



FORMULAÇÃO ISOGEOMÉTRICA PARA VIGAS DE TIMOSHENKO

Jamires Sousa Cordeiro Praciano^a

Samir Parente Auad^a

Evandro Parente Junior^a

João Batista Marques de Sousa Junior^a

jamirescordeiro@gmail.com

samirauad@gmail.com

evandro@ufc.com

joabatistasousajr@hotmail.com

^aLaboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Campus do Pici, Bloco 728, 60440-900, Fortaleza, Ceará, Brasil.

Abstract. Vigas são elementos estruturais muito utilizados em Engenharia. Por isso, elas são amplamente estudadas de forma analítica, computacional e experimental. Dentre as principais teorias analíticas está a de Timoshenko, muito importante em estudos de vigas finas. Já entre os métodos computacionais mais utilizados destaca-se o consagrado Método dos Elementos Finitos. A Análise Isogeométrica (AIG) é uma técnica mais recente, que utiliza como funções de aproximação dos deslocamentos as mesmas funções utilizadas pelos programas CAD para reprodução da geometria, apresentando vantagens como a representação exata da geometria e a facilidade de refinamento do modelo. Neste trabalho, a AIG será utilizada para estudo de deslocamentos de vigas engastadas sob diferentes tipos de cargas, variando a relação comprimento/espessura das peças, o refinamento da malha e a ordem de aproximação polinomial das funções B-Splines. A verificação e validação desta abordagem foram realizadas através da comparação com resultados teóricos disponíveis na literatura. Além disso, foi estudado o efeito do travamento que aproximações de baixa ordem sofrem quando aplicada a integração por quadratura de Gauss. Tal fenômeno ocorre tanto em MEF quanto em AIG. Há várias pesquisas de diversos mecanismos para aliviá-lo ou eliminá-lo. No presente trabalho, a integração reduzida foi aplicada, mostrando que é um bom método de alívio de bloqueio, com resultados satisfatórios. Uma técnica de estabilização da rigidez de cisalhamento também foi utilizada, melhorando as respostas do modelo em termos de deslocamentos e esforços.

Keywords: Vigas de Timoshenko, Análise Isogeométrica, Travamento, Integração Reduzida.

1 INTRODUÇÃO

A Análise Isogeométrica (AIG) é uma metodologia recente para análise de sólidos e estruturas similar ao Método dos Elementos Finitos (MEF), mas que utiliza na representação da geometria e na interpolação dos deslocamentos as funções CAD (*Computer Aided Design*), como B-Splines e NURBS. A AIG foi proposta com objetivo de facilitar a integração entre a modelagem geométrica e a análise estrutural (Hughes et al., 2005). Wall et al. (2008) estudaram a otimização de forma usando AIG, mostrando que o problema de relacionar corretamente o projeto e a análise é eliminado.

Ao contrário do MEF, a AIG trabalha sempre com a geometria exata, independente do refinamento. Além disso, a AIG permite serem feitos três tipos de refinamento da solução numérica. O refinamento p é referente à elevação de grau do polinômio de interpolação. O refinamento h é a divisão em um número maior de elementos. Por fim, o refinamento k é o efeito dos anteriores combinados, podendo-se aumentar a continuidade entre os elementos.

Mesmo com as vantagens citadas, a AIG não é capaz de eliminar o travamento numérico de cisalhamento (*shear locking*) e nem de membrana (*membrane locking*), como foi estudado por Echter e Bischoff (2010). Este problema surge quando teorias para estruturas espessas (e.g. viga de Timoshenko e placas de Reissner-Mindlin) são usados na análise de estruturas finas. Segundo Bouclier et al. (2012), o travamento ocorre devido a incompatibilidade na ordem de interpolação dos diferentes termos dos deslocamentos.

Adam et al. (2014) ainda cita que os elementos de baixa ordem, baseados na hipótese de Timoshenko, têm resultados ruins para vigas finas, apresentado travamento mais acentuado. Quando a ordem aumenta, esse efeito é amenizado. Eles obtêm resultados sem *locking* para viga curva usando NURBS com grau 4, aplicando integração seletiva.

