



O MÉTODO MULTIESCALA ARLEQUIN APLICADO AO PROBLEMA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Jeferson Wilian Dossa Fernandes

Giovane Avancini

Rodolfo André Kuche Sanches

jefersondossa@usp.br

giavancini@usp.br

rodolfo.sanches@usp.br

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (EESC/USP)

Av. Trabalhador Sãocarlense, 400, CEP 13566-590, São Carlos, São Paulo, Brasil

Resumo. *Diversas problemas da engenharia e da mecânica computacional são governados por efeitos em diferentes escalas. Assim, para que se possam realizar simulações realísticas e precisas, é necessário levar em conta as descontinuidades locais (como fissuras, orifícios, enrijecedores, etc.) no modelo numérico global empregado. No campo da mecânica dos fluidos computacional, como exemplo de efeito localizado pode-se citar o desprendimento de vórtices ou a formação da camada limite em escoamentos. No que se refere à mecânica do contínuo, normalmente empregada para a modelagem deste tipo de problema, a principal dificuldade em se considerar os efeitos citados anteriormente consiste no fato de que a maioria dos métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos Finitos, realiza a discretização como a combinação linear de funções de forma contínuas. Além disso, as técnicas de refinamento adaptativo, embora robustas, não se mostram flexíveis além de implicarem no aumento significativo do custo computacional da análise. Neste trabalho, o método multiescala Arlequin é aplicado à simulação do caso estacionário de escoamentos incompressíveis governados pelas equações de Navier-Stokes. Esta técnica propõe a consideração das descontinuidades locais por meio da superposição de modelos refinados em um modelo global, capazes de capturar os efeitos de pequena escala. Diferentemente de outras técnicas de superposição de domínios, o método Arlequin realiza a compatibilização entre os modelos por meio de um campo de multiplicadores de Lagrange. Testes numéricos são apresentados empregando-se os operadores de acoplamento H_1 e L_2 comprovando a eficiência e robustez da técnica.*

Palavras-chave: *Métodos de Malhas Sobrepostas, Método Multiescala Arlequin, Método dos Elementos Finitos, Escoamentos Incompressíveis, Equações de Navier-Stokes.*

1 INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo escoamentos incompressíveis compõem grande parte da aplicação da mecânica dos fluidos em problemas de engenharia, tais como a ação do vento sobre edifícios, pontes e torres, escoamentos em canais, tubulações, vertedores e barragens dentre outros.

Para realizar a modelagem computacional de tais problemas, normalmente utilizam-se métodos numéricos tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) que baseiam-se na discretização do domínio em sub-regiões e na posterior aplicação das equações governantes em tais subdomínios, resolvendo o problema de meio contínuo por meio de uma aproximação discreta. No caso da simulação de escoamentos incompressíveis, devido às complexidades geométricas ou às características de determinado escoamento, pode-se observar efeitos em diferentes escalas sendo necessária, portanto, a utilização de discretizações não-uniformes, com zonas de maior refinamento para a captura adequada dos efeitos que deseja-se observar. Esta operação pode vir a comprometer a eficiência do método numérico, pois leva a um aumento drástico no número de graus de liberdade do problema discreto, implicando no aumento no tempo de processamento.

Nesse contexto, novas metodologias visando a flexibilidade do MEF e aumentando seu espectro vem sendo desenvolvidas. Como exemplo, podem-se destacar os métodos sem malha (Nayroles *et al.*, 1992), que basicamente introduzem o conceito de partículas finitas aos elementos finitos, as técnicas que associam os métodos sem malha e o MEF (Belytschko *et al.*, 1995) e os métodos de partição da unidade (Melenk & Babuska, 1996) que contemplam o MEF generalizado (G-FEM) (Strouboulis *et al.*, 2001) e o MEF estendido (X-FEM) (Sukumar *et al.*, 2001; Moës *et al.*, 2003).

Enquanto o G-FEM utiliza funções especiais e técnicas de integração sofisticadas, o X-FEM aumenta o espectro de enriquecimento dos espaços de elementos finitos clássicos (assim como alguns métodos sem malha) utilizando campos irregulares do tipo *level-set*, com o objetivo de levar em conta descontinuidades geométricas ou materiais no modelo global, necessitando de remalhamento apenas para a integração numérica. Contudo, a aplicação desses modelos é fortemente dependente do conhecimento do comportamento da solução local.

Outros métodos sugerem trabalhar com macro e micro modelos, com os micro modelos corrigindo e atualizando os macro modelos (ver Hughes *et al.* (1998); Fish & Belsky (1995)). O método *S*, proposto por Fish (1992) representa uma estratégia diferente dos tipos local-global apresentados até então. Ele superpõe as malhas locais e refinadas adicionais a uma global existente, permitindo assim uma modelagem particular diferente nas malhas superpostas.

Tal como o método *S*, o método Arlequin (Dhia, 1998; Dhia & Rateau, 2001) baseia-se numa superposição de modelos numa zona Ω (espécie de zona de colagem) supostamente conhecida, de modo a combinar um modelo global menos refinado e um local mais refinado onde se deseja capturar os efeitos de pequena escala. No entanto, ao contrário do anterior, no método Arlequin os modelos não são adicionados (com risco de redundância e limitação de flexibilidade), mas cruzados e colados uns aos outros em uma subzona Ω_g de Ω por meio de um campo de multiplicadores de Lagrange.

O sucesso do método Arlequin depende, no entanto, da escolha adequada de diferentes parâmetros, como a zona de superposição e a definição de sua parcela livre e de acoplamento; o operador de acoplamento; o espaço dos multiplicadores de Lagrange; e os parâmetros das

funções ponderadoras que realizam o balanço de energia entre os modelos Dhia (2008).

Atualmente, o método Arlequin vem sendo desenvolvido em diversos tipos de aplicações, como para o acoplamento de modelos partícula-contínuo Bauman *et al.* (2008), em estudos com materiais incompressíveis Jamond & Dhia (2013) e em combinação com modelos de ordem reduzida Nazeer *et al.* (2014); Néron *et al.* (2016). Neste trabalho, apresenta-se a sua aplicação ao caso estacionário das equações de Navier-Stokes, introduzindo este método no campo da dinâmica dos fluidos computacional.

2 FORMA FRACA E APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES POR MEIO DO MEF

Seguindo os desenvolvimentos de Donea *et al.* (1982), Bazilevs *et al.* (2013) e Reddy & Gartling (2010), nesta seção apresenta-se a discretização por meio do MEF das equações que governam o problema estacionário de escoamentos incompressíveis, por meio da técnica conhecida como formulação mista, que preserva as incógnitas primitivas (velocidade e pressão) e é obtida pela aplicação direta do Método de Galerkin. Para tanto, consideremos $\Omega \in \mathbb{R}^d$, com $d = 2, 3$, o domínio espacial que define o escoamento de um fluido com contorno $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. A forma forte do problema de valor de contorno definido em Ω para a solução estacionária de um escoamento incompressível na descrição Euleriana é governado pelas equações de Navier-Stokes, dado por: determinar os campos de velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}$ e pressão $P(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q}$ tais que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ em } \Omega, \\ \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{g}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_D \text{ em } \Gamma_D, \\ -P\mathbf{n} + \mu (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathcal{T} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\mathbf{g}$ representa a densidade das forças de domínio, ρ é a massa específica do fluido, $\mathbf{n}$ é o vetor normal à Γ_N , $\mathbf{v}_D$ é o campo de velocidade prescrito na porção do contorno Γ_D , que corresponde às condições de contorno de Dirichlet, $\mathcal{T}$ representa as forças de superfície aplicadas na porção Γ_N do contorno, correspondente às condições de Neumann e $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor das tensões de Cauchy, definido por:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, p) = -P\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = -P\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T), \quad (2)$$

em que $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

A forma fraca, ou integral, das equações governantes pode ser obtida multiplicando-se a equação de conservação do *momentum* por uma função teste de velocidade $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$, tal que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ em Γ_D , e a equação de conservação da massa por uma função teste de pressão $q \in \mathcal{Q}$ e integrando o resultado sobre o domínio computacional Ω em ambos os casos. Em seguida, integrando-se por partes a parcela de tensão na Eq. 1, a forma fraca para o problema incompressível é dada por: dados $\mathbf{g}$, $\mathbf{v}_D(\mathbf{x})$ e $\mathcal{T}$, determinar o par $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), P(\mathbf{x})) \in \mathcal{S} \times \mathcal{Q}$ tal que para quaisquer funções $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ e $q \in \mathcal{Q}$ tenha-se:

$$-\int_{\Omega_t} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{g} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} \, d\Gamma_N. \quad (4)$$

