



ESTUDO DE VIBRAÇÕES LIVRES DESACOPLADAS E ACOPLADAS FLUIDO-ESTRUTURA EM CASCAS CILÍNDRICAS PARA DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO

Davidson de Oliveira França Júnior

Lineu José Pedroso

Neander Berto Mendes

davidson.francajunior@gmail.com

lineu@unb.br

neanderberto@hotmail.com

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental - Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) – Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF, Brasil.

Víctor Iván Fernández Dávila Gonzales

vfernandezdavila@pucp.edu.pe

Universidad Católica del Perú – PUCP, Departamento de Engenharia, Área de Engenharia Civil. Lima, Peru.

Resumo. Neste trabalho são estudadas as vibrações livres de um reservatório cilíndrico vazio e totalmente preenchido com um líquido invíscido e incompressível. O reservatório é modelado por uma casca cilíndrica e o fluido representado por uma cavidade acústica. As análises são realizadas tendo por base a técnica analítica de Sharma & Johns (1971) e o método dos elementos finitos (MEF) por meio do software ANSYS. O fluido é modelado pela equação da onda e incorporado na casca cilíndrica através de uma massa adicional de fluido. Os efeitos das ondas de superfície livre (sloshing) e da pressão hidrostática são desprezados. Para demonstrar a validade da modelagem no software, os resultados analíticos são comparados com os resultados numéricos obtidos através do MEF. As frequências naturais e as formas modais da estrutura, desacoplada e acoplada fluido-estrutura são investigadas. Além disso, são avaliados os modos dominantes na vibração acoplada e abordada a massa adicional para diferentes condições de contorno.

Palavras-chave: Vibrações Livres, Casca Cilíndrica, Fluido-Estrutura, Método dos Elementos Finitos.

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC,
Brazil, November 5-8, 2017.

1 INTRODUÇÃO

As cascas cilíndricas são caracterizadas por uma estrutura esbelta de vasta aplicação em diversas áreas da engenharia civil, indústria mecânica, aeroespacial, naval e outras. Essas estruturas podem ser empregadas para a construção de reservatórios, silos, plataformas *off-shore*, tubulação para fluidos, peças industriais, componentes internos de reatores nucleares, entre outras. Logo, fica nítido a importância em se realizar afundo a análise dinâmica de cascas cilíndricas em problemas aplicados na engenharia.

No caso de reservatórios verticais cilíndricos existem diversos pesquisadores que no decorrer dos anos tem tratado sobre o assunto e ainda o faz atualmente, pois garantir a integridade estrutural desses tanques contendo fluido é uma temática que desperta o interesse em pesquisas que abordem os aspectos da interação fluido-estrutura. Destaca-se que estes tanques tem o comportamento dinâmico influenciado por várias variáveis, como por exemplo, dimensões geométricas da casca (altura e raio), espessura da parede, nível de fluido, condições de contorno da casca, condições de contorno da cavidade acústica que representa o fluido, presença ou não de anel enrijecedor, influência da conexão entre as paredes da casca com a tampa e o fundo, entre outras.

Portanto, este trabalho tem por objetivo um estudo analítico-numérico de vibrações livres desacopladas e acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas retas para diferentes condições de contorno, investigando as frequências naturais e os respectivos modos de vibração. Para isso, têm-se como base as soluções analíticas desenvolvidas por Sharma & Johns (1971) para avaliar a resposta dinâmica da casca cilíndrica, e ainda, para o estudo analítico da cavidade acústica é empregada o método analítico da solução da equação da onda apresentada por Gibert (1988) e Paula (2003).

Por conseguinte, é realizada a análise numérica via MEF do problema acoplado e os resultados numéricos obtidos são comparados com os valores analíticos encontrado nos estudos realizado por Mendes (2013). Uma vez confrontados estes resultados, a modelagem numérica é validada, possibilitando assim a abordagem das demais condições de contorno da casca cilíndrica para o problema acoplado através do método dos elementos finitos.

Finalmente, com as frequências numéricas desacopladas e acopladas fluido-estrutura identificaram-se os modos predominantes na vibração livre acoplada e, para os modos dominante estrutura, determinou-se a massa adicional virtual, na qual foi inserida na técnica analítica desenvolvida por Sharma & Johns (1971) com o intuito de determinar de forma aproximada às frequências analíticas do problema acoplado para diferentes condições de contorno.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversos estudos sobre análise dinâmica de reservatórios verticais cilíndricos têm sido realizados ao longo do tempo e ainda o faz atualmente, sendo isso possível a partir de uma base teórica consolidada através de teorias clássicas disponíveis na literatura. Essas teorias se caracterizam por abordar técnicas analíticas que representam o comportamento dinâmico da casca cilíndrica, do fluido e tratam do acoplamento acústico-estrutural entre eles.

Dentre a vasta literatura de vibrações livres de cascas cilíndricas contendo fluido podem-se destacar os estudos realizados por Fernholz & Robinson (1990), Lakis & Paidoussis (1971), Chiba *et al.* (1984), Gonçalves & Batista (1986), Amabili (1996), Lee & Lu (1995), Amabili & Paidoussis (2003), Paula (2003), Kim *et al.* (2003), Mendes (2013), Lopez (2014), Mendes *et al.* (2014), Mendes *et al.* (2015) e Mendes *et al.* (2016). Esses estudos diferem entre si na forma de abordagem das técnicas analíticas e/ou procedimentos numéricos para obtenção da resposta dinâmica em cascas parcialmente ou cheias com fluido. Alguns incorporam nas análises a influência de anel enrijecedor na casca e da interação nas bordas das paredes da casca com outros elementos estruturais, como por exemplo, placas de fundo e/ou tampa.

No que se diz respeito à análise experimental de vibrações livres de cascas cilíndricas pode-se destacar os estudos realizados por Chiba *et al.* (1985) e por Gasser (1987), no qual em ambas as pesquisas foi realizado ensaios experimentais em cascas totalmente e parcialmente cheia com fluido. Cada estudo tem a sua particularidade, como por exemplo, desde a condição de contorno adotada para a casca bem como as técnicas analíticas de base. Entretanto, as contribuições finais dos estudos citados são relevantes, pois expressam o problema de interação fluido-estrutura em reservatórios cilíndricos de uma maneira física realista.

A literatura de vibrações livres em cascas cilíndricas contendo fluido para diferentes condições de contorno é menos extensa, exceto para a condição de contorno da casca apoiado-apoiada, pois nas demais existe uma maior complexibilidade na formulação analítica da casca cilíndrica. Em consequência, grande maioria dos estudos trata isoladamente de algumas condições de contorno para o problema desacoplado, como por exemplo, os estudos realizados por Forsberg (1964) e Koga (1988), mas não contemplam a influência das restrições no deslocamento e rotação das extremidades da casca para o problema acoplado.

3 FORMULAÇÃO TEÓRICA

3.1 Abordagem analítica da casca cilíndrica

A casca cilíndrica é composta de paredes delgadas de comprimento L , raio médio R , ângulo radial ϕ e espessura h . O material da casca é considerado como sendo elástico com módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν e massa específica ρ . O vetor deslocamento na superfície da casca na direção axial, circunferencial e radial são respectivamente u , v e w . A Figura 1 apresenta a geometria da casca cilíndrica.