Hu et al. (2016) já apresentam uma nova formulação baseada em *B-Splines* para vigas curvas de Timoshenko, não isoparamétrica, chamada Método de Redução da Ordem, que elimina o travamento modificando as deformações elemento por elemento, gerando funções de base com ordem mais baixa, que, segundo os autores, apresentam melhor precisão por grau de liberdade quando comparado com outras alternativas.

Lyly et al. (1993) propõe uma técnica de estabilização para os termos do cisalhamento em placas que reduz o travamento. Ele corrige a rigidez de cisalhamento em função de parâmetros geométricos, incluindo o tamanho do elemento em MEF. Já Thai et al. (2012) usa a mesma formulação para a Análise Isogeométrica.

Echter e Bischoff (2010) apresentam outra formulação baseada no Método Discreto do Cisalhamento (*Discrete Shear Gap* - DSG), originalmente estudado por Bletzinger et al. (2000) para placas e cascas, um método que desenvolve uma nova classe de elementos NURBS DSG livre de travamento, calculando intervalos de cisalhamento discretos nos pontos de colocação do elemento (que correspondem aos nós em MEF) para suprir a deficiência de não poder representar o deslocamento do cisalhamento nulo no domínio. Foi feito o uso de Análise Isogeométrica, deixando o elemento livre de bloqueio, mesmo em aproximações lineares.

Desta forma, podemos ver que o travamento é um problema bastante estudado, há vários métodos desenvolvidos visando a sua eliminação da análise de baixa ordem. Desta forma, este

trabalho tem como objetivos apresentar a formulação isogeométrica de uma viga de Timoshenko, estudar o efeito da integração reduzida e do uso de um fator de estabilização da rigidez de cisalhamento sobre o travamento na AIG.

Este trabalho é dividido oito seções. A Seção 2 apresenta as funções B-Splines e a Seção 3 discute a teoria da viga de Timoshenko. A Seção 4 apresenta a formulação desenvolvida neste trabalho e a Seção 5 mostra as integrações numéricas utilizadas. A Seção 6 discute o problema de travamento e a Seção 7 apresenta os resultados e discussões. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção 8.

2 B-SPLINES

As B-Splines são curvas que podem representar diferentes segmentos dentro de uma mesma representação paramétrica, apenas limitando as funções de base em intervalos desse espaço paramétrico. Estes intervalos são conhecidos como *knot spans*, ou apenas *spans*, e são definidos em um vetor de *knots*.

O vetor de *knots* é o conjunto de valores não negativos e não decrescentes que estão definidos dentro do intervalo paramétrico da curva $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, sendo n o número de funções de base, p o grau destas funções e ξ a coordenada paramétrica. Uma curva B-Spline (C) é obtida pela combinação linear de pontos de controle $\mathbf{p}_i$ e funções de base $N_{i,p}(\xi)$:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (1)$$

As funções de base B-Spline podem ser calculadas usando a fórmula recursiva de Cox-de Boor (Piegl & Tiller, 1997), a partir do vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+n+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

A primeira derivada da função de base é importante, pois ela é necessária no cálculo da matriz de rigidez. Derivando a Equação (3), temos:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{p}{\xi_{i+n+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (4)$$

Na Figura 1 estão exemplos de curvas de base B-Splines e suas respectivas derivadas. Podemos ver que o vetor de *knots* do item (c) tem um *knot span* a mais que o do item (a), ou seja, ele é mais discretizado. Isso faz com que ele tenha uma função base a mais. Além disso, podemos perceber no item (c) que a função $N_{1,2}$ (azul escuro) contribui apenas no primeiro *span* $[\xi_1, \xi_4]$, $N_{2,2}$ e $N_{2,3}$ (verde e vermelho, respectivamente) contribuem em todo o espaço

paramétrico $[\xi_1, \xi_7]$ e $N_{2,4}$ (azul clara) atua apenas no segundo *span* $[\xi_4, \xi_7]$. Esse comportamento também está presente nas derivadas.