Assim, dividindo-se a Eq. 4 por ρ , pode-se representar a forma fraca do problema de escoamentos incompressíveis definidos pelas Eq. 3 e 4 numa notação compacta:

$$\begin{cases} b(\mathbf{v}, q) = 0 & \forall q \in \mathcal{Q}, \\ a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{v}; \mathbf{w}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{w}, p) = f(\mathbf{w}, \mathbf{g}) + l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\nu)_{\Gamma_N} & \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (5)$$

de modo que p é a pressão cinemática do fluido dada por $p = P/\rho$ e os operadores bilineares e trilinear são expressor por:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \bar{\epsilon}(\mathbf{w}) \mathbf{C}_\nu \bar{\epsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (6)$$

$$b(\mathbf{w}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\Omega, \quad (7)$$

$$b(\mathbf{v}, q) = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (8)$$

$$c(\mathbf{v}; \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \quad (9)$$

$$f(\mathbf{w}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{g} \, d\Omega, \quad (10)$$

$$l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mathcal{T}}_\nu)_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}}_\nu \, d\Gamma_N. \quad (11)$$

com $\bar{\epsilon}(\mathbf{v})$, $\mathbf{C}_\nu$ e $\boldsymbol{\mathcal{T}}_\nu$ dados por:

$$\bar{\epsilon}(\mathbf{v})^T = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right], \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_\nu = \nu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}_\nu = -p\mathbf{I} + \nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T). \quad (14)$$

em que ν representa a viscosidade cinemática do fluido $\nu = \mu/\rho$.

Para realizar a discretização em elementos finitos, introduz-se as aproximações locais para velocidade $\mathbf{v}^h \in \mathcal{S}^h$ e pressão $p^h \in \mathcal{Q}^h$, assim como às suas funções ponderadoras associadas $\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h$ e $q^h \in \mathcal{Q}^h$, em que $\mathcal{S}^h$, $\mathcal{V}^h$ e $\mathcal{Q}^h$ denotam os espaços de dimensões finitas de $\mathcal{S}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{Q}$, respectivamente.

A aproximação adotada para o campo de velocidades $\mathbf{v}^h$ respeita a condição $\mathbf{v}^h = \mathbf{u}^h + \mathbf{v}_D^h$, em que $\mathbf{v}_D^h$ representa o campo aproximado de velocidades que atende às condições de contorno de Dirichlet em Γ_D . Deste modo, o campo de velocidades auxiliar $\mathbf{u}^h$ pertence ao mesmo espaço $\mathcal{V}^h$ da função ponderadora $\mathbf{w}^h$. Assim, pode-se definir o problema de escoamento incompressível discretizado por meio do método dos elementos finitos como: determinar os campos de $\mathbf{u}^h$ e pressão q^h aproximados para quaisquer $(\mathbf{w}^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times \mathcal{Q}^h$ tais que:

$$\begin{cases} b(\mathbf{u}^h, q^h) = -b(\mathbf{v}_D^h, q^h), \\ a(\mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) + c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{u}^h) + b(\mathbf{w}^h, p^h) = \\ f(\mathbf{w}^h, \mathbf{g}^h) + l(\mathbf{w}^h, \mathcal{T}^h)_{\Gamma_N} - a(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}_D^h) - c(\mathbf{v}^h; \mathbf{w}^h, \mathbf{v}_D^h). \end{cases} \quad (15)$$

De posse da discretização das equações de Navier-Stokes para o caso incompressível, pode-se definir as aproximações para as velocidades e pressões como as combinações lineares entre as funções de forma e os valores nodais da discretização como:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in n_v \setminus n_D} \Psi_A(\mathbf{x}) \mathbf{u}_A, \quad \mathbf{v}_D^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in n_D} \Psi_A(\mathbf{x}) \mathbf{v}_D(\mathbf{x}_A), \quad (16)$$

$$p^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in n_p} \phi_A(\mathbf{x}) p_A, \quad (17)$$

em que n_v e n_p são os nós utilizados na discretização da velocidade e pressão, n_D representa os nós pertencentes à porção do contorno que possui velocidade prescrita, $\mathbf{u}_A$ e p_A são os valores nodais de velocidade e pressão e ψ_A e ϕ_A são as funções de forma associadas aos correspondentes nós A , tal que $\Psi_A = \psi_A \mathbf{I}$.

Do mesmo modo, tem-se para as funções ponderadoras a aproximação

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in n_v \setminus n_D} \Psi_A(\mathbf{x}) \mathbf{w}_A, \quad q^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in n_p} \phi_A(\mathbf{x}) q_A, \quad (18)$$

Deste modo, as aproximações definidas em 16-18 são introduzidas nas funções aproximadas e nas funções ponderadoras de modo que, utilizando-se uma notação matricial, o sistema 15 pode ser representado como:

$$\begin{cases} [\mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{v})] \mathbf{u} + \mathbf{Q} \mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{u} = \mathbf{h} \end{cases} \quad (19)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{v}) & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

em que as submatrizes $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ e $\mathbf{Q}$ e os subvetores $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ são dados por:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{A}_e^T \mathbf{K}_e \mathcal{A}_e; \quad (\mathbf{K}_e)_{ij} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_\nu \mathbf{B}_j d\Omega_e, \quad (21)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{A}_e^T \mathbf{C}_e \mathcal{A}_e; \quad (\mathbf{C}_e)_{ij} = \int_{\Omega_e} \Psi_i(\mathbf{v}) \cdot \nabla \Psi_j d\Omega_e, \quad (22)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{A}_e^T \mathbf{Q}_e \mathcal{A}_e; \quad (\mathbf{Q}_e)_{ik} = - \int_{\Omega_e} \phi_k \nabla \cdot \Psi_i d\Omega_e, \quad (23)$$

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{A}_e^T \mathbf{f}_e; \quad (\mathbf{f}_e)_i = \int_{\Omega_e} \Psi_i \mathbf{g} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{eN}} \Psi_i \mathcal{T}_\nu d\Gamma_{eN}, \quad (24)$$

$$- (\mathbf{K}_e)_{iB} \mathbf{v}_{DB} - (\mathbf{C}_e)_{iB} \mathbf{v}_{DB},$$

$$\mathbf{h} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathcal{A}_e^T \mathbf{h}_e; \quad (\mathbf{h}_e)_k = -(\mathbf{Q}_e)_{kA}^T \mathbf{v}_{DA} \quad (25)$$

com i e j variando de 1 ao número de nós do elemento que interpolam velocidade e k de 1 ao número de nós do elemento que interpolam pressão. Além disso, n_{el} representa o número de elementos da discretização, Ω_e é o domínio de um elemento finito, $\mathcal{A}_e$ é a matriz de espalhamento que relaciona os graus de liberdade locais com os globais e $\mathbf{B}$ é a matriz taxa de velocidade de deformação, que para o caso tridimensional é dada por

$$\mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} & \frac{\partial \psi_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \psi_i}{\partial y} & \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Nesta notação, $\mathbf{K}$ representa a matriz de viscosidade (ou difusão), $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ representam os respectivos operadores gradiente e divergente e $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ é a matriz de convecção (ou advecção) e descreve os efeitos convectivos não lineares. Por fim, $\mathbf{f}$ contém os termos relativos às forças de domínio e de superfície aplicadas ao fluido além dos termos que impõem as condições de Dirichlet ao escoamento, também presentes no termo $\mathbf{h}$.

Na formulação apresentada anteriormente, pode-se observar ainda que $\mathbf{p}$ equivale a multiplicadores de Lagrange, com a função de impor a incompressibilidade do escoamento. Com relação à estrutura, percebe-se que o sistema resultante é assimétrico devido à presença da matriz de termos convectivos, além de ser esparsa e positiva semi-definida. Este tipo de sistemas são característicos de pontos de sela, ou *saddle-point problems*, que historicamente demandam de grande estudo e esforço para sua resolução. O uso de algoritmos clássicos para a resolução de sistemas lineares como a eliminação Gaussiana nem sempre retornam respostas estáveis, principalmente devido à presença de zeros nas diagonais que implicam em pivôs nulos ao passo

que estratégias iterativas possuem baixa convergência devido, principalmente, à condição de incompressibilidade (Reddy & Gartling, 2010). Muitas pesquisas nessa área vêm dedicando esforços especialmente na busca por métodos iterativos e de pré-condicionadores adaptados especificamente para este problema, como é o caso dos trabalhos de Elman *et al.* (2002, 2005); Melchior *et al.* (2012).