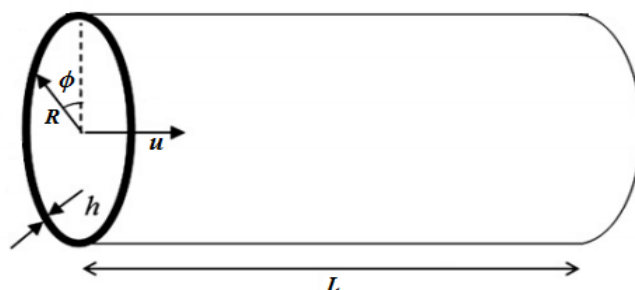


Figura 1. Geometria da casca cilíndrica (Dai, 2012, modificada).

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos realizados na técnica analítica apresentada por Sharma & Johns (1971), no qual o problema foi formulado usando a técnica de Rayleigh-Ritz para obter uma solução analítica aproximada para diferentes condições de contorno a partir das funções modais de viga e as deformações assumidas para a casca são embasadas na teoria de Flugge (1967).

O grande diferencial dessa técnica é caracterizado por supor que a deformação por cisalhamento na casca é zero, logo a relação entre o comprimento e raio (L/R) assumidos para a casca tem influência direta com os resultados obtidos. Inicialmente, as deformações na superfície da casca assumidas para a respectiva direção longitudinal, circunferencial e radial são descritas nas equações a seguir:

$$u = -C \frac{R}{n^2} \varphi_m(z) \cos(n\phi) \cos(\omega t) \quad (1)$$

$$v = -C \frac{1}{n} \varphi_m(z) \sin(n\phi) \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$w = C \varphi_m(z) \cos(n\phi) \cos(\omega t) \quad (3)$$

Onde ω é a frequência natural circular da casca, n é o número de ondas circunferenciais, m é o número de semi-ondas longitudinais, φ_m é a deformada modal de viga para diferentes condições de contorno, ϕ é o ângulo circunferencial da casca, R é o raio, t é o tempo e C é a constante de amplitude modal. Aplicando a técnica de Rayleigh-Ritz, a frequência natural da casca é determinada igualando-se o determinante da seguinte matriz a zero.

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \Delta I_2 & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \Delta & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Sendo:

$$A_{11} = \lambda_m^2 + (1+\beta)(1-\nu)n^2 I_2 / 2 \quad (5)$$

$$A_{12} = -\nu n \lambda_m I_1 - (1-\nu)n \lambda_m I_2 / 2 \quad (6)$$

$$A_{13} = -\nu \lambda_m I_1 + \beta \lambda_m \left[-\lambda_m^2 + (1-\nu)n^2 I_2 / 2 \right] \quad (7)$$

$$A_{22} = n^2 + (1+3\beta)(1-\nu)\lambda_m^2 I_2 / 2 \quad (8)$$

$$A_{23} = n + \beta n \lambda_m^2 [\nu I_1 + 3(1-\nu)I_2 / 2] \quad (9)$$

$$A_{33} = 1 + \beta \left[\lambda_m^4 + (n^2 - 1)^2 + 2\nu n^2 \lambda_m^2 I_1 + 2(1-\nu)n^2 \lambda_m^2 I_2 \right] \quad (10)$$

Onde:

$$\lambda_m = P_m R, \quad P_m = \frac{\lambda_i}{L} \quad (11)$$

$$I_1 = \frac{1}{L} \int_0^L P_m^2 \left[\int \varphi_m(z) dz \right]^2 dz \quad (12)$$

$$I_2 = \frac{1}{L} \int_0^L [\varphi_m'(z)]^2 dz \quad (13)$$

Destaca-se que λ_i é um coeficiente obtido com base na equação transcendental para cada condição de contorno. As integrais representadas pelas Eq. (12) e (13) dependem da função de viga assumida para o modo longitudinal, ou seja, uma vez substituída as diferentes funções de viga para respectivas condições de contorno, pode-se então determinar a solução analítica para a casca cilíndrica. Tem-se ainda que, resolvendo o determinante da matriz igual à zero, o polinômio característico com base no parâmetro de frequência é dado por:

$$\Delta = \lambda_{m,n}^2 = \frac{\lambda_m^4 + \beta n^2 \lambda_m^2 [\lambda_m^2 n^2 + 2\beta n^2 (n^2 - 1) I_1 + 2(1-\nu)(n^2 - 1)^2 I_2] + \beta n^4 (n^2 - 1)^2}{\lambda_m^2 I_2 + n^2 (n^2 + 1)} \quad (14)$$

Sendo:

$$\beta = \frac{h^2}{12R^2} \quad (15)$$

$$\Delta = \frac{\rho R^2 (1-\nu^2) \omega^2}{E} \quad (16)$$

A frequência natural adimensional pode também ser expressa em Hertz, dada por:

$$F_{m,n} = \frac{\lambda_{m,n}}{2\pi R} \left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (17)$$

Sendo $m=1,2,3,\dots$ o número de semi-ondas longitudinais, $n=2,3,4,\dots$ o número de ondas circunferenciais, E é o módulo de elasticidades, R é o raio médio da superfície, ρ é a massa específica do material da casca e ν é o coeficiente de Poisson.

Os modos de viga são correlacionados ao efeito de flexão na direção longitudinal, porém quando incorporado nas equações da casca fornece, juntamente com as deformações assumidas para os modos azimutais, a deformada completa da casca cilíndrica para os diferentes números modos m e n sob as respectivas condições de contorno. Para a solução analítica através de diferentes condições de contorno, parte-se dos modos de viga e dos respectivos coeficientes das equações transcendentais apresentadas por Blevins (1979) na tabela 8.1 do livro *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*.

3.2 Abordagem analítica da cavidade acústica

Para a análise o fluido é considerado invíscido, incompressível e não existe escoamento, apenas vibração em torno de um ponto de equilíbrio. A cavidade cilíndrica é delimitada nas laterais por paredes rígidas com ambas as extremidades (topo/base) abertas e com pressão uniforme em seu interior.

A análise do comportamento acústico de cavidades está relacionada ao comprimento de das ondas acústicas juntamente com as dimensões do meio, no qual apresentam frequências

naturais e modos acústicos. A resolução dos problemas e obtenção dos modos acústicos pode ser descritos tendo como base a seguinte equação de propagação da onda em um meio fluido.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (18)$$

Sendo c definida por:

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_f}} \quad (19)$$

Onde μ é o módulo adiabático, ρ_f é a densidade do fluido, p é a pressão e $\nabla^2 p$ é o operador Laplaciano de pressão.

Para a análise de uma cavidade acústica cilíndrica é conveniente o emprego da equação de propagação de onda em coordenadas cilíndricas, dada da seguinte forma:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (20)$$

Para a resolução da equação de propagação de onda a técnica de separação de variáveis é utilizada, assumindo a solução como produto de duas funções dependentes do espaço e do tempo. Além disso, é necessário atribuir na formulação algumas condições de contorno que concebam as deformadas modais e frequências naturais na vibração livre para a cavidade.