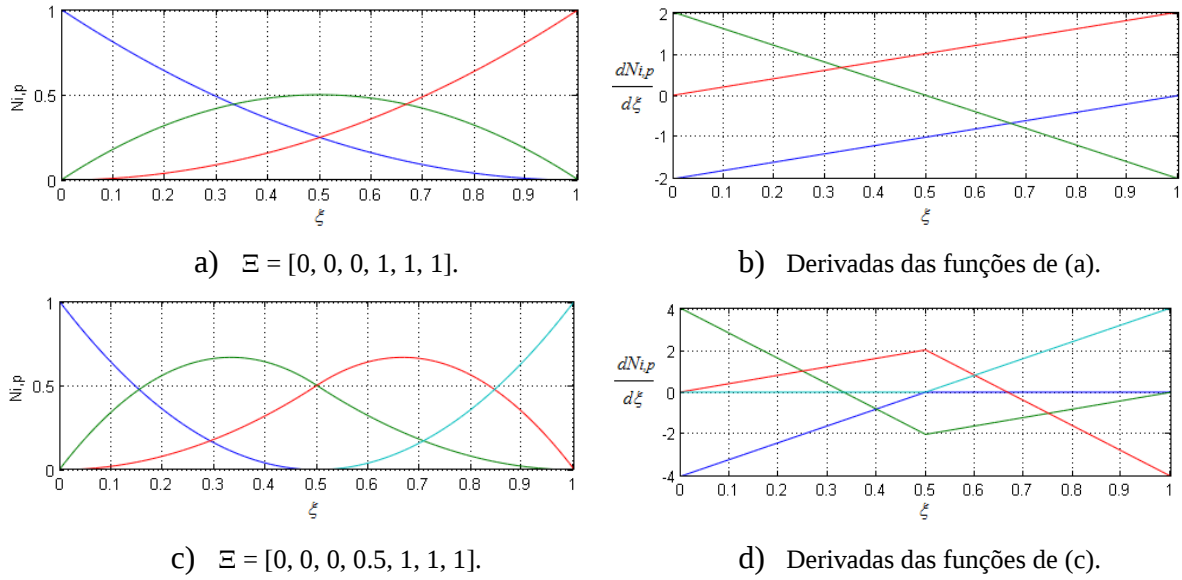


Figura 1. Exemplo de funções B-Splines quadráticas e suas respectivas derivadas.

Piegl e Tiller (1997) citam algumas características importantes das funções B-Splines:

- Não negatividade: $N_{i,p}(\xi) \geq 0$;
- Partição da unidade: $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$;
- Suporte compacto: $N_{i,p}(\xi) = 0$ se ξ estiver fora da região $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$;
- Apenas $p+1$ funções de base não são nulas em um *knot span* $[\xi_j, \xi_{j+1}]$;
- Todas as derivadas de $N_{i,p}(\xi)$ existem no interior dos *knot spans*.

Outra importante característica das B-Splines é possuir continuidade C^{p-1} dentro do *knot span* e C^{p-m} em um *knot* de multiplicidade m . Quando um *knot* interno ξ_i tem multiplicidade igual ao grau da curva, ou seja, $m = p$, um ponto de controle em ξ_i será interpolado pela curva. No caso de vetores de *knots* abertos, a multiplicidade dos extremos é $m = p+1$, de forma que os pontos de controle extremos serão interpolados. A maioria dos vetores de *knots* utilizados na AIG possui esta propriedade.

O número de pontos de controle (np), correspondente ao número de bases B-Spline, é dada pela expressão:

$$np = nk - p - 1 \quad (5)$$

onde nk é a dimensão do vetor de *knots* e p o grau das funções base. Por exemplo, uma B-Spline quadrática ($p = 2$), dividida em 4 *spans*, com vetor de *knots* igual a $\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1, 1]$, possui $np = 9 - 2 - 1 = 6$. A Figura 2 mostra os pontos de controle desta B-Spline (*) e os limites dos *spans* (o). Os limites dos *spans* e os pontos de controle são

diferentes no interior do *patch*, porém coincidem nos extremos devido ao uso de vetor de *knots* aberto. Assim, os pontos de controle das extremidades são interpolados pela B-Spline.