Com relação às aproximações para as variáveis, uma condição necessária para que se obtenham respostas estáveis é de que o núcleo da submatriz $\mathbf{Q}$ deve ser nulo, ou seja $\ker \mathbf{Q} := \{\mathbf{q} | \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_p} \text{ e } \mathbf{Q} \mathbf{q} = \mathbf{0}\}$. Para que se satisfaça a condição de que $\ker \mathbf{Q} = \{\mathbf{0}\}$, as interpolações empregadas para a velocidade e pressão devem satisfazer a condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi*. Esta restrição matemática relaciona os espaços das funções utilizadas para a aproximação da velocidade e pressão, fazendo com que a sua escolha não possa ser arbitrária e ainda, que a ordem de aproximação para cada uma das variáveis em geral seja diferente, de modo a evitar a obtenção de respostas oscilatórias para a pressão. Nesse sentido, Donea & Huerta (2003) demonstram que uma condição necessária, mas não suficiente, para os espaços das funções aproximadoras é de que $\dim \mathcal{Q}^h \leq \dim \mathcal{V}^h$.

A condição suficiente, no entanto, é dada pela restrição LBB que define que a existência e unicidade do par de soluções $(\mathbf{u}^h, p^h)$ depende da existência de uma constante β independente da discretização empregada, tal que

$$\inf_{q^h \in \mathcal{Q}^h} \sup_{\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot \mathbf{w}^h)}{\|q\|_0 \|\mathbf{w}^h\|_1} \geq \beta > 0, \quad (27)$$

Como pode-se verificar, provar que uma combinação de aproximações satisfaz a condição LBB não é uma tarefa trivial. Entretanto, trabalhos como o de Zienkiewicz *et al.* (2005) e Donea & Huerta (2003) indicam alguns exemplos de elementos finitos já testados e que atendem à condição LBB, de modo que neste trabalho empregou-se o elemento P2P1, triangular de aproximação quadrática para a velocidade e linear para a pressão.

3 O MÉTODO MULTIESCALA ARLEQUIN APLICADO AO PROBLEMA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

O método multiescala Arlequin foi introduzido no trabalho de Dhia (1998) e trata-se de uma técnica multiescala proposta inicialmente no âmbito da mecânica da fratura. Ao contrário de outros métodos multiescala que baseiam-se no enriquecimento da base de funções de aproximação, este método se fundamenta na sobreposição de dois ou mais modelos, de modo a considerar as descontinuidades locais, tais como fissuras, em um modelo cujo grau de refinamento seja capaz de capturar os efeitos desejados. Desde o seu surgimento, o método Arlequin vem então sendo aplicado à solução de diversos tipos de problemas tais como a modelagem da propagação de fissuras Dhia & Rateau (2005); Dhia & Jamond (2010), contato e impacto Dhia & Zammali (2007); Dhia & Torkhani (2011), de interação fluido-estrutura Caleyron *et al.* (2013), em que os autores utilizam esta técnica para modelar a interação fluido-estrutura junto a cascas fissuradas, entre outros.

No contexto da mecânica dos fluidos, no entanto, a utilização do método Arlequin ainda permanece inexplorada. A aplicação aos escoamentos incompressíveis apresentada nesta seção tem como base os desenvolvimentos de Jamond & Dhia (2013) que demonstram uma metodologia

para a consideração da condição de incompressibilidade para a análise estática linear de sólidos incompressíveis.

De um modo geral, o método Arlequin tem como base três ideias principais, que podem ser verificadas junto à Fig. 1:

- A superposição de um modelo mecânico em uma sub-região do domínio global;
- A distribuição da energia entre os modelos mecânicos na região de superposição por meio da utilização de funções ponderadoras que respeitem a partição da unidade e a conservação da energia mecânica;
- O acoplamento entre os modelos em parte da região de superposição, denominada zona de colagem.

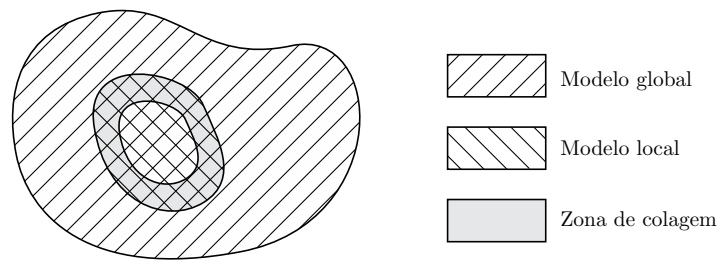


Figura 1: Sobreposição dos modelos no método Arlequin.

Assumindo-se que no modelo denominado local está localizada a zona de refinamento de interesse, pode-se então definir os modelos global Ω_0 e local Ω_1 de tal modo que o domínio computacional $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$.

Do mesmo modo, a zona de superposição dos modelos Ω_s pode ser definida como $\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1$, podendo também ser subdividida em duas regiões Ω_c e Ω_f , tais que

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_f, \quad (28)$$

$$\text{meas}(\Omega_c) > 0, \quad (29)$$

em que Ω_c e Ω_f são denominadas zonas de colagem e livre, respectivamente, e $\text{meas}(\bullet)$ indica a medida da região.

Como o modelo Ω_1 encontra-se sobreposto a Ω_0 , pode-se verificar que existirão pontos coincidentes e a imposição da condição de incompressibilidade nestes pontos em ambos os modelos pode gerar problemas de redundância, acarretando num sistema singular. Deste modo, o que se propõe é a aplicação da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio uma única vez. Assim, esta tarefa pode ser realizada de duas formas: retirando-se a condição de incompressibilidade da zona de colagem no modelo local ou global e, em ambos os casos, removendo a condição de incompressibilidade da zona livre no modelo global, como ilustrado na Figura 2.

Embora ambos os casos possam ser empregados, Dhia & Rateau (2005) e Guidault & Belytschko (2007) reportam que a utilização de discretizações independentes, gerando malhas não conformes, conduz a soluções com diferentes particularidades. No caso da Fig. 2(b), a solução do modelo refinado na zona de colagem coincide exatamente com a solução do modelo

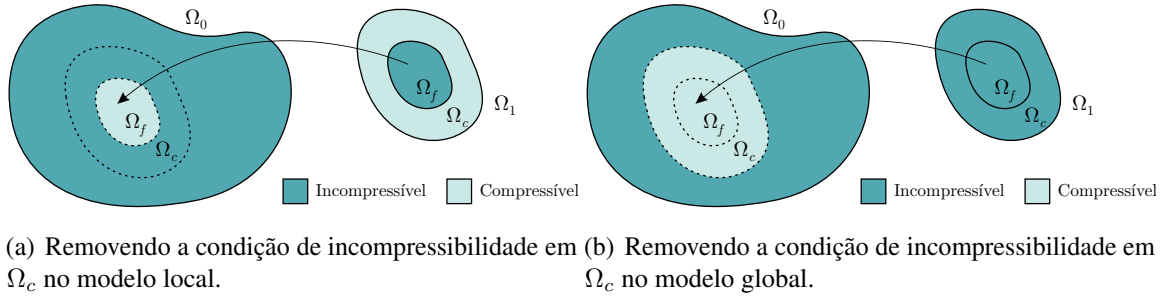


Figura 2: Modos de remoção da condição de incompressibilidade em Ω_c .

Fonte: Adaptado de Jamond & Dhia (2013).

global. Por outro lado, no caso da Fig. 2(a), as soluções se aproximam num sentido de média. No entanto, ambas as aproximações podem ser úteis, dependendo da aplicação desejada.