No topo e na base da cavidade acústica a condições de contorno é assumida aberto-aberta, e por isso, a componente de pressão deve ser igual à zero nesses limites. A Eq. (21) a seguir mostra matematicamente a condição citada.

$$\underbrace{[P]_{z=0} = [F]_{z=0} = [Z(z)]_{z=0}}_{\text{Base da cavidade cilíndrica}} = \underbrace{[P]_{z=L} = [F]_{z=L} = [Z(z)]_{z=L}}_{\text{Topo da cavidade cilíndrica}} = 0 \quad (21)$$

Assume-se também que para a pressão sonora contínua em ϕ , têm-se as seguintes condições de contorno que são aplicadas.

$$[P]_{\phi=0} = [P]_{\phi=2\pi} \quad (22)$$

$$[P]_{\phi=0} = [F]_{\phi=0} = [G]_{\phi=0} = [\theta]_{\phi=0} \quad (23)$$

$$[P]_{\phi=2\pi} = [F]_{\phi=2\pi} = [G]_{\phi=2\pi} = [\theta]_{\phi=2\pi} \quad (24)$$

$$[\theta]_{\phi=0} = [\theta]_{\phi=2\pi} \quad (25)$$

Para a cavidade acústica cilíndrica de paredes rígidas a velocidade da partícula de fluido no contorno deve ser igual à zero. Devido a isso, têm-se as seguintes condições de contorno aplicadas no contorno da cavidade.

$$\left[\frac{\partial P}{\partial r} \right]_{r=R} = \left[\frac{\partial F}{\partial r} \right]_{r=R} = \left[\frac{\partial G}{\partial r} \right]_{r=R} = 0 \quad (26)$$

Contudo, a partir de um longo desenvolvimento da solução da equação de propagação de onda com as condições de contorno mostradas e tendo em vista os pontos de singularidade

das funções de Bessel, a solução final para o campo de pressão no interior da casca cilíndrica é finalmente dada da seguinte forma:

$$P(r, \phi, z, t) = R(r)\theta(\phi)Z(z)T(t) \quad (27)$$

$$P(r, \phi, z, t) = A_r J_n\left(\frac{\chi_i}{R} r\right) \cdot A_\phi \cos[n(\phi - \psi)] \cdot B_z \sin\left(\frac{m \pi z}{H}\right) \cdot e^{j\omega t} \quad (28)$$

Destaca-se que os três índices i , m e n são os respectivos modos acústicos nas três dimensões. Por fim, as frequências naturais da cavidade são expressas pela Eq. (29).

$$\omega = c \sqrt{\left(\frac{m \pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\chi_{i,n}}{R}\right)^2} \quad (29)$$

3.3 Acoplamento fluido-estrutura

Segundo Souza (2007), o fenômeno de vibração livre reflete em diferentes modos para o sistema acoplado, sendo eles: modos dominantes da estrutura, onde o fluido apenas acompanha as deformadas modais da estrutura da casca, ou seja, não existe influência significativa das formas modais de pressão do fluido, podendo este ser computado na análise como uma massa adicional na estrutura, reduzindo assim as frequências naturais acopladas. Há também modos dominantes do fluido, ou seja, as formas modais acopladas reproduzem as formas modais de pressão da cavidade acústica, que por sua vez introduz uma rigidez adicional à estrutura da casca elevando assim as frequências naturais acopladas. Por fim, destaca-se o modo misto, no qual os modos apresentam características dominantes da estrutura e do fluido.

Para levar em consideração o acoplamento fluido-estrutura entre a casca cilíndrica e a cavidade acústica foi realizada inicialmente a análise desacoplada da casca e cavidade, sendo tal feito de forma analítica e numérica (via ANSYS). Posteriormente a casca cilíndrica foi acoplada com o fluido na modelagem no *software* ANSYS e os resultados numéricos obtidos de frequências naturais e formas modais foram avaliados e comparados com os sistemas casca e cavidade desacoplados. Este procedimento é necessário com o intuito de verificar os modos dominantes (estrutura e/ou fluido) durante o fenômeno da vibração livre acoplada. Assim, uma vez identificado o modo dominante estrutura, o fluido pode ser tratado como uma massa adicional na casca cilíndrica.

Portanto, a partir das análises desacopladas e acopladas fluido-estrutura, a massa adicional virtual (m_a) pode ser computada conforme a seguinte equação apresentada por Blevins (1979).

$$\frac{\omega_{Acoplado}}{\omega_{Desacoplado}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{m_a}{m}}} \quad (30)$$

Uma vez determinada a massa adicional através dos resultados numéricos, após algumas operações algébricas com a solução analítica estudada por Sharma & Johns (1971), a Eq. (16) pode ser escrita da seguinte forma para determinar as frequências naturais acopladas.

$$\omega_{Acoplada} = \lambda_{m,n} \sqrt{\frac{2 E \pi L h}{(m + m_a) R (1 - \nu^2)}} \quad (31)$$

3.4 Parâmetros de análise

A análise numérica foi realizada através do método dos elementos finitos com o uso de *software* comercial ANSYS. Para a modelagem tridimensional da casca cilíndrica foi empregado o elemento SHELL63, no qual este possui quatro nós com seis graus de liberdade em cada nó, dispondo assim da capacidade de contabilizar os efeitos de flexão e de membrana em estruturas cilíndricas delgadas. Na modelagem da cavidade acústica o elemento FLUID30 foi utilizado para representar o fluido. Esse elemento possui oito nós de canto com quatro graus de liberdade em cada nó, determinando as translações e pressão em problemas acoplados fluido-estrutura.

Na análise da resposta dinâmica em vibração livre através do MEF foram utilizados os módulos *Block Lanczos*, no qual é adequado para sistemas estruturais desacoplados, e o *Unsymmetric*, ideal para sistemas acoplados fluido-estrutura, ambos incluídos no *software* ANSYS. Vale ressaltar que a escolha dos tipos de elementos foi realizada tendo por base os bons resultados apresentados por Mendes (2013), uma vez que o presente trabalho é uma continuação de suas análises. Assim sendo, é válido observar a Fig. 2 com um fluxograma das etapas realizadas neste trabalho.

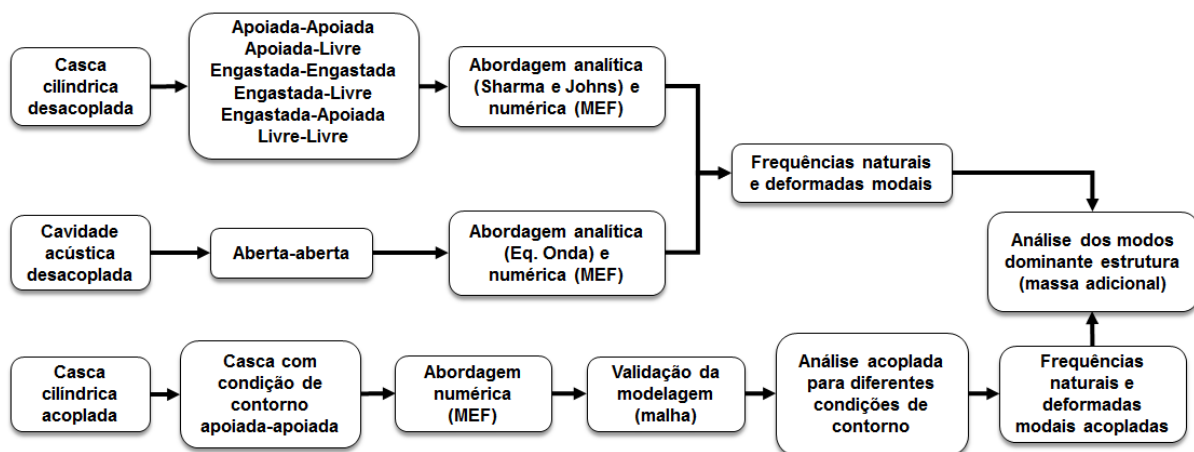


Figura 2. Fluxograma com a metodologia realizada.