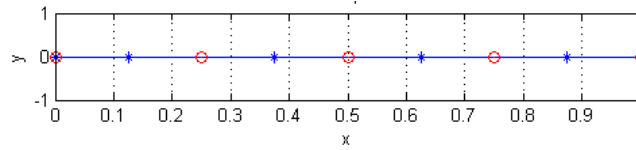
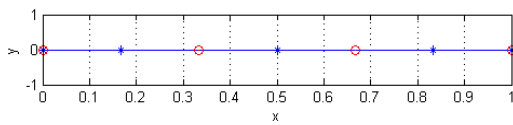


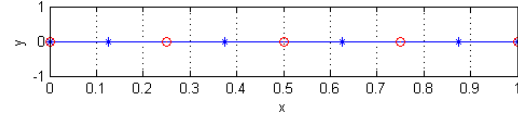
Figura 2. Pontos de controle da viga.

A Análise Isogeométrica tem três tipos de refinamento. Eles se dão por inserção de *knot* e/ou elevação do grau, essas operações alteram a descrição da curva sem alterar a sua forma. O chamado refinamento *h* é obtido adicionando um novo *knot* ao vetor Ξ , como mostrado na Figura 1 (a) e (c), fazendo que também sejam gerados uma nova função $N_{i,p}$ e um novo ponto de controle. Essa técnica dá um controle local melhor da curva. Na Figura 3 estão exemplos de refinamento *h* de uma B-Spline quadrática, aumentando o seu número de *spans*.



(a) 3 spans, $np = 5$

$$\Xi = [0, 0, 0, 0.33, 0.67, 1, 1, 1]$$

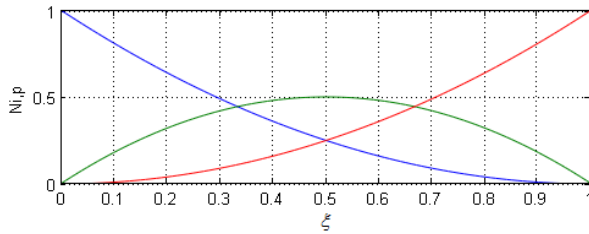


(b) 4 spans, $np = 6$

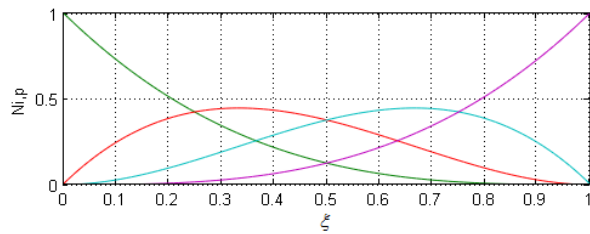
$$\Xi = [0, 0, 0, 0.25, 0.50, 0.75, 1, 1, 1]$$

Figura 3. Exemplo de refinamento *h* em uma B-Spline quadrática.

O refinamento *p* é referente à elevação do grau da curva. A multiplicidade do *knot* é elevada em 1, porém a continuidade inicial não se altera. Na AIG, esse refinamento melhora a solução numérica, aumentando o número de graus de liberdade e o grau das funções base. O refinamento *p* é ilustrado na Figura 4 e na Figura 5.

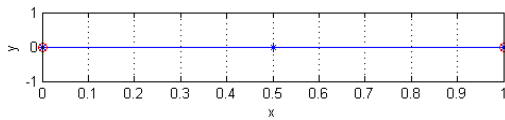


(a) $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$.



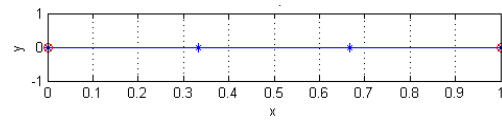
(b) $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$.

Figura 4. Exemplo de funções de base com elevação de grau de quadrática para cúbica.



(a) $p = 2$, $np = 3$

$$\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$$



(b) $p = 3$, $np = 4$

$$\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$$

Figura 5. Exemplo de refinamento *p* de uma B-Spline quadrática.

O refinamento *k* é uma combinação dos refinamentos *p* e *h*. Este refinamento é realizado fazendo primeiro a elevação do grau e depois a inserção de *knots*, aumentando o grau das

bases e a continuidade entre os *spans*, como ilustrado na Figura 6. Esse tipo de refinamento não existe no MEF. O refinamento k na viga eleva tanto o grau, quanto o número de *spans*, aumentando também o número de pontos de controle (np), como mostrado na Figura 7.

