frequências naturais para diferentes relações entre o comprimento e raio (L/R) da casca. Os valores foram obtidos com base na técnica analítica de Soedel (2005), na qual essa fornece

resultados adequados para o comportamento dinâmico de cascas curtas e longas com condição de contorno apoiada-apoiada sem restrição axial. O número de nodos adotados para direção longitudinal (m) e circunferencial (n) foram iguais a 1 e 4 respectivamente. A figura 9 mostra os resultados obtidos.

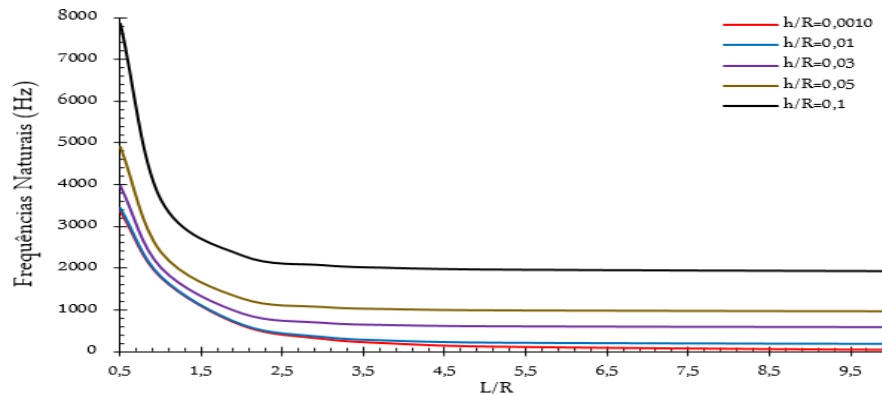


Figura 9. Relação entre as frequências naturais vs relação geométrica (L/R) para cascas cilíndricas com diferentes relações entre a espessura de paredes e raio (h/R) através da teoria de Soedel para o modo $m=1$ e $n=4$.

Com base no gráfico mostrado na figura 9 pode-se observar que as frequências naturais diminuem bruscamente para cascas mais robustas e tendem a permanecer constante a medida que a casca se torna mais longa. Esse comportamento não é afetado para diferentes espessuras de paredes da casca, porém pode-se advertir que à medida que a espessura da parede da casca aumenta as frequências naturais também aumentam.

5.2 Casca cilíndrica com diferentes condições de contorno

Na análise da influência das condições de contorno na resposta dinâmica da casca cilíndrica foi empregado a teoria de Sharma e Johns (1971) e comparada com os valores numéricos obtidos através método dos elementos finitos. Na tabela 4, são apresentados os resultados das frequências naturais analíticas e numéricas, em Hz, da casca cilíndrica para a relação geométrica $L/R=10$, $h=0,015$ m, $E=2,10 \times 10^{11}$ Pa, $\nu=0,3$ e $\rho=7680$ kg/m³.

Tabela 4. Comparativo entre as frequências naturais analíticas obtidas pela teoria de Sharma e Johns e numéricas pelo MEF para o modo $m=1$ e diferentes condições de contorno.

n	Apoiada-Apoiada			Apoiada-Livre			Engastada-Engastada			Engastada-Livre			Engastada-Apoiada			Livre-Livre		
	Analítico	MEF	Erro (%)	Analítico	MEF	Erro (%)	Analítico	MEF	Erro (%)	Analítico	MEF	Erro (%)	Analítico	MEF	Erro (%)	Analítico	MEF	Erro (%)
2	114,88	107,50	6,43	174,23	215,69	23,80	250,98	210,67	16,06	51,40	49,63	3,44	174,74	155,51	11,00	248,97	230,56	7,40
3	107,47	106,50	0,90	125,43	142,94	13,96	151,04	141,81	6,11	95,70	95,47	0,24	124,68	120,66	3,22	152,39	146,94	3,57
4	182,51	182,86	0,19	187,83	180,00	4,17	193,11	191,34	0,92	180,14	180,00	0,08	186,70	186,01	0,37	195,67	194,13	0,79
5	291,51	292,15	0,22	294,41	290,53	1,32	294,99	294,66	0,11	290,72	290,53	0,06	293,18	293,11	0,03	297,86	297,07	0,27
6	426,66	427,43	0,18	429,01	425,95	0,71	428,41	428,43	0,00	426,24	425,95	0,07	427,74	427,84	0,02	431,40	430,66	0,17
7	586,82	587,70	0,15	589,02	586,06	0,50	588,05	588,20	0,03	586,51	586,06	0,08	587,73	587,92	0,03	591,10	590,25	0,14
8	771,76	772,74	0,13	773,91	770,80	0,40	772,80	773,03	0,03	771,49	770,80	0,09	772,60	772,87	0,03	775,89	774,88	0,13
9	981,41	982,47	0,11	983,55	980,14	0,35	982,38	982,66	0,03	981,16	980,14	0,10	982,23	982,56	0,03	985,49	980,34	0,52
10	1215,75	1216,88	0,09	1217,89	1214,04	0,32	1216,69	1217,01	0,03	1215,51	1214,04	0,12	1216,56	1216,95	0,03	1219,82	1214,18	0,46

Através da tabela 4 pode-se observar que o método analítico proposto por Sharma e Johns (1971) possui um maior erro quando a casca vibra com pequenos números de ondas circunferenciais, como por exemplo, quando $m=1$ e $n=2$. Porém, à medida que os números de ondas circunferenciais aumentam os resultados analíticos praticamente coincide com os valores numéricos, apresentando erros decrescentes e pequenos.