A demonstração da utilização do método Arlequin para a solução de problemas de escoamentos incompressíveis é realizada tomando-se inicialmente o caso do escoamento de Stokes, em que os termos convectivos, definidos pelo operador trilinear c na Eq. 15 são desprezados. De modo a simplificar os desenvolvimentos subsequentes, porém sem perda de generalidade da formulação, considerou-se ainda que o modelo local encontra-se completamente imerso no modelo global, implicando que as condições de contorno são aplicadas somente nas respectivas porções de contorno do modelo global. Diante destas considerações, o problema estacionário de escoamentos incompressíveis governados pelas equações de Stokes no contexto do método Arlequin é dado por: dados $\mathbf{g}$, $\mathbf{v}_{0D}$ e $\mathcal{T}$, determinar os campos de velocidade $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{V}_0$ e $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1$, pressão $p_0 \in \mathcal{Q}_0$ e $p_1 \in \mathcal{Q}_1$ e de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}$ tais que

$$\bar{a}_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0) + b_0(\mathbf{w}_0, p_0) + d(\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\lambda}) = \bar{f}_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{g}) \quad (30)$$

$$+ l_0(\mathbf{w}_0, \mathcal{T})_{\Gamma_{0N}} - \bar{a}_0(\mathbf{w}_0, \mathbf{v}_{0D}) \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathcal{V}_0,$$

$$\bar{a}_1(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1) + b_1(\mathbf{w}_1, p_1) - d(\mathbf{w}_1, \boldsymbol{\lambda}) = \bar{f}_1(\mathbf{w}_1, \mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}_1, \quad (31)$$

$$b_0(\mathbf{v}_0, q_0) = -b_0(\mathbf{v}_{0D}, q_0) \quad \forall q_0 \in \mathcal{Q}_0, \quad (32)$$

$$b_1(\mathbf{v}_1, q_1) = -b_1(\mathbf{v}_{1D}, q_1) \quad \forall q_1 \in \mathcal{Q}_1, \quad (33)$$

$$d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathcal{M}, \quad (34)$$

com os operadores $\bar{a}_i$, $\bar{f}_i$ e d definidos como

$$\bar{a}_i(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i) = \alpha_i a_i(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i), \quad (35)$$

$$\bar{f}_i(\mathbf{w}_i, \mathbf{g}) = \eta_i f_i(\mathbf{w}_i, \mathbf{g}), \quad (36)$$

$$d(\mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}) = \int_{\Omega_c} \kappa_0 \{ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\chi} \} + \kappa_1 \{ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\chi}) \} d\Omega_c, \quad (37)$$

em que κ_0 e κ_1 são parâmetros estritamente positivos normalmente relacionados ao grau de refinamento relativo entre as malhas utilizadas para a discretização dos modelos e α_i e η_i são funções ponderadoras delimitadas em Ω e que satisfazem a partição da unidade dada pela seguinte definição

$$\begin{cases} \alpha_i, \eta_i \in [0, 1] \text{ em } \Omega, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = \eta_0 + \eta_1 = 1 \text{ em } \Omega, \\ \alpha_i = \eta_i = 1 \text{ em } \Omega_i \setminus \Omega_j, \ i \neq j, \\ \alpha_i = \eta_i = k_i > 0 \text{ em } \Omega_f, \end{cases} \quad (38)$$

em k_i é uma constante maior que zero, ilustrada na Fig. 3.

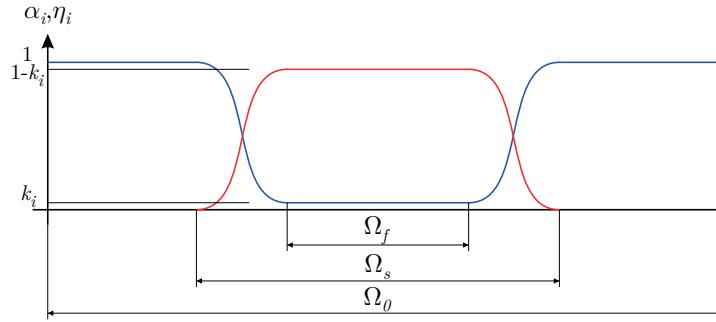


Figura 3: Funções ponderadoras α_i e η_i .
Fonte: Adaptado de Dhia (2008).

Em geral, toma-se $\alpha_i = \eta_i$, porém a formulação apresentada não possui quaisquer restrições quanto à escolha das funções ponderadoras.

Para facilitar os desenvolvimentos subsequentes, d é denominado operador H_1 para valores de κ_0 e κ_1 maiores do que zero e operador L_2 para valores de $\kappa_0 > 0$ e $\kappa_1 = 0$.

Além disso, em relação à imposição da condição de incompressibilidade na zona de colagem, já destacada anteriormente, no caso da Fig. 2(a), por exemplo, em que a condição de incompressibilidade é aplicada ao modelo global, a solução do problema Arlequin em Ω fica definida como

$$\mathbf{u}^{alr} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_s, \\ \alpha_0 \mathbf{u}_0 + \alpha_1 \mathbf{u}_1 \text{ em } \Omega_s. \end{cases} \quad (39)$$

$$p^{alr} = \begin{cases} p_0 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_f, \\ p_1 \text{ em } \Omega_1 \setminus \Omega_c. \end{cases} \quad (40)$$

Para o caso contrário, da Fig. 2(b), tem-se

$$\mathbf{u}^{alr} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_s, \\ \alpha_0 \mathbf{u}_0 + \alpha_1 \mathbf{u}_1 \text{ em } \Omega_s. \end{cases} \quad (41)$$

$$p^{alr} = \begin{cases} p_0 \text{ em } \Omega_0 \setminus \Omega_s, \\ p_1 \text{ em } \Omega_1. \end{cases} \quad (42)$$

Procedendo com a discretização das Eq. 30-34, pode-se definir o problema Arlequin discreto como: determinar os campos de velocidade $\mathbf{v}_0^h \in \mathcal{V}_0^h$ e $\mathbf{v}_1^h \in \mathcal{V}_1^h$, pressão $p_0 \in \mathcal{Q}_0^h$ e $p_1 \in \mathcal{Q}_1^h$ e de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}^h \in \mathcal{M}^h$ tais que:

$$\bar{a}_0(\mathbf{w}_0^h, \mathbf{v}_0^h) + b_0(\mathbf{w}_0^h, p_0^h) + d(\mathbf{w}_0^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \bar{f}_0(\mathbf{w}_0^h, \mathbf{g}^h) \quad (43)$$

$$+ l_0(\mathbf{w}_0^h, \boldsymbol{\tau}^h)_{\Gamma_{0N}} - \bar{a}_0(\mathbf{w}_0^h, \mathbf{v}_{0D}^h) \quad \forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_0^h,$$

$$\bar{a}_1(\mathbf{w}_1^h, \mathbf{v}_1^h) + b_1(\mathbf{w}_1^h, p_1^h) - d(\mathbf{w}_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \bar{f}_1(\mathbf{w}_1^h, \mathbf{g}^h) \quad \forall \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_1^h, \quad (44)$$

$$b_0(\mathbf{v}_0^h, q_0^h) = -b_0(\mathbf{v}_{0D}^h, q_0^h) \quad \forall q_0^h \in \mathcal{Q}_0^h, \quad (45)$$

$$b_1(\mathbf{v}_1^h, q_1^h) = -b_1(\mathbf{v}_{1D}^h, q_1^h) \quad \forall q_1^h \in \mathcal{Q}_1^h, \quad (46)$$

$$d(\mathbf{v}_1^h - \mathbf{v}_0^h, \boldsymbol{\chi}^h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi}^h \in \mathcal{M}^h, \quad (47)$$

De modo análogo ao apresentado anteriormente para o monomodelo, pode-se introduzir as aproximações em elementos finitos aos campos de velocidade e pressão. Quanto aos campos de multiplicadores de Lagrange, adotam-se funções aproximadoras Ψ^λ com ordem iguais às do campos de velocidade, segundo as recomendações de Jamond & Dhia (2013), de modo a se obter um problema matricial do tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{Q}_0 \mathbf{p}_0 + \mathbf{L}_0 \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{f}_0(\mathbf{v}_0) \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_1) \\ \mathbf{Q}_0^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{h}_0 \\ \mathbf{Q}_1^T \mathbf{u}_1 = \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{L}_0^T - \mathbf{L}_1^T = \mathbf{0} \end{cases} \quad (48)$$

A extensão ao caso não linear representado pelas equações de Navier-Stokes, no entanto, é feita de modo direto adicionando-se as parcelas convectivas de cada modelo junto às duas primeiras parcelas na Eq. 48, tal que:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{C}_0(\mathbf{u}_0) \mathbf{u}_0 + \mathbf{Q}_0 \mathbf{p}_0 + \mathbf{L}_0 \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{f}_0(\mathbf{v}_0) \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{p}_1 - \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{f}_1(\mathbf{v}_1) \\ \mathbf{Q}_0^T \mathbf{u}_0 = \mathbf{h}_0 \\ \mathbf{Q}_1^T \mathbf{u}_1 = \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{L}_0^T - \mathbf{L}_1^T = \mathbf{0} \end{cases} \quad (49)$$

Quanto à consideração da condição de incompressibilidade na zona de colagem, dentre os vários testes realizados por Jamond & Dhia (2013), apenas quatro casos apresentaram resultados estáveis e em acordo com a condição LBB (testada numericamente pelos autores), são eles:

1. Multiplicadores de Lagrange definidos no modelo local, $\alpha_1=0$ em Ω_c e condição de incompressibilidade mantida no modelo global;
2. Multiplicadores de Lagrange definidos no modelo local, $\alpha_1=1$ em Ω_c e condição de incompressibilidade mantida no modelo global;

3. Multiplicadores de Lagrange definidos no modelo global, $\alpha_1=1$ em Ω_c e condição de incompressibilidade mantida no modelo global;
4. Multiplicadores de Lagrange definidos no modelo global, $\alpha_1=1$ em Ω_c e condição de incompressibilidade mantida no modelo local;

Devido à maior facilidade para a realização da integração numérica das matrizes L_i e também a busca da correspondência entre os pontos de integração, em todos os resultados apresentados neste trabalho o segundo caso foi sempre o escolhido variando-se, no entanto, a aproximação da função α_1 . No trabalho de Jamond & Dhia (2013), os autores utilizaram funções ponderadoras descontínuas e nos exemplos apresentados adiante, foram realizados testes com diversos tipos de funções.