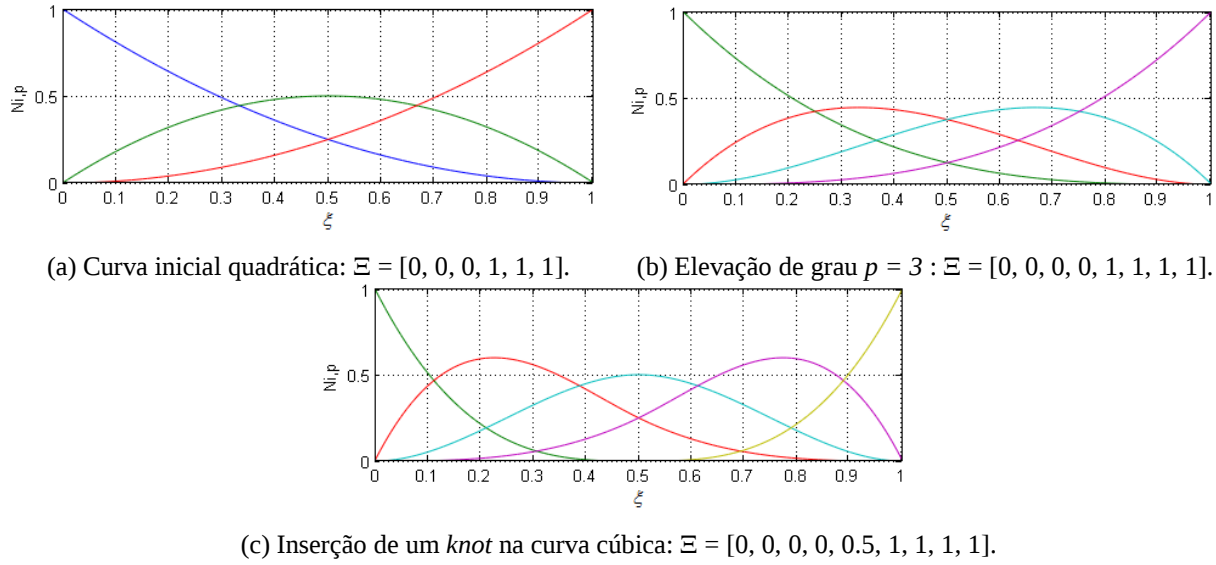
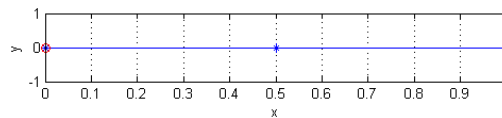
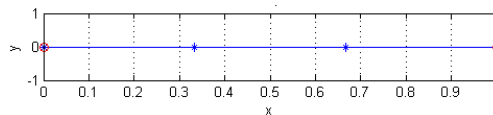


Figura 6. Exemplo de refinamento k .



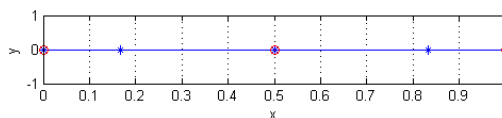
(a) $p = 2$, $np = 3$, $span = 1$
 $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$

Elevação de Grau



(b) $p = 3$, $np = 4$, $span = 1$
 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$

Inserção de *knot*



(c) $p = 3$, $np = 5$, $span = 2$
 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$

Figura 7. Exemplo de refinamento k , onde o processo se inicia de (a) para (b), com a elevação do grau, depois de (b) para (c) com a inserção de um knot e de (c) para (d) com a inserção de outro knot.

3 VIGA DE TIMOSHENKO

O modelo de Timoshenko considera o efeito do cisalhamento nas seções transversais de uma viga sob esforço de flexão. Esse efeito é particularmente importante em vigas com elevada relação altura/vão. A hipótese cinemática desta teoria é que seções planas e perpendiculares ao eixo da viga permanecem planas, porém não necessariamente perpendiculares ao eixo após a deformação, como mostrado na Figura 8.