Nas modelagens foram adotadas as seguintes propriedades dos materiais: a casca considerada feita em aço com módulo de Young $E=206$ GPa, razão de Poisson $\nu=0,3$ e massa específica $\rho_s=7680$ Kg/m³; o líquido é água com massa específica $\rho_f=1000$ Kg/m³ e velocidade de propagação do som na água $c=1500$ m/s. No que se diz respeito as propriedades geométricas, foram adotadas: a casca cilíndrica com raio $R=0,175$ m, comprimento $L=0,664$ m e espessura $h=0,001$ m; a cavidade acústica com raio $R=0,175$ m e comprimento $L=0,664$ m.

Para validar a modelagem numérica o teste de convergência da malha foi realizado, comparando o erro entre as frequências naturais obtidas analiticamente e numericamente. A

diferença citada é calculada por $(|\omega_a - \omega_n|/|\omega_a|) \cdot 100$, no qual a malha que obteve o menor erro percentual para o problema desacoplado e acoplado foi definida de base para as demais análises. A Fig. 3 mostra o refinamento da malha.

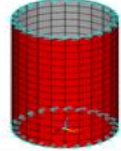
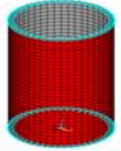
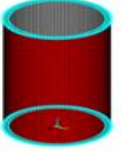
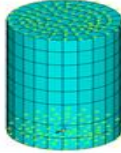
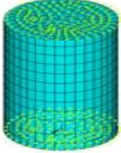
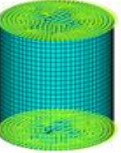
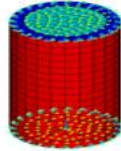
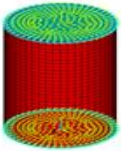
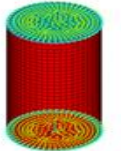
Modelo	Nível de Refinamento da Malha (Número de Elementos)		
	1 (384)	2 (1250)	3 (6000)
Casca cilíndrica desacoplada			
Cavidade acústica	4 (1312)	5 (9390)	6 (51300)
			
	7 (1696)	8 (10640)	9 (57300)
Interação fluido-estrutura			

Figura 3. Modelagens e refinamento da malha.

Assim, com base na Fig. 3, inicialmente foi realizado três níveis de refinamento da malha da casca desacoplada e os resultados numéricos comparados com os resultados obtidos pela técnica analítica de Sharma & Johns (1971). No estudo do refinamento da malha na análise numérica foram adotados os modos da casca que apresentam as menores frequências naturais na vibração livre, ou seja, foi adotado para o estudo o modo longitudinal $m=1$ e nodos circunferenciais (n) de 2 a 7.

Para a cavidade acústica, os resultados obtidos das menores frequências naturais pelo MEF foram comparados com os valores analíticos encontrados a partir de solução da equação de propagação de onda em um meio acústico. Por fim, na modelagem do caso acoplado fluido-estrutura, os resultados numéricos obtidos foram comparados com os valores analíticos encontrados por Mendes (2013), uma vez que em seus estudos foram empregados os mesmos parâmetros da estrutura da casca cilíndrica e cavidade acústica.

Na análise da resposta dinâmica do problema acoplado, Mendes (2013) levou em consideração os modos dominantes da estrutura durante a vibração livre e, juntamente com essa avaliação, obteve os valores analíticos das frequências naturais acopladas através da técnica analítica de Soedel (2005) e de um método pseudo-acoplado estudado por Gonçalves & Batista (1987), no qual o fluido é incorporado nas equações de movimento da casca cilíndrica na forma de uma massa adicional virtual. Assim sendo, a Fig. 4 mostra a convergência dos resultados para os diferentes níveis de refinamento da malha para a casca desacoplada com condição de contorno engastada-engastada (a), cavidade acústica (b) e casca apoiado-apoiada acoplada com a cavidade (c).

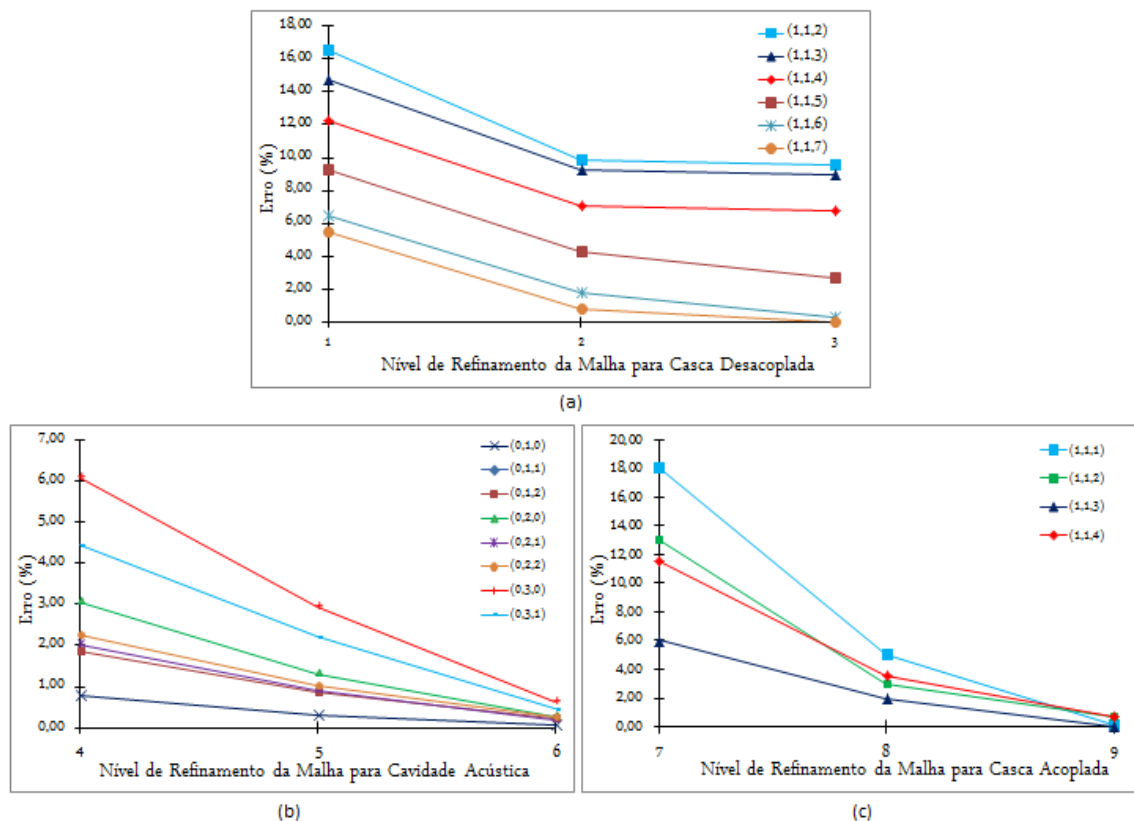


Figura 4. Estudo de convergência da malha para a casca cilíndrica desacoplada (a), cavidade acústica desacoplada (b) e casca cilíndrica acoplada com fluido (c).

Com base na Fig. 4, pode-se observar que no geral o erro entre a técnica analítica de Sharma & Johns (1971) para o problema desacoplado e os valores numéricos é pequeno. Entretanto, é importante ressaltar que esta técnica analítica produz resultados de maior grau de acurácia em nodos circunferenciais superiores, justificando a redução no erro para estes modos.

A diferença aceitável entre os resultados também acontece quando os valores numéricos são comparados com os resultados obtidos a partir da solução da equação da onda para a cavidade acústica e, da mesma forma, para o problema acoplado fluido-estrutura com base nos resultados analíticos retirados do trabalho de Mendes (2013). Cabe observar que nos três casos à medida que a malha vai sendo mais refinada, para as combinações modais em estudo, o erro vai diminuindo e convergindo a valores constantes e pequenos.