Com as modelagens numéricas validadas por ambas as técnicas analíticas em cascas curtas e longas foram possíveis também analisar a influência das condições de contorno nas frequências naturais da estrutura para diferentes geometrias de cascas (curta e longa) através do método dos elementos finitos. A figura 10 a seguir mostra a situação apresentada.

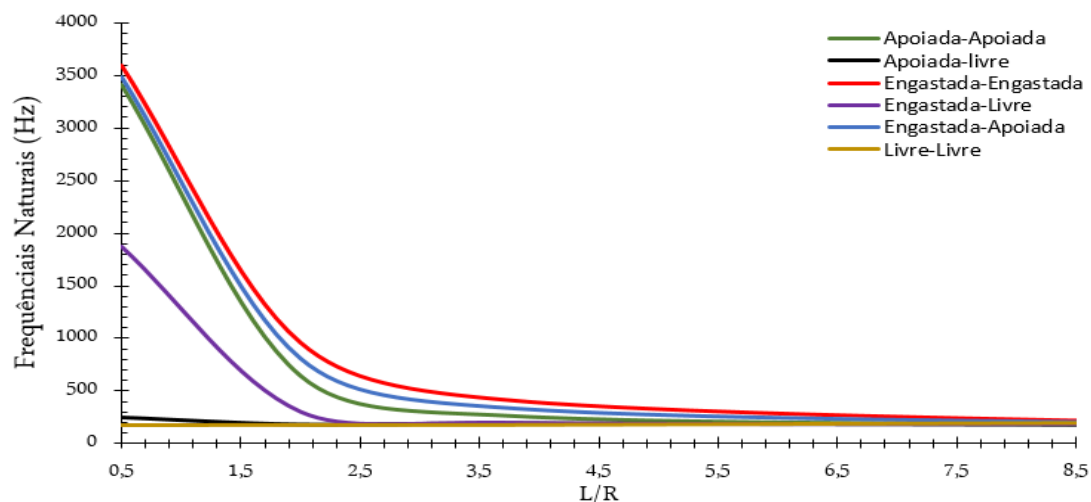


Figura 10. Relação entre as frequências naturais numéricas obtidas pelo MEF vs diferentes relações geométricas (L/R) e condições de contorno.

Através da figura 10 pode-se notar que em cascas curtas as condições de contorno tem grande influência na resposta dinâmica da estrutura, ou seja, as frequências naturais foram afetadas de forma significativa. Entretanto, à medida que a casca se torna longa, as frequências naturais da estrutura tendem a valores comuns, ou seja, as condições de contorno nas extremidades da casca cilíndrica não afetam de forma significativa a resposta ao comportamento dinâmico da casca.

Ressalta-se ainda que as condições de contorno Livre-Livre e Engasta-Engastada apresentam, respectivamente, as duas curvas extremas para os valores das frequências naturais em diferentes relações geométricas da casca. Assim, pode-se afirmar que além das demais condições de contorno entre as duas curvas citadas, qualquer outra condição de contorno, como por exemplo, um apoio com um engastamento parcial deverá se enquadrar entre essas curvas.

Por fim, a figura 11 apresenta as demais deformadas modais numéricas obtidas através do MEF no *software* SAP2000 para as diferentes condições de contorno. É mostrado o modo de corpo livre, sendo este um modo no qual toda estrutura permanece na posição de equilíbrio. Para cada frequência natural são mostrados os modos $m=1$ e $n=4$, com deslocamentos axiais (u), circunferencial (v) e radial (w).

Condição de Contorno / Frequência Natural (Hz)	Deformada modal	Vista Superior	Deslocamentos na casca		
			Axial (u)	Circunferencial (v)	Radial (w)
Apoiada - Apoiada $F=182,86$ (Hz)					
Apoiada-Livre $F=180,00$ (Hz)					
Engastada-Engastada $F=191,34$ (Hz)					
Engastada-Livre $F=180,00$ (Hz)					
Engastada - Apoiada $F=186,01$ (Hz)					
Livre - Livre $F=194,13$ (Hz)					

Figura 11. Modos de vibração $m=1$ e $n=4$ da casca cilíndrica obtida através do MEF no software SAP2000 para diferentes condições de contorno.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou a influência das condições de contorno na análise dinâmica de cascas cilíndricas com diferentes geometrias. Assim, a técnica analítica proposta por Soedel

(2005) representa adequadamente o comportamento dinâmico de cascas cilíndricas em vibrações livres para qualquer relação geométrica de casca (curta ou longa) na condição de contorno bi apoiada sem restrição axial. Logo, infere-se que a técnica analítica e a modelagem numérica foram empregadas de forma correta, de tal forma que os valores são muito semelhantes, não existindo praticamente nenhuma diferença nos resultados encontrados analiticamente e numericamente.