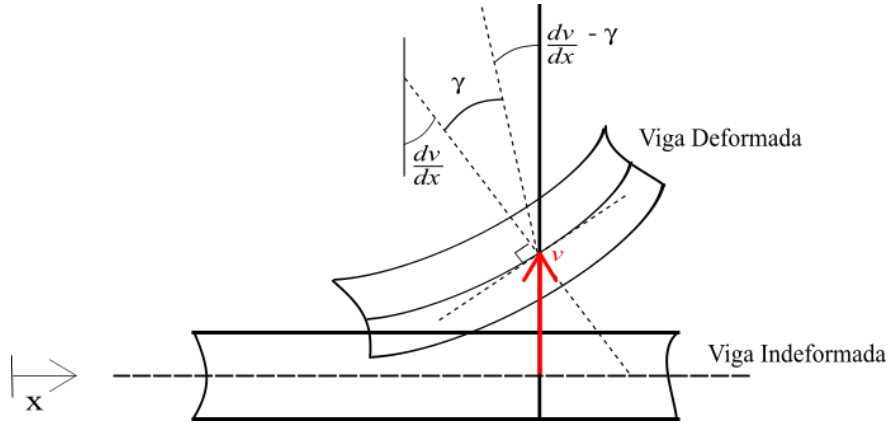


Figura 8. Cinemática da viga no modelo de Timoshenko.

Assim, o campo dos deslocamentos da viga de Timoshenko é dado por

$$u(x, y) = -y\theta(x) \quad (6)$$

$$v(x, y) = v(x) \quad (7)$$

onde u é o deslocamento axial e v o transversal. As deformações são dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta}{\partial x} = -y\kappa \quad (8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \quad (10)$$

Assim, a deformação de cisalhamento não é nula, como na teoria de Euler-Bernoulli, mas constante na seção. Aplicando a equação constitutiva, obtemos as tensões:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -Ey\kappa \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right) \quad (12)$$

A energia interna de deformação U de uma viga de Timoshenko é dada pela soma da parcela de flexão U_b e de cisalhamento U_s :

$$U_b = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2} \int_V E (-\kappa y)^2 dV = \frac{1}{2} \int_L E \kappa^2 \int_A y^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_L EI \kappa^2 dx \quad (13)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_V G \gamma^2 dV = \frac{1}{2} \int_L \int_A G \gamma^2 dA dx = \frac{1}{2} \int_L k_s GA \gamma^2 dx \quad (14)$$

Na teoria de Timoshenko, a deformação de cisalhamento é constante na seção, porém, segundo a Teoria da Elasticidade, esta deformação varia parabolicamente ao longo da altura da seção transversal. Assim, é necessário considerar o fator de forma k_s , dependente da forma da seção transversal, para que a energia de cisalhamento seja corretamente avaliada. Rearranjando as Equações (13) e (14), temos

$$U = \frac{1}{2} \int_L \kappa^T EI \kappa dx + \frac{1}{2} \int_L \gamma^T GA k_s \gamma dx \quad (15)$$

A energia potencial total da viga de Timoshenko pode ser escrita como:

$$\Pi = U + V \quad (16)$$

onde V é o potencial das cargas externas. No caso de cargas distribuídas temos que

$$V = - \int_L v^T q dx \quad (17)$$

Finalmente, o momento fletor é dado por

$$M_z = \int_A -y \sigma dA = E \kappa \int_A y^2 dA \Rightarrow M_z = EI \kappa \quad (18)$$

e o esforço cortante é obtido por

$$Q_y = \int_A \tau dA = G \int_A \gamma dA \Rightarrow Q_y = k_s GA \gamma \quad (19)$$

4 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Neste trabalho, a geometria, os deslocamentos e as rotações são escritos como:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i, v = \sum_{i=1}^n N_i v_i \text{ e } \theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (20)$$

onde N_i são as bases B-Splines e n é o número de pontos de controle do elemento isogeométrico. Os deslocamentos podem ser escritos em formato matricial como

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ v_n \\ \theta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (21)$$

De acordo com as Equações (8) e (21), a curvatura é dada por

$$\kappa = \sum_{i=1}^n N_{i,x} \theta_i = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{n,x} \end{bmatrix} \quad (22)$$

De acordo com as Equações (10), (21) e (22), a deformação de cisalhamento é dado por

$$\gamma = \sum_{i=1}^n (N_{i,x} v_i - N_i \theta_i) = \mathbf{B}_s \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} N_{1,x} & -N_1 & \cdots & N_{n,x} & -N_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

As funções base e suas derivadas são obtidas utilizando as Eq. (2), (3) e (4).