4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Fluido pressurizado em uma câmara

O primeiro exemplo estudado neste trabalho trata-se de um fluido pressurizado em uma câmara como ilustra a Fig. 4(a), apresentado por Jamond & Dhia (2013). O problema é modelado por meio das equações de Stokes, negligenciando os termos convectivos na análise. Além disso empregaram-se malhas coincidentes para o modelo local (em vermelho) e global (em preto), ilustradas na Fig. 4(b), bem como a zona de colagem adotada (em azul). Cabe destacar que a discretização dos modelos pode ser feita de modo independente, de modo que nós coincidentes nos dois modelos são duplicados. No entanto, a escolha por malhas coincidentes neste primeiro exemplo é realizada por proporcionar a eliminação de erros de integração na montagem dos operadores de acoplamento L_0 e L_1 . Segundo a literatura, a espessura recomendada para a zona de colagem é no mínimo igual ao dobro do comprimento característico dos elementos do modelo global, respeitada na discretização empregada. Quanto à α_i e η_i , adotaram-se funções ponderadoras de ordem linear.

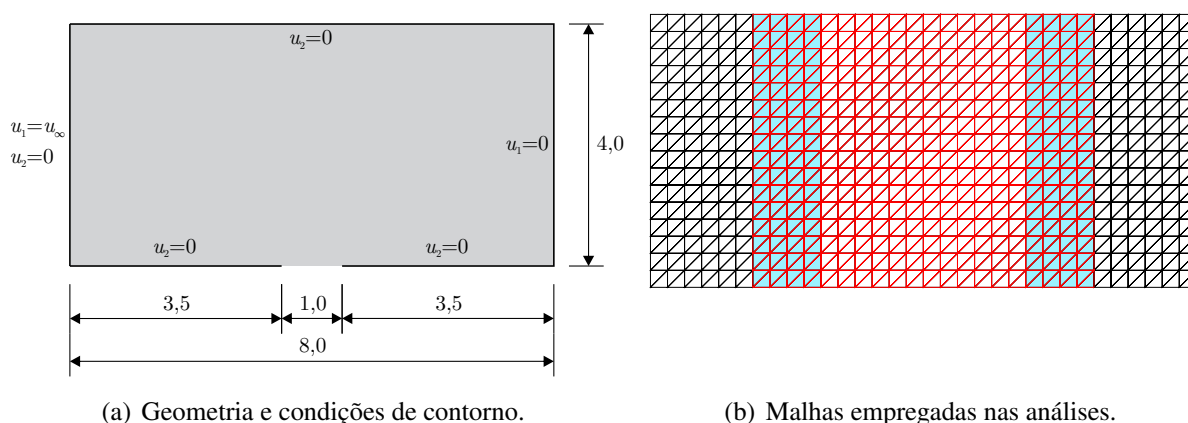


Figura 4: Fluido pressurizado em uma câmara

Como destacado anteriormente, implementou-se o cenário 2, recomendado por Jamond & Dhia (2013), o que significa que a condição de incompressibilidade foi retirada dos elementos

contidos na zona de colagem no modelo local. Além disso, o espaço dos multiplicadores de Lagrange foi adotado como igual ao espaço de funções que realiza a aproximação das velocidades do modelo local nesta região.

Deste modo, dois testes foram realizados: utilizando-se os operadores L_2 e H_1 , este último com $\kappa_0 = 4$ e $\kappa_1 = 1$, de modo que os resultados obtidos para os perfis de velocidade para ambos os casos são apresentados na Fig. 5, bem como o monomodelo de referência, obtido com uma discretização idêntica ao modelo global.

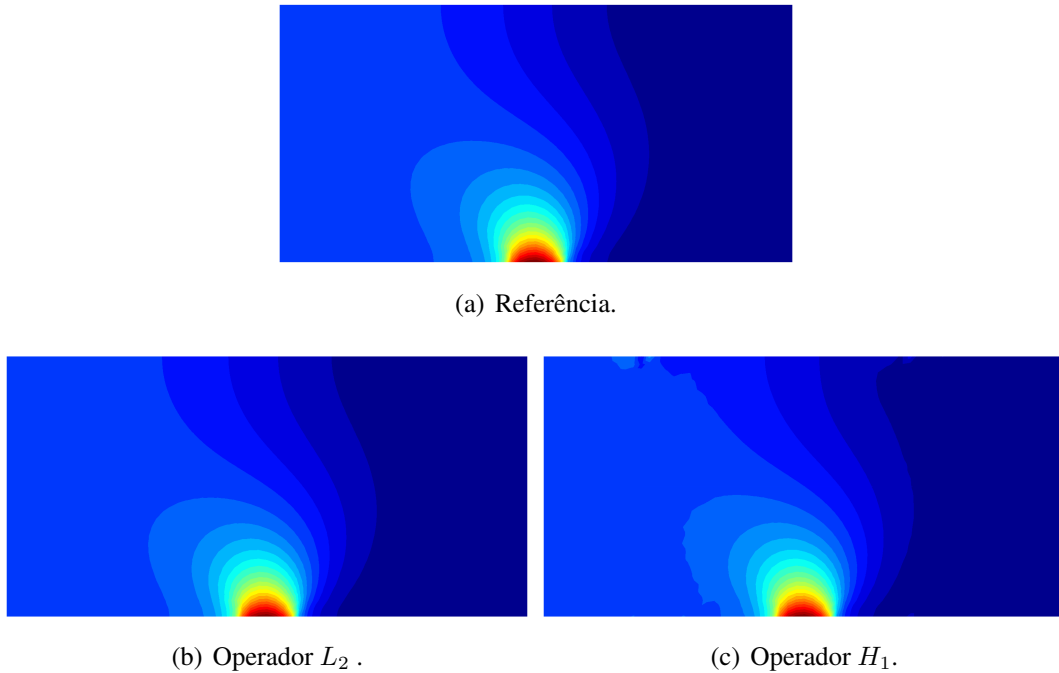


Figura 5: Módulo do vetor de velocidades u .

Como pode-se verificar, ambos os operadores apresentaram excelentes resultados, permitindo reproduzir com bastante precisão os valores de referência. Entretanto, para o caso do operador H_1 , observaram-se resultados espúrios próximos às bordas da zona de colagem. Isso se deve ao fato de que o sistema linear resultante (Eq. 48), é mal condicionado independente do operador de acoplamento utilizado. Entretanto, o operador H_1 torna o sistema ainda mais mal condicionado, o que acaba por dificultar a obtenção de uma solução precisa por meio de métodos iterativos tais como o GMRES. Por outro lado, trabalhos como o de Jamond & Dhia (2013) e Dhia & Torkhani (2011) apontam para técnicas mais eficientes de resolução do problema global, particionando-o em subsistemas, os quais pretende-se implementar futuramente.

Ainda em relação a este exemplo, construiu-se o gráfico de valores dos multiplicadores de Lagrange ao longo da linha horizontal média em uma das porções da zona de colagem, como ilustra a Fig. 6.