Portanto, os resultados finais empregados nas comparações foram os da malha de número três para a casa desacoplada, de número seis para a cavidade desacoplada e número nove para o caso acoplado, pois estas apresentam um menor percentual de erro quando comparado com as técnicas analíticas citadas. Finalmente, uma vez validada as modelagens numéricas da casca cilíndrica desacoplada, cavidade acústica e problema acoplado foi possível alterar as condições de contorno nas extremidades da casca cilíndrica e obter os respectivos resultados numéricos para diferentes condições de contorno para os casos desacoplados e acoplados.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Casca cilíndrica desacoplada

A primeira análise é da casca desacoplada através da técnica analítica de Sharma & Johns (1971) e dos resultados numéricos obtidos através do MEF. Os resultados são mostrados na tabela a seguir.

Tabela 1. Frequências naturais da casca cilíndrica desacoplada para $m=1$.

n	Apoiada-Apoiada			Apoiada-Livre			Engastada-Engastada			Engastada-Livre			Engastada-Apoiada			Livre-Livre		
	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)
2	4717,95	3830,29	18,81	175,99	152,62	13,28	6412,30	5691,25	11,24	1686,81	1463,86	13,22	5699,54	4783,39	16,07	166,50	141,37	15,09
3	2273,81	2022,24	11,06	440,77	393,70	10,68	3852,97	3482,77	9,61	890,46	828,44	6,96	2952,41	2750,09	6,85	428,95	388,05	9,54
4	1496,73	1410,20	5,78	813,11	750,21	7,74	2553,05	2388,99	6,43	882,74	865,45	1,96	1925,42	1869,81	2,89	794,63	744,05	6,37
5	1478,76	1458,89	1,34	1271,09	1209,58	4,84	2074,27	1999,37	3,61	1249,91	1243,57	0,51	1800,47	1690,24	6,12	1240,93	1203,17	3,04
6	1876,53	1880,56	0,21	1788,19	1771,36	0,94	2166,94	2136,16	1,42	1788,86	1784,17	0,26	2022,53	1982,47	1,98	1798,88	1764,70	1,90
7	2486,29	2497,75	0,46	2442,71	2435,36	0,30	2637,43	2618,01	0,74	2446,71	2441,39	0,22	2561,06	2544,82	0,63	2463,01	2428,45	1,40

Com base na Tabela 1, no geral as frequências naturais da estrutura mostram uma boa aproximação entre resultados analíticos e numéricos. Entretanto, pode-se observar que o método analítico proposto por Sharma & Johns (1971) possui um maior erro quando a casca vibra com números de ondas circunferenciais não elevados, como por exemplo, quando $m=1$ e $n=2$. Para uma melhor compreensão a Fig. 5 a seguir apresenta os resultados numéricos obtidos via *software* ANSYS.

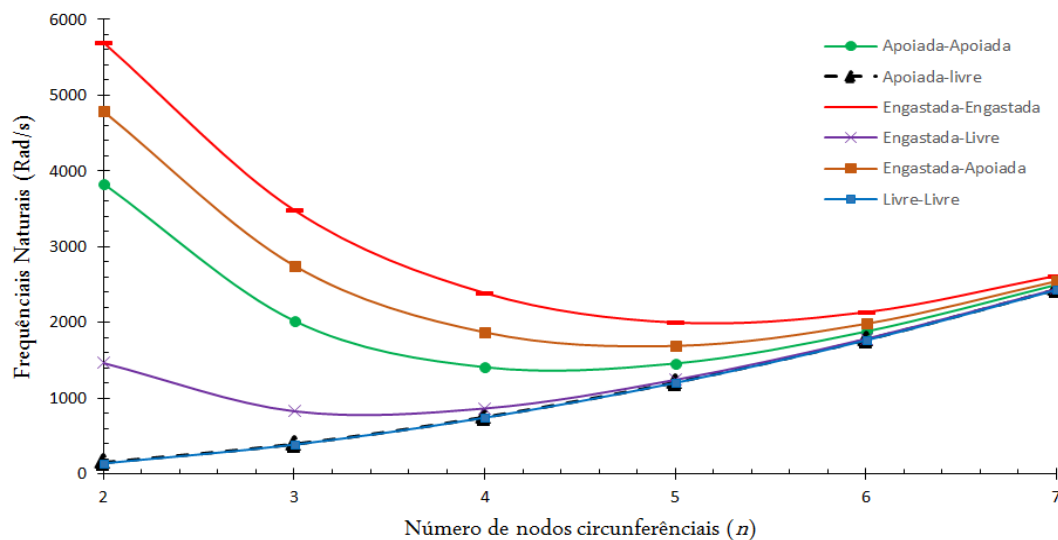


Figura 5. Frequências naturais vs número de nós circunferenciais para $m=1$.

Com base na Fig. 5 é possível observar que, independentemente da condição de contorno, as menores frequências naturais da casca cilíndrica não ocorrem necessariamente para valores pequenos de n (número de nós circunferenciais). Destaca-se ainda que à medida que n cresce as frequências naturais tendem para valores comuns, ou seja, as condições de contorno

nas extremidades da casca cilíndrica não afetam de forma significativa a resposta ao comportamento dinâmico da casca em nodos circunferenciais elevados.

Ressalta-se ainda que as condições de contorno Livre-Livre e Engasta-Engastada apresentam, respectivamente, as duas curvas extremas para os valores das frequências naturais em diferentes nodos circunferenciais (n). Assim, pode-se afirmar que qualquer outra condição de contorno, como por exemplo, um apoio com um engastamento parcial deverá se enquadrar entre essas curvas. Por fim, a Fig. 6 apresenta as deformadas modais numéricas obtidas através do MEF no *software* ANSYS para as diferentes condições de contorno. São mostradas as frequências naturais e deslocamentos axiais (u), circunferencial (v) e radial (w), sendo isso somente para o modo $m=1$ e $n=4$.

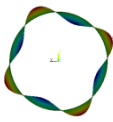
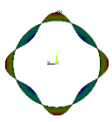
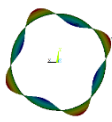
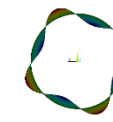
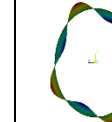
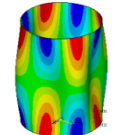
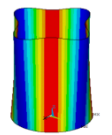
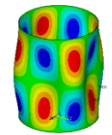
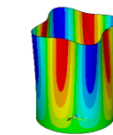
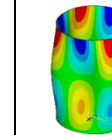
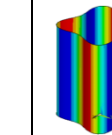
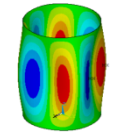
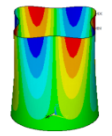
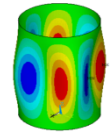
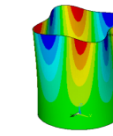
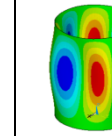
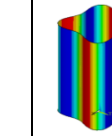
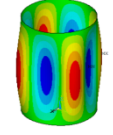
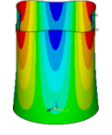
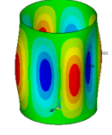
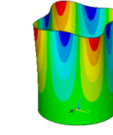
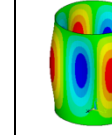
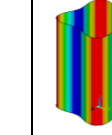
Condição de Contorno	Apoiada-Apoiada	Apoiada-Livre	Engastada-Engastada	Engastada-Livre	Engastada-Apoiada	Livre-Livre
ω (Rad/s)	1.410,20	750,21	2.388,98	865,44	1.869,81	744,05
Vista Superior						
Deformada Axial (u)						
Deformada Circ. (v)						
Deformada Radial (w)						

Figura 6. Frequências naturais e modos de vibração da casca desacoplada para $m=1$ e $n=4$.