A energia potencial pode ser calculada integrando em todo o domínio da viga. Contudo, esta abordagem não é interessante, pois desconsidera a propriedade de suporte compacto das bases B-Splines, segundo a qual apenas $p+1$ funções são não nulas em cada *knot span*. Assim, a energia potencial total da viga pode ser expressa pela soma da energia em cada *knot span*, que podem ser interpretados como os elementos isogeométricos:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{ne} U_e + \sum_{e=1}^{ne} V_e \quad (24)$$

sendo ne o número de elementos isogeométricos (*knot spans*).

Utilizando as Equações (15), (22) e (23) podemos escrever a energia interna de deformação como:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \int_{L_e} \mathbf{B}_b^T E I \mathbf{B}_b d\mathbf{x} \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \int_{L_e} \mathbf{B}_s^T G A k_s \mathbf{B}_s d\mathbf{x} \mathbf{u}_e \text{ ou } U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{K}_e = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (25)$$

Assim, a matriz de rigidez de flexão ($\mathbf{K}_b$) e de cisalhamento ($\mathbf{K}_s$) são dadas por:

$$\mathbf{K}_b = \int_{L_e} \mathbf{B}_b^T E I \mathbf{B}_b d\mathbf{x} \text{ e } \mathbf{K}_s = \int_{L_e} \mathbf{B}_s^T G A k_s \mathbf{B}_s d\mathbf{x} \quad (26)$$

O carregamento nodal equivalente ($\mathbf{f}_e$) é obtido a partir do potencial das forças externas:

$$V_e = - \int_{L_e} \mathbf{v}^T q dx = - \mathbf{u}_e^T \int_{L_e} \mathbf{N}_v^T q dx \Rightarrow \mathbf{f}_e = \int_{L_e} \mathbf{N}_v^T q dx \quad (27)$$

De posse da matriz de rigidez e das forças externas, podemos determinar os deslocamentos resolvendo o sistema de equações de equilíbrio:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (28)$$

É importante notar que a matriz de rigidez global ($\mathbf{K}$) e o vetor de forças externas global ($\mathbf{f}$) são obtidos a partir da soma das contribuições dos elementos isogeométricos ($\mathbf{K}_e$ e $\mathbf{f}_e$) através do Método da Rigidez Direta, da mesma forma que é realizado no MEF.

A partir da formulação apresentada verificamos que a AIG tem muitas semelhanças com o MEF, principalmente quando os *knot spans* são considerados como elementos para fins de integração das matrizes de rigidez. Contudo, os graus de liberdade do MEF correspondem aos deslocamentos dos nós, que são pontos pertencentes à estrutura, enquanto os graus de liberdade da AIG não tem significado físico, pois os pontos de controle não necessariamente pertencem à estrutura. A exceção são os pontos extremos dos *patches*, que são interpolados.

Desta forma, a AIG pode ser interpretada como uma forma do Método de Rayleigh-Ritz (MRR), na qual o domínio da estrutura é dividido em sub-regiões (*patches*), sendo a solução aproximada obtida por uma combinação linear de funções definidas em todo o *patch* e os graus de liberdade obtidos pela extremização da energia potencial total.

Uma vez que a geometria do elemento é definida a partir da Eq. (20), a matriz de rigidez de flexão de um elemento definido no intervalo cartesiano x_1 e x_2 pode ser escrita como:

$$\mathbf{K}_{b_e} = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}_b^T E I \mathbf{B}_b dx \Rightarrow \mathbf{K}_{b_e} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{B}_b^T E I \mathbf{B}_b J_\xi d\xi \quad (29)$$

onde o Jacobiano J_ξ é dado por:

$$J_\xi = \frac{dx}{d\xi} = \sum N_{i,\xi} x_i \quad (30)$$

Assim como no MEF, a integração da matriz de rigidez na AIG é realizada utilizando a integração de Gauss. Assim, é necessário mapear cada elemento isogeométrico (*knot span*) do intervalo $[\xi_1, \xi_2]$ para o intervalo $[-1, 1]$. Isto pode ser feito utilizando a relação

$$\xi = \left(\frac{1-r}{2} \right) \xi_1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) \xi_2 \Rightarrow J_r = \frac{d\xi}{dr} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \quad (31)$$

Desta forma:

$$\mathbf{K}_{b_e} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{B}_b^T E I \mathbf{B}_b J_\xi d\xi = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} \frac{dx}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} dr \Rightarrow \mathbf{K}_{b_e} = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} J_\xi J_r dr \quad (32)$$

Finalmente, integrando por quadratura de Gauss, temos

$$\mathbf{K}_{b_e} = \sum_{i=1}^{npb} (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} J)_i W_i \text{ onde } J = \frac{dx}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = J_\xi J_r \quad (33)$$

sendo W_i e npb os pesos e o número de pontos da quadratura escolhida, respectivamente.