Guidault & Belytschko (2007) e Dhia & Rateau (2005) apontam que a utilização do operador L_2 junto à funções ponderadoras descontínuas conduz a uma solução para o campo de multiplicadores de Lagrange muito próxima de zero em praticamente toda a zona de colagem, porém com valores oscilatórios que tendem a infinito nas bordas. Logo, variações espúrias nos resultados são observadas nos limites da zona de colagem. Esta restrição, no entanto, não se manifesta

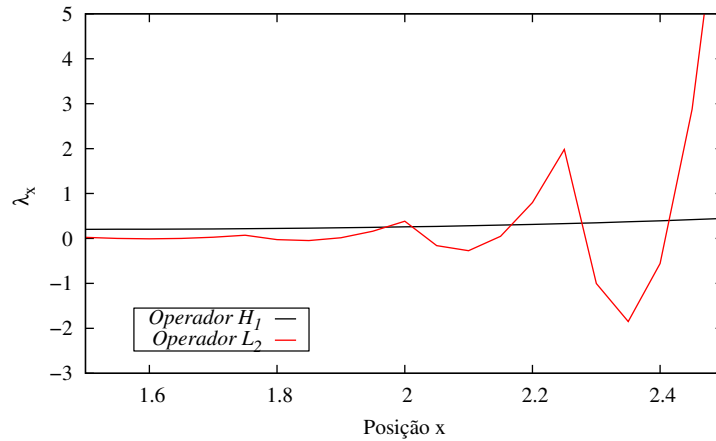


Figura 6: Módulo do vetor de velocidades u .

com a utilização do operador H_1 . No caso em estudo, verificou-se que embora o sistema melhor condicionado produzido pela utilização do operador L_2 não tenha apresentado variações espúrias nos resultados, o comportamento dos multiplicadores de Lagrange se mostrou oscilatório mesmo utilizando-se uma função ponderadora contínua, o que contraria aquilo apontado pelos autores.

Escoamento em torno de um cilindro

Neste segundo teste, simulou-se o escoamento de um fluido em torno de um cilindro, *benchmark* para a verificação de códigos computacionais para o cálculo de escoamentos incompressíveis, como indicado na Fig. 7.

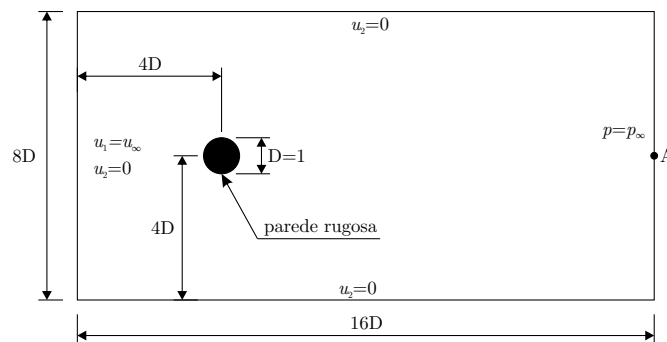


Figura 7: Escoamento em torno de um cilindro - geometria e condições de contorno.

As malhas empregadas para a discretização dos modelos global e local, por sua vez, são apresentadas na Fig. 8(a), sendo que o modelo local conta com 1760 elementos e o global com 1350 elementos. Como parâmetro de comparação, adotou-se o monomodelo composto por 9200 elementos ilustrado na Fig. 8(b).

Seguindo as recomendações de Jamond & Dhia (2013), a zona de colagem foi tomada com uma espessura da ordem de $2h_0$, em que h_0 é o comprimento característico dos elementos do modelo global. Além disso, os autores também recomendam que ao menos um elemento do modelo global esteja completamente contido na zona livre cuja condição de incompressibilidade

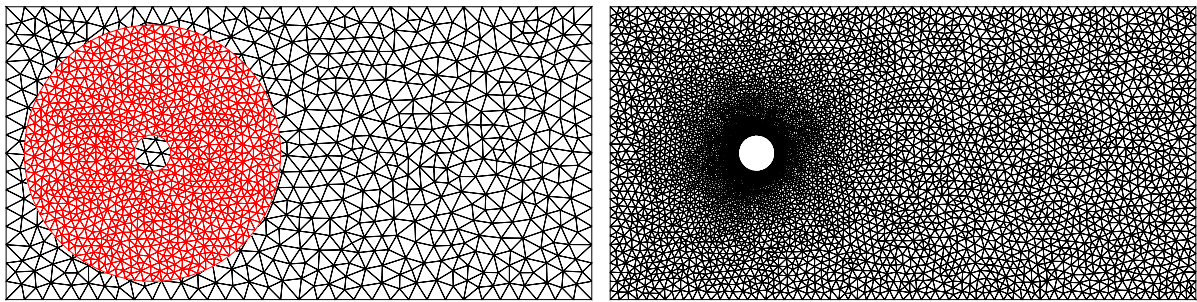
deve ser removida, isto é, $\text{meas}(\Omega_f) > 0$. Assim, na Fig. 9(a), é apresentada em vermelho a zona de colagem definida na região de superposição

Os parâmetros de acoplamento foram tomados como $\kappa_0 = 4$, $\kappa_1 = 0$ e $k_0 = 10^{-3}$, indicando o uso do operador L_2 . Destaca-se que κ_0 foi tomado igual à 4 e não a unidade devido ao melhor condicionamento do sistema resultante observado com o emprego deste valor.

Em relação à função de ponderação da energia α_i , testaram-se quatro diferentes cenários: com aproximação constante (função descontínua), linear, quadrática e cúbica. Os resultados obtidos para os campos de velocidade e pressão são apresentados nas Fig. 10 e 11.

Como pode-se observar, os resultados obtidos utilizando-se o método Arlequin estão de acordo com a referência. Entretanto, pode-se concluir que a opção pela função poderadora linear é uma escolha suficiente, uma vez que não houve melhoria na resposta obtida com as funções ponderadoras de ordem superior. Este resultado já havia sido reportado nos trabalhos de Guidault & Belytschko (2007) e Dhia & Rateau (2005) e se deve à continuidade da função ponderadora.

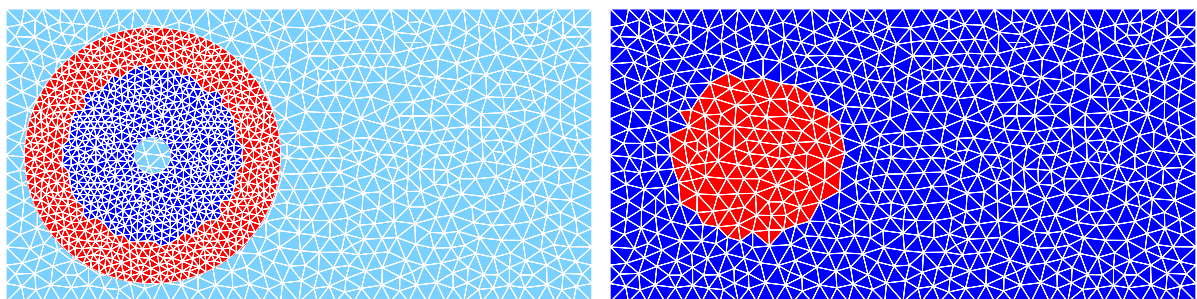
Testes de convergência do método, bom como seu atendimento à restrição LBB não foram realizados neste trabalho, porém tais testes podem ser consultados para a aplicação em sólidos incompressíveis no trabalho de Jamond & Dhia (2013).



(a) Discretização dos modelos local e global utilizados.

(b) Malha de referência.

Figura 8: Malhas empregadas nas análises - continuação.



(a) Zona de colagem Ω_c no modelo local (em vermelho).

(b) Zona livre Ω_f no modelo global (em vermelho).

Figura 9: Zona de colagem e zona livre.