As frequências naturais e os modos de vibração desacoplados da casca são fundamentais para que se identifiquem os modos predominantes quando a estrutura é acoplada com o fluido. A Fig. 6 apresenta somente o modo $m=1$ e $n=4$, porém foram analisados todos os modos de vibração adotados neste estudo.

4.2 Cavidade acústica desacoplada

A Tabela 2 a seguir apresenta os resultados analíticos e numéricos da análise da cavidade acústica com condição de contorno aberto-aberta em ambas as extremidades. Vale ressaltar que foram adotados modos (i, m, n) para as menores frequências naturais.

Tabela 2. Frequências naturais do fluido desacoplado.

i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ Analítico (Rad/s)	$\omega_{i,m,n}$ Numérico (Rad/s)	Erro (%)
0	1	0	7.096,97	7.102,01	0,07
0	1	1	17.304,03	17.323,75	0,11
0	1	2	27.123,78	27.181,88	0,21
0	2	0	14.193,94	14.234,18	0,28
0	2	1	21.225,70	21.268,46	0,20
0	2	2	29.779,20	29.860,34	0,27
0	3	0	21.290,91	21.423,84	0,62
0	3	1	26.502,18	26.623,68	0,46

Com base na Tabela 2, as frequências naturais da cavidade acústica se mostraram bem próximos entre resultados analíticos e numéricos para diferentes modos acústicos adotados. Assim, a Fig. 7 a seguir apresenta alguns dos modos de vibração da cavidade acústica obtida através do método dos elementos finitos no *software* ANSYS.

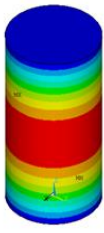
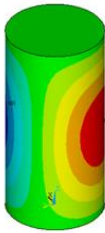
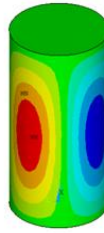
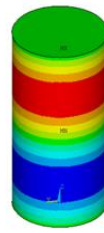
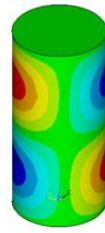
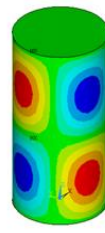
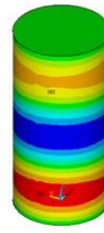
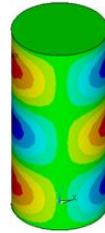
Modo (i, m, n)	(0,1,0)	(0,1,1)	(0,1,2)	(0,2,0)	(0,2,1)	(0,2,2)	(0,3,0)	(0,3,1)
ω (Rad/s)	7.102,89	17.383,31	27.355,67	14.227,14	21.323,68	30.036,58	21.387,58	26.684,06
Pressão								

Figura 7. Modos de vibração numéricos da cavidade acústica.

Da mesma forma que na casca desacoplada, as frequências naturais e os modos de vibração desacoplados da cavidade são fundamentais para que se identifiquem os modos predominantes quando a estrutura é acoplada com o fluido.

4.3 Acoplamento fluido-estrutura

A Tabela 3 apresenta os resultados analíticos encontrados por Mendes (2013) e os valores numéricos obtidos através do MEF da análise dinâmica da casca cilíndrica com condição de contorno apoiada-apoiada e cheia de fluido. Assim, foram abordados os modos que expressam as menores frequências naturais, ou seja, modos que estão associados às maiores amplitudes de deslocamento durante a vibração livre.

Tabela 3. Frequências naturais acopladas entre fluido-estrutura.

i	m	n	$\omega_{i,m,n}$ Analítico (Rad/s)	$\omega_{i,m,n}$ Numérico (Rad/s)	Erro (%)
1	1	2	1.246,91	1.254,64	0,62
1	1	3	734,06	744,18	1,38
1	1	4	564,15	577,99	2,45
1	1	5	632,43	656,53	3,80
1	1	6	871,18	917,97	5,37
1	1	7	1.223,61	1.310,55	7,10

As frequências naturais analíticas da casca cilíndrica acoplada com o fluido mostrada na Tabela 3 apresentam valores coincidentes com os valores numéricos obtidos através do MEF no *software* ANSYS. Assim, pode-se afirmar que a modelagem realizada no *software* foi realizada de forma correta, possibilitando assim a troca das condições de contorno da casca cilíndrica e consequentemente permitindo a obtenção dos resultados numéricos do problema acoplado para diferentes condições de contorno da casca. As figuras a seguir mostram os resultados obtidos numericamente das frequências naturais e formas modais acopladas.

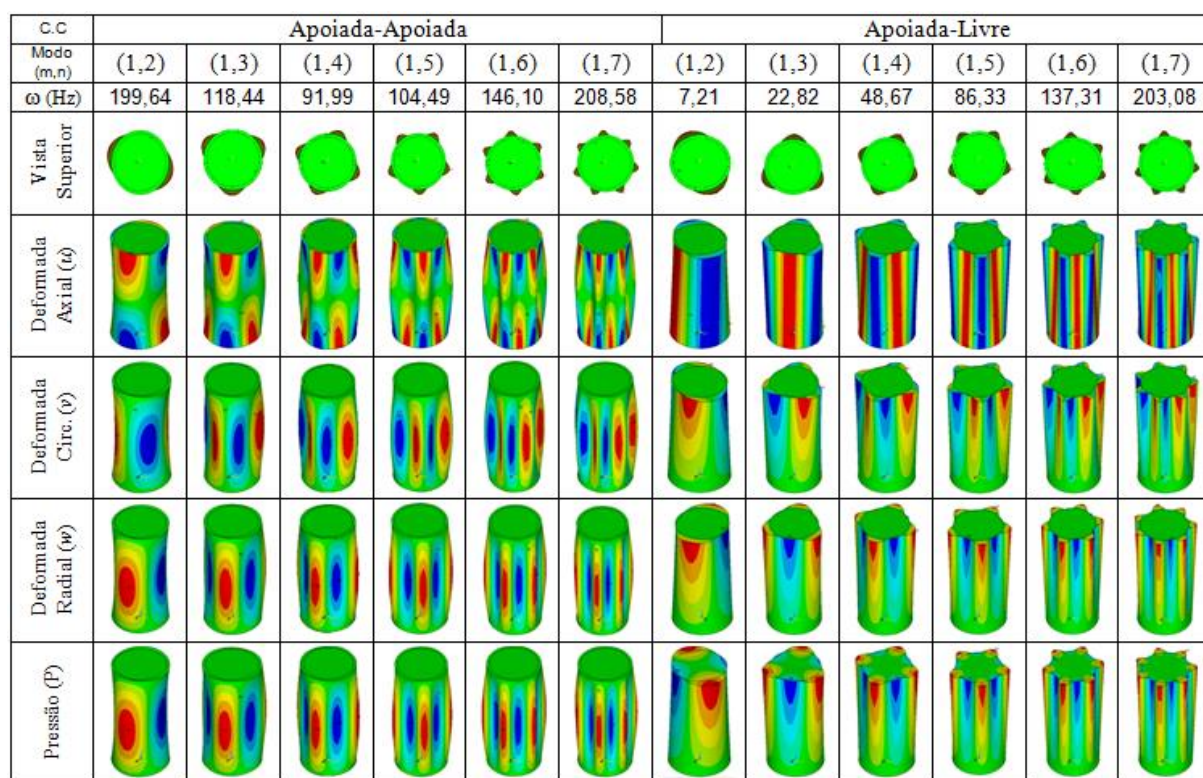


Figura 8. Frequências naturais e modos de vibração numéricos da casca acoplada.