No que se diz respeito à teoria de Sharma e Johns (1971), os resultados são mais satisfatórios quando a casca é longa e em número de nodos circunferenciais elevados, pois para estas características ficam constatados os menores erros quando comparados com os resultados pelo MEF. Em relação ao estudo paramétrico pode-se afirmar que os resultados foram satisfatórios, pois os gráficos gerados com os diferentes valores das frequências naturais para diferentes relações geométricas permitiram avaliar até que ponto os efeitos das restrições (deslocamento e/ou rotação) nas extremidades da casca (condição de contorno) influenciam na resposta em vibração livre dessa estrutura. De forma geral os resultados analíticos e numéricos tiveram um excelente acordo entre si, ou reproduziram as tendências esperadas, fato que permitiu uma interpretação adequada dos fenômenos observados durante esses estudos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelos recursos recebidos e a Universidade de Brasília.

REFERÊNCIAS

- Amabili, M., 1996. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *International Journal of Sound and Vibration*, 191, pp. 757–480.
- Blevins, R. D., 1979. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. *First Edition*, New York, United States. Van Nostrand Reinhold Company.
- Chiba, J. D., Yamaki, N. & Tani, J., 1984. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid. *International Thin-walled Structures*, pp. 265–284.
- Computers & Structures, 2015. CSI Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS, Safe and CSI Bridge. Inc. Copyright © Computers & Structures. 552 p.
- Dai, L., Yang, T., Du, J. & Brennan, M. J., 2012. An exact series solution for the vibration analysis of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *International Journal Applied Acoustics*, pp. 440–449.
- Donnell, L. H., 1933. Stability of thin walled tubes under torsion. *Inc. NACA Report*, N° 479.
- Flügge, W., 1934. Statik und Dynamic der Schalen. Berlin, Julius Springer.
- Flügge, W., 1967. Stresses in Shells. Berlin, Verlag Springer.
- Forsberg, K., 1964. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells. *Journal American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 8p.
- Kim, Y., Lee, Y. S. & Ko, S. H., 2003. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. *International Journal of Sound and Vibration*, pp. 869–897.

- Koga, T., 1988. Effects of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells under uniform external pressure. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 242–248.
- Lakis, A. A. & Paidoussis, M. P., 1971. Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid. *International Journal of Sound and Vibration*, pp. 1–15.
- Lopez, A. A., 2014. Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e livres acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 120 p.
- Love, A. E. H., 1988. The small free vibrations of a thin elastic shell. *International Phil. Trans. Roy. Soc.*, pp. 491–549.
- Mendes, N. B., 2013. Estudo Comparativo Analítico e Numérico de Aspectos da Interação Fluido Estrutura Aplicados a Barragens em arco. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 318 p.
- Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., 2014. Um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas com anéis enrijecedores e contendo fluido. *CILAMCE 2014 – XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, CE, Brasil, 19 p.
- Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., 2015. Estudo de vibração acoplada de cascas cilíndricas sob diferentes níveis de fluido e posições de anéis enrijecedores. *CILAMCE 2015 – XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 16 p.
- Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., 2016. Vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas contendo fluido e conectadas com placas de fundo apoiadas em base elástica. *CILAMCE 2016 – XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brasil, 20 p.
- Mushtari, K. M., 1938. On the stability of cylindrical shells subject to torsion. *International Trudy Kaz. Avais*, Russian.
- Pedroso, L. J., Barbosa, A. N. & Morais, M. V. G., 1994. Vibrações livres de cascas cilíndricas pelo método das diferenças finitas. *Relatório Técnico de Pesquisa*. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 10 p.
- Reissner, E., 1941. A new derivation of the equations of the deformation of elastic shells. *International Am J. Math.*, pp. 177–184.
- Sanders, J. L., 1959. An improved first approximation theory of thin shells. *In. NASA Report*.
- Sharma, C. B. & Johns, D. J., 1971. Vibration characteristics of a camped-free and camped-ring-stiffened circular cylindrical shell. *Inc. Journal of Sound and Vibration*, pp. 459–474.
- Soedel, W., 2005. Vibrations of Shells and Plates. *Third Edition*, New York, United States, Marcel Dekker.
- Timoshenko, S. & Woinowsky, K. S., 1959. Theory of plates and shells. *Second Edition*, United States, McGraw-Hill.