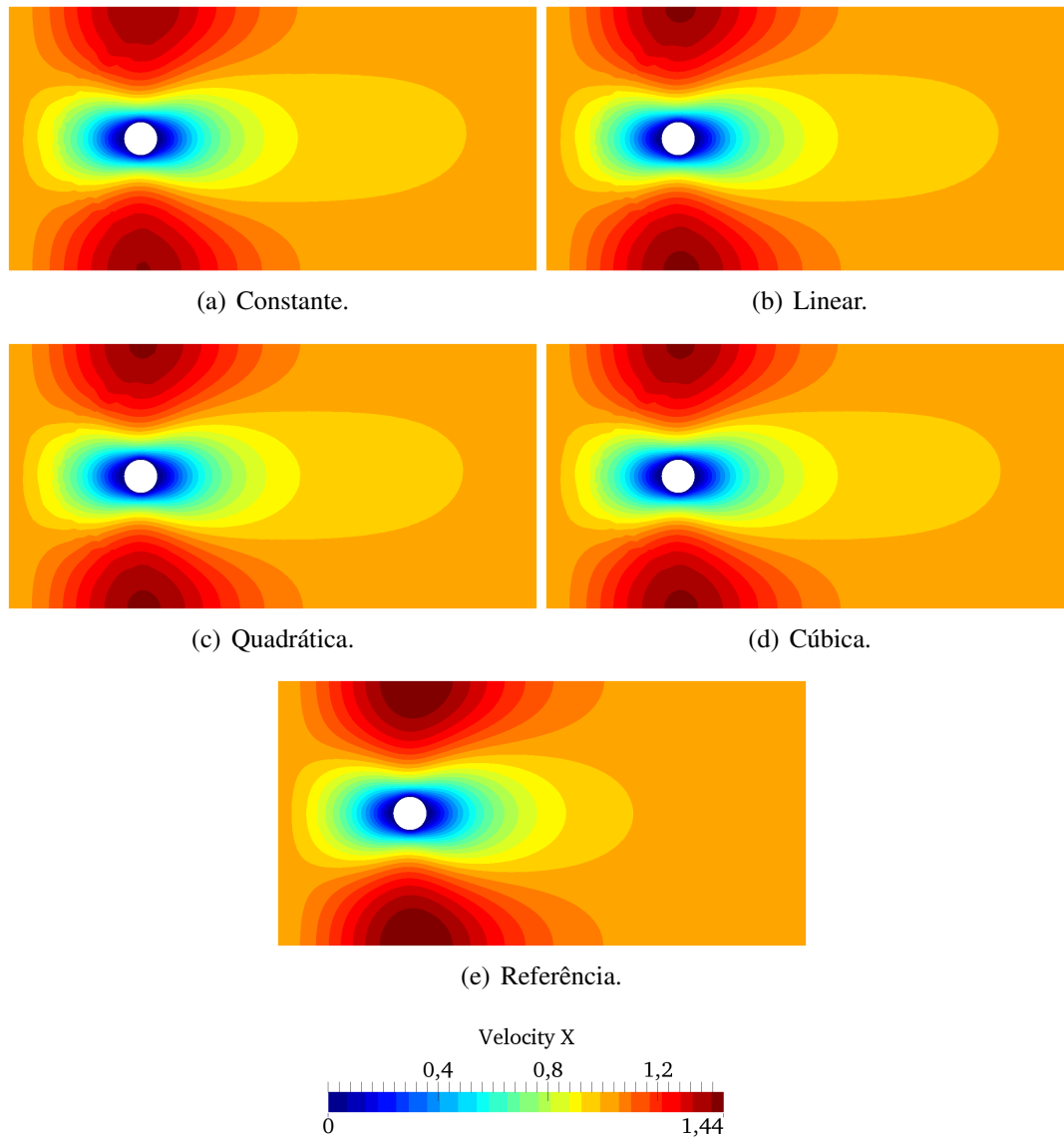


Figura 10: Resultados para a componente horizontal de velocidades.

4.1 Aplicação ao caso estacionário das equações de Navier-Stokes

Por fim, realizou-se novamente a simulação do exemplo do escoamento em torno de um cilindro, tomando-se o número de Reynolds igual a 20. Para a resolução do sistema não linear definido pela Eq. 49, utilizou-se o método de Newton tendo como estimativa inicial a solução do problema de Stokes. Além disso, empregou-se novamente o operador L_2 para o acoplamento entre os modelos, com função ponderadora α_i de ordem linear. Os resultados obtidos para os campos de velocidade e pressão, bem como os valores de referência são apresentados nas Fig. 12, 13 e 14.

Similarmente aos resultados obtidos para o problema de Stokes, observa-se boa aproximação com a solução de referência. Entretanto, na região da zona de colagem a imprecisão dos valores se tornou mais acentuada. Novamente, isto é atribuído tanto à natureza do operador de acoplamento L_2 , quanto à qualidade da discretização adotada para o modelo Arlequin, além do surgimento de erros numéricos devido ao processo de integração de malhas não coincidentes e do surgimento de

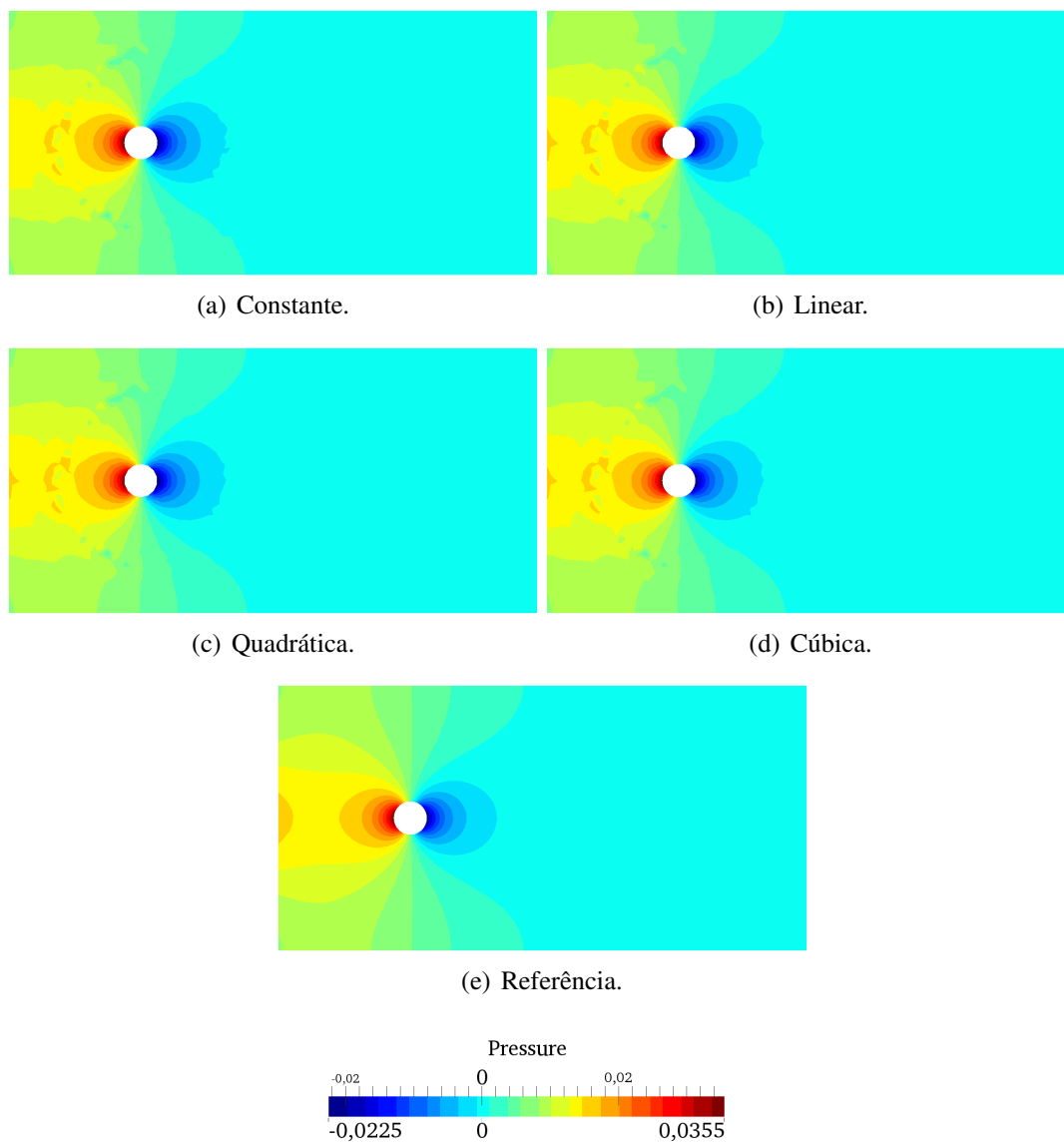


Figura 11: Resultado para o campo de pressões

efeitos não lineares na zona de colagem, que ainda é um tema pouco discutido entre os trabalhos relacionados.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma técnica inovadora para a consideração de efeitos localizados em problemas de mecânica dos fluidos computacional com base na superposição de domínios utilizando o método multiescala Arlequin. Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios e demonstram a potencialidade da técnica, sendo que os problemas de precisão observados podem ser superados pela utilização de preconditionadores ou técnicas de particionamento do problema adequados, que diminuam o mal condicionamento do sistema. Outro ponto chave da pesquisa está relacionado à investigação dos efeitos não lineares na zona de colagem, tema ainda pouco abordado nos trabalhos da área. Além disso, a expansão para o caso transiente se mostra natural, bem como a aplicação a problemas de domínios móveis.