Da mesma forma são apresentadas nas figuras a seguir para as demais condições de contorno e modos circunferenciais em estudo.

c.c	Engastada-Engastada						Engastada-Livre					
Modo (m,n)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
ω (Hz)	292,88	203,79	156,11	143,47	166,18	218,79	83,03	52,00	59,73	93,08	143,10	208,16
Vista Superior												
Deformada Axial (u)												
Deformada Circ. (v)												
Deformada Radial (w)												
Pressão (P)												

Figura 9. Frequências naturais e modos de vibração numéricos da casca acoplada (Continuação).

c.c	Engastada-Apoiada						Livre-Livre					
Modo (m,n)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
ω (Hz)	248,01	161,13	122,13	121,18	154,12	212,59	7,41	23,47	49,84	88,03	139,36	205,28
Vista Superior												
Deformada Axial (u)												
Deformada Circ. (v)												
Deformada Radial (w)												
Pressão (P)												

Figura 10. Frequências naturais e modos de vibração numéricos da casca acoplada (Continuação).

Com a análise do problema acoplado mostrado nas Fig. 8, 9 e 10 foi possível observar que nos modos de vibração estudados para diferentes condições de contorno o modo que predominou foi o da estrutura, pois além das frequências naturais da estrutura diminuir, a deformada modal do problema acoplado teve as mesmas características da forma modal da casca desacoplada, ou seja, a estrutura predomina sob a cavidade acústica. Outro fator preponderante para esta análise é a razão do produto entre a frequência natural e diâmetro do cilindro com a velocidade de propagação do som na água, no qual quando for muito menor do que um ($\omega D/c \ll 1$) no modo de vibração em estudo, o fluido é classificado na análise como fluido incompressível e, mesmo que pequena, a sua compressibilidade não interfere de forma significativa a análise.

Destaca-se ainda que a partir dos modos dominantes estrutura e das respectivas frequências naturais desacopladas e acopladas fluido-estrutura foi analisado a massa adicional virtual para as diferentes condições de contorno da casca cilíndrica. Os resultados são apresentados na Tabela 4 a seguir.

Tabela 4. Análise dos modos predominantes da casca acoplada para $m=1$.

C.C	Apoiada-Apoiada			Apoiada-Livre			Engastada-Engastada		
n	ω (Rad/s) Desacoplada	ω (Rad/s) Acoplada	$\omega D/c$	ω (Rad/s) Desacoplada	ω (Rad/s) Acoplada	$\omega D/c$	ω (Rad/s) Desacoplada	ω (Rad/s) Acoplada	$\omega D/c$
2	3830,29	1254,38	0,293	141,37	45,30	0,011	5691,25	1840,22	0,429
3	2022,24	744,18	0,174	393,70	143,38	0,033	3482,77	1280,45	0,299
4	1410,20	577,99	0,135	750,21	305,80	0,071	2388,99	980,87	0,229
5	1458,89	656,53	0,153	1209,58	542,43	0,127	1999,37	901,45	0,210
6	1880,56	917,97	0,214	1771,36	862,74	0,201	2136,16	1044,14	0,244
7	2497,75	1308,35	0,305	2435,36	1275,99	0,298	2618,01	1374,70	0,321
Continuação	Engastada-Livre			Engastada-Apoiada			Livre-Livre		
2	1463,86	521,69	0,122	4783,39	1558,29	0,364	152,62	46,56	0,011
3	828,44	326,73	0,076	2750,09	1012,41	0,236	388,05	147,47	0,034
4	865,45	375,29	0,088	1869,81	767,37	0,179	744,05	313,15	0,073
5	1243,57	584,84	0,136	1690,24	761,40	0,178	1203,17	553,11	0,129
6	1784,17	899,12	0,210	1982,47	968,36	0,226	1764,70	875,62	0,204
7	2441,39	1307,91	0,305	2544,82	1335,74	0,312	2428,45	1289,81	0,301

A Tabela 4 mostrou que o fluido é classificado na análise como incompressível para todas as condições de contorno e modos adotados neste estudo. Além disso, pode-se afirmar que o modo que predominou para menores frequências naturais da casca cilíndrica cheia com fluido em estudo é o da estrutura. Com a análise dos modos dominantes e a partir da Eq. (30) foi possível obter a relação entre a massa adicional e a massa da estrutura da casca para diferentes condições de contorno através dos resultados obtidos pelo MEF. Os resultados podem ser visualizados na tabela a seguir.

Tabela 5. Relação entre massa adicional (Ma) e massa da estrutura (M) para $m=1$.

Condição de Contorno	Apoiada-Apoiada	Apoiada-Livre	Engastada-Engastada	Engastada-Livre	Engastada-Apoiada	Livre-Livre
n	Ma / M					
2	8,32	8,74	8,56	6,87	8,42	9,75
3	6,38	6,54	6,40	5,43	6,38	5,92
4	4,95	5,02	4,93	4,32	4,94	4,65
5	3,94	3,97	3,92	3,52	3,93	3,73
6	3,20	3,22	3,19	2,94	3,19	3,06
7	2,64	2,64	2,63	2,48	2,63	2,54

Portanto, uma vez determinada a massa adicional foi possível obter as frequências naturais analíticas do problema acoplado através da Eq. (31) e comparar com os resultados numéricos já encontrados. Os valores são visto na Tabela 6.

Tabela 6. Frequências naturais acopladas para $m=1$.

n	Apoiada-Apoiada			Apoiada-Livre			Engastada-Engastada			Engastada-Livre			Engastada-Apoiada			Livre-Livre		
	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)	Análítico (Rad/s)	MEF (Rad/s)	Erro (%)
2	1545,42	1254,38	18,83	53,30	45,30	15,01	2050,33	1840,22	10,25	601,28	521,69	13,24	1869,20	1558,29	16,63	52,11	46,56	10,65
3	836,94	744,18	11,08	158,48	143,38	9,53	1410,56	1280,45	9,22	351,26	326,73	6,98	1100,08	1012,41	7,97	162,53	147,47	9,27
4	613,58	577,99	5,80	327,42	305,80	6,60	1041,00	980,87	5,78	382,87	375,29	1,98	806,33	767,37	4,83	335,09	313,15	6,55
5	665,60	656,53	1,36	570,69	542,43	4,95	941,10	901,45	4,21	587,93	584,84	0,53	805,22	761,40	5,44	572,19	553,11	3,33
6	916,18	917,97	0,20	869,33	862,74	0,76	1056,96	1044,14	1,21	901,65	899,12	0,28	988,12	968,36	2,00	886,01	875,62	1,17
7	1302,58	1308,35	0,44	1280,41	1275,99	0,35	1388,53	1374,70	1,00	1310,99	1307,91	0,23	1344,51	1335,74	0,65	1301,59	1289,81	0,90

Com a Tabela 6 pode-se observar que os resultados analíticos se aproximaram dos resultados numéricos através do MEF, ou seja, o emprego da massa adicional na formulação de Sharma & Johns (1971) para a análise do problema acoplado produziu bons resultados. Vale ressaltar também que o erro obtido entre os resultados analíticos e numéricos para o caso acoplado teve a mesma magnitude do caso desacoplado, ou seja, conforma já citado anteriormente, isso se dá ao fato de que a própria formulação analítica produz resultados com maior grau de acurácia para nodos circunferenciais superiores, como por exemplo, para $m=1$ e $n=7$.