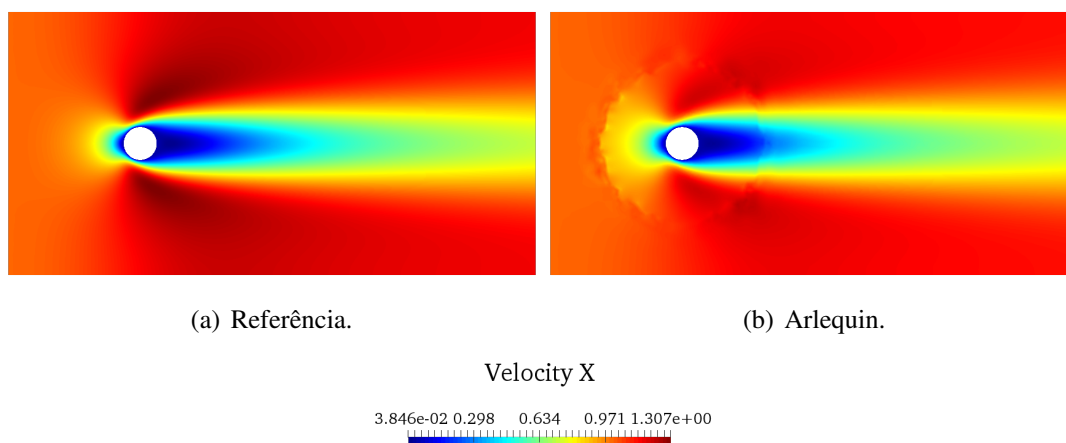


Figura 12: Resultados para $Re = 20 - u_x$.

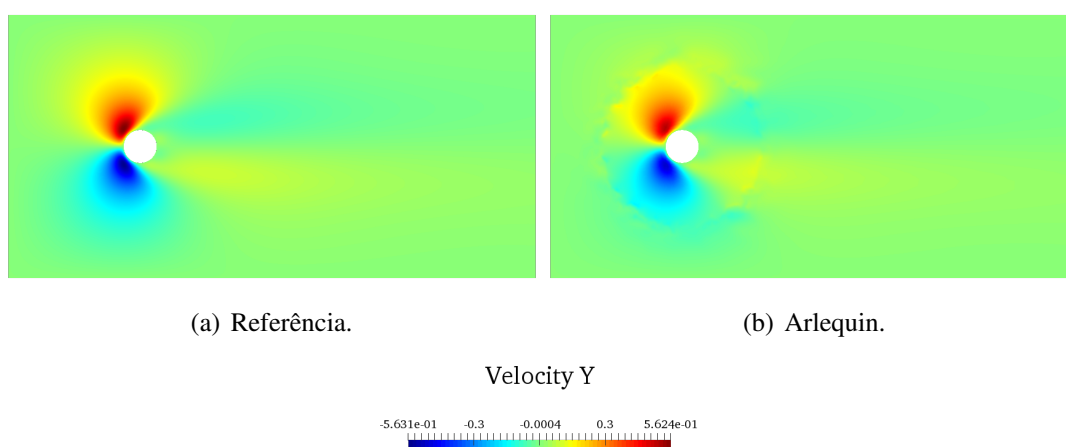


Figura 13: Resultados para $Re = 20 - u_y$.

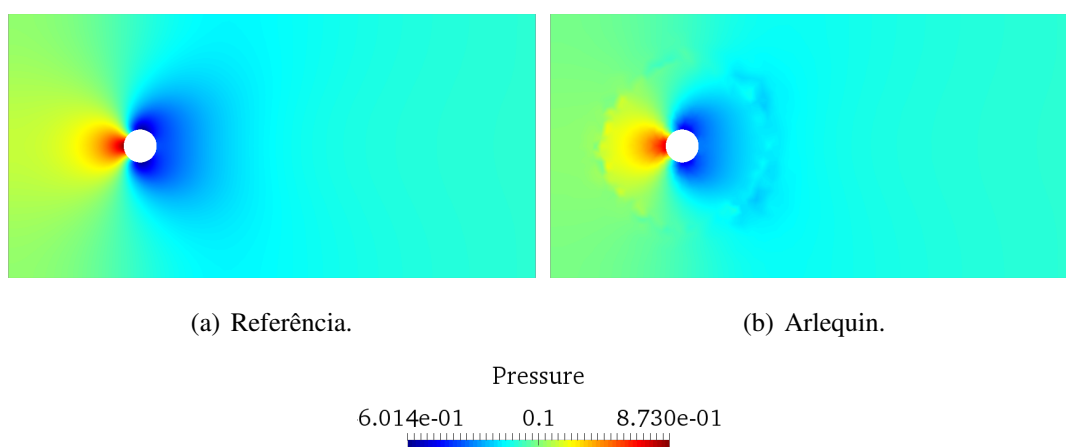


Figura 14: Resultados para $Re = 20 - p$.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo

apoio financeiro dedicado à este trabalho.

REFERÊNCIAS

- Bauman, P. T., Dhia, H. B., Elkhodja, N., Oden, J. T., & Prudhomme, S. 2008. On the application of the Arlequin Method to the Coupling of Particle and Continuum Models. *Comput. Mech.*, **42**, 511–530.
- Bazilevs, Y., Takizawa, K., & Tezduyar, T. E. 2013. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L., & Tabbara, M. 1995. Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, **32**(17–18), 2547–2570.
- Caleyron, F., Combescure, A., Faucher, V., & Potapov, S. 2013. SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. *Journal of Fluids and Structures*, **39**, 126–153.
- Dhia, H. B. 2008. Further insights by Theoretical Investigations of the Multiscale Arlequin Method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, **6**(3), 215–232.
- Dhia, H. Ben. 1998. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Sér. IIb.*, **326**, 899–904.
- Dhia, H. Ben, & Rateau, G. 2001. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I*, **332**, 649–654.
- Dhia, Hachmi Ben, & Jamond, Olivier. 2010. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**(21-22), 1403–1414.
- Dhia, Hachmi Ben, & Rateau, Guillaume. 2005. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **62**(11), 1442–1462.
- Dhia, Hachmi Ben, & Torkhani, Mohamed. 2011. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **85**, 61–83.
- Dhia, Hachmi Ben, & Zammali, Chokri. 2007. Level-sets fields, placement and velocity based formulations of contact-impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **69**, 2711–2735.
- Donea, J., & Huerta, A. 2003. *Finite Element Methods for flow problems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Donea, J., Giuliani, S., & Halleux, J. P. 1982. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**(1-3), 689–723.
- Elman, H. C., Silvester, D. J., & Wathen, A. J. 2002. Block preconditioners for the discrete incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **40**, 333–344.

- Elman, H. C., Silvester, D. J., & Wathen, A. J. 2005. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. New York: Oxford.
- Fish, J. 1992. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, **43**(3), 539–547.
- Fish, J., & Belsky, V. 1995. Multi-grid method for periodic heterogeneous media Part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **126**(1), 17–38.
- Guidault, P.-A., & Belytschko, T. 2007. On the L2 and the H1 couplings for an overlapping domain decomposition method using Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **70**(3), 322–350.
- Hughes, T. J. R., Feijóo, G. R., Mazzei, L., & Quincy, J.-B. 1998. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **166**(1), 3–24.
- Jamond, O., & Dhia, H. B. 2013. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **94**, 374–399.
- Melchior, S. A., Legat, V., Dooren, P. Van, & Wathen, A. J. 2012. Analysis of preconditioned iterative solvers for incompressible flow problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **68**, 269–286.
- Melenk, J. M., & Babuska, I. 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**(1), 289–314.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., & Remacle, J.-F. 2003. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**(28–30), 3163–3177.
- Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P. 1992. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, **10**(5), 307–318.
- Nazeer, S. M., Bordeu, F., Leygue, A., & Chinesta, F. 2014. Arlequin based PGD domain decomposition. *Comput. Mech.*, **54**, 1175–1190.
- Néron, D., Dhia, H. B., & Cottreseau, R. 2016. A decoupled strategy to solve reduced-order multimodel problems in the PGD and Arlequin frameworks. *Comput. Mech.*, **57**, 509–521.
- Reddy, J. N., & Gartling, D. K. 2010. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3 edn. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Strouboulis, T., Copps, K., & Babuska, I. 2001. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**(32–33), 4081–4193.
- Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., & Belytschko, T. 2001. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**(46–47), 6183–6200.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Nithiarasu, P. 2005. *The Finite Element Method: The Basis*. 6 edn. Vol. 1. Butterworth Heinemann Linacre house. 689 p.