Com base nos valores obtidos para as condições de contorno apoiada-livre e livre-livre é importante observar que a restrição na rotação (momento) na borda da casca cilíndrica influencia de forma significativa nas frequências naturais quando comparada com as restrições de deslocamentos (radial e tangencial), pois as frequências naturais se mostraram muito próximas nas condições de contorno citadas para os diferentes modos de vibração, diferentemente quando se compara, por exemplo, com a condição engastada-livre.

Além disso, outro fator preponderante a ser observado é que as frequências naturais acopladas da condição de contorno apoiada-livre foi um pouco menor quando comparada com a condição de contorno livre-livre. Isso pode ser justificado pelo fato de o modo longitudinal

$m=1$ na condição livre-livre não é o mesmo modo da apoiada-livre, ou seja, durante a vibração na condição livre-livre as forças inerciais do fluido se distribuem de forma igualitária no comprimento da casca com deformada constante do topo até a base, sendo isso devido à liberação das restrições de deslocamentos e rotações nas extremidades da casca. Entretanto, durante a vibração na condição apoiada-livre a deformada da casca envolve uma maior região de fluido e consequentemente capta uma maior massa adicional, aumentando a amplitude de deslocamento no topo da casca e, consequentemente, reduzindo pouco mais as frequências naturais quando comparada com a condição livre-livre.

Em resumo pode-se afirmar que para o problema acoplado com modo dominante estrutura, a forma da deformada da casca, dependente do tipo das condições de contorno, atua sob uma determinada região de fluido (pequena ou grande), captando maior ou menor massa adicional em diferentes pontos da casca, no qual interfere diretamente nas respostas dinâmicas da estrutura.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou a influência das condições de contorno na vibração livre de cascas cilíndricas desacopladas e acopladas fluido-estrutura. Assim, no que se diz respeito à teoria de Sharma & Johns (1971), os resultados são mais satisfatórios em nodos circunferenciais superiores (pequenos erros). Porém, de forma geral os resultados analíticos e numéricos tiveram um excelente acordo entre si, ou reproduziram as tendências esperadas, fato que permitiu uma interpretação adequada dos fenômenos observados durante esses estudos.

Na análise do problema acoplado, a modelagem numérica favoreceu a identificação dos modos dominante estrutura e também possibilitou a obtenção da massa adicional virtual. Essa massa quando imposta na técnica analítica estudada por Sharma & Johns (1971) apresentou resultados satisfatórios, gerando apenas os erros aceitáveis já esperados devido ao grau de acurácia dessa técnica para os nodos circunferenciais pequenos. Portanto, pode-se afirmar que os aspectos da interação fluido-estrutura na análise dinâmica de cascas cilíndricas foram abordados de forma coerente, contribuindo este estudo para futuras análises de cascas cilíndricas sob qualquer condição de contorno, uma vez que o tratamento analítico nessas situações é de maior dificuldade.

Dando continuidade a este trabalho pode-se: analisar a influência das condições de contorno para diferentes níveis de fluido na casca, diferentes condições de contorno da cavidade acústica, apresentar estudos paramétricos com as relações geométricas, ou ainda, aplicar diferentes tipos de carregamentos dinâmicos na estrutura da casca.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelos recursos recebidos, ao Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE) e a Universidade de Brasília (UNB).

REFERÊNCIAS

- Amabili, M. & Paidoussis, M. P., 2003. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid structure interaction. In: *Applied Mechanics Review*, pp. 349- 381.
- Amabili, M., 1996. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. *International Journal of Sound and Vibration*, 191, pp. 757–480.
- Blevins, R. D., 1979. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. *First Edition*, New York, United States. Van Nostrand Reinhold Company.
- Chiba, J. D., Yamaki, N. & Tani, J., 1984. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid. *International Thin-walled Structures*, pp. 265–284.
- Chiba, J. D., Yamaki, N. & Tani, J., 1985. Dynamic Stability of Liquid-Filled Cylindrical Shell Under Vertical Excitation Part I- Experiential Results. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. PP.14.
- Dai, L., Yang, T., Du, J. & Brennan, M. J., 2012. An exact series solution for the vibration analysis of cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *International Journal Applied Acoustics*, pp. 440–449.
- Fernholz, C. M, Robinson, J. H., 1990. Fully-Coupled Fluid/Structure Vibration Analysis Using MSC/NASTRAN. *NASA technical memorandum* 102857.
- Flügge, W., 1967. Stresses in Shells. Berlin, Verlag Springer.
- Forsberg, K., 1964. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells. *Journal American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 8p.
- Gasser, F. L. F. 1987. Vibrações de Cascas Cilíndricas Delgadas contendo Fluido. *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COOPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 138 p.
- Gibert, R. J., 1988. Vibrations des Structures. Interactions avec les fluides – Source d'excitation aléatoires. *Fifth Edition*, Saint-Germain Paris, France, *Éditions Eyrolles*.
- Gonçalves, P. B. & Batista, R. C., 1986. Frequency Response of Cylindrical Shells Partially Submerge dor Filled with Liquid. In: *Journal of Sound and Vibration*. DOI: 0022-460X/87/040059+12.
- Kim, Y., Lee, Y. S. & Ko, S. H., 2003. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. *International Journal of Sound and Vibration*, pp. 869–897.
- Koga, T., 1988. Effects of boundary conditions on the free vibrations of circular cylindrical shells under uniform external pressure. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 242–248.
- Lakis, A. A. & Paidoussis, M. P., 1971. Free vibration of cylindrical shells partially filled with liquid. *International Journal of Sound and Vibration*, pp. 1–15.
- Lee, L. T. & Lu, J. C., 1995. Free vibration of cylindrical shells filled with liquid. *Computers & Structures*, No. 5, pp 997 – 1001.
- Lopez, A. A., 2014. Estudo comparativo analítico-numérico de vibrações livres e livres acopladas fluido-estrutura em cascas cilíndricas. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e*

Construção Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 120 p.

Mendes, N. B., 2013. Estudo Comparativo Analítico e Numérico de Aspectos da Interação Fluido Estrutura Aplicados a Barragens em arco. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 318 p.

Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., 2014. Um estudo de vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas com anéis enrijecedores e contend fluido. *CILAMCE 2014 – XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, CE, Brasil, 19 p.

Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., 2015. Estudo de vibração acoplada de cascas cilíndricas sob diferentes níveis de fluido e posições de anéis enrijecedores. *CILAMCE 2015 – XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 16 p.

Mendes, N. B., Pedroso, L. J. & Ribeiro, P. M. V., 2016. Vibrações livres acopladas em cascas cilíndricas contendo fluido e conectadas com placas de fundo apoiadas em base elástica. *CILAMCE 2016 – XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brasil, 20 p.

Paula, M. R., 2003. Estudo do Acoplamento Acústico-Estrutural de uma Estrutura do Tipo Casca Cilíndrica Uniforme. *Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica*, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, Brasil, 140 p.

Sharma, C. B. & Johns, D. J., 1971. Vibration characteristics of a camped-free and camped-ring-stiffened circular cylindrical shell. *Inc. Journal of Sound and Vibration*, pp. 459–474.

Soedel, W., 2005. Vibrations of Shells and Plates. *Third Edition*, New York, United States, Marcel Dekker.

Souza, S. M., 2007. Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 199 p.