O mesmo procedimento é utilizado para matriz de rigidez do cisalhamento $\mathbf{K}_s$:

$$\mathbf{K}_s = \int_{-1}^1 \mathbf{B}_s^T G A k_s \mathbf{B}_s J dr \Rightarrow \mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{nps} (\mathbf{B}_s^T G A k_s \mathbf{B}_s J)_i W_i \quad (34)$$

e para o vetor de cargas externas $\mathbf{f}_e$:

$$\mathbf{f}_e = \int_{-1}^1 N_v^T q J_\xi J_r dr \Rightarrow \mathbf{f}_e = \sum_{i=1}^{npf} (N_v^T q J)_i W_i \quad (35)$$

sendo nps e npf o número de pontos utilizados para integrar $\mathbf{K}_s$ e $\mathbf{f}_e$, respectivamente.

5 TRAVAMENTO

A integração completa (*full integration*) é aquela que integra exatamente um elemento de Jacobiano constante (i.e. não distorcido). Este número pode ser facilmente obtido lembrando que n pontos de Gauss integram exatamente um polinômio de grau $2n - 1$.

Segundo Adam et al. (2014), a energia de cisalhamento da viga (Eq. (14)) precisa de um ponto a mais que a de flexão (Eq. (13)) para sua integração. Contudo, devido ao desbalanceamento dos termos da matriz $\mathbf{B}_s$, que envolvem tanto das funções de forma como suas derivadas, as deformações de cisalhamento podem apresentar erros significativos ao longo do elemento, resultando em erros na energia de cisalhamento ($\mathbf{U}_s$). Estes erros crescem com a esbeltez da vigas e tendem a valores muito grandes quando h/L tende a zero, deixando o modelo numérico muito mais rígido que a viga real. Na Tabela 1 estão os números de pontos de Gauss necessários para a flexão (npb) e cisalhamento (nps) nas integrações completa e reduzida.

Tabela 1. Número de pontos de Gauss.

Grau	Integração Completa		Integração Reduzida	
	npb	nps	npb	nps
Linear	1	2	1	1
Quadrático	2	3	2	2
Cúbico	3	4	3	3

A integração completa considera toda a contribuição do erro das deformações de cisalhamento ao longo do elemento, levando a uma superestimação do valor da rigidez da modelo numérico. Esse fenômeno é conhecido como travamento, bloqueio ou *locking*. O travamento ocorre para todas as ordens, porém seu efeito é reduzido na medida em poisque o grau da aproximação aumenta. Esse problema persiste por causa do paradigma de inconsistência de campo, que não é solucionado aumentando a ordem.

Diversas alternativas foram propostas para resolver o problema do travamento, tanto no caso do MEF quanto da AIG. Hu et al. (2016) apresentaram uma formulação baseada em B-Splines, chamada Método de Redução da Ordem (*Order Reduction - OR*), que elimina o travamento modificando as deformações de cisalhamento. O trabalho deles cita nove importantes métodos para eliminar o *locking* em vigas, placas e cascas: Método $\bar{B}$, *Discrete Shear Gap* (DSG), *Selective and Reduced Integration* (SRI), Formulação Mista, Método de Colocação, *Single Variable* (SV), *Assumed Natural Strain* (ANS), *Moving Least Square* (MLS) e *Coupled Polynomial Field* (CP).

A solução mais simples e mais utilizada no caso do MEF é a integração reduzida, onde a matriz de rigidez de cisalhamento ($\mathbf{K}_s$) é integrada com menos pontos que o utilizado na integração completa, deixando o elemento menos rígido. Na integração reduzida uniforme (URI) utiliza-se na integração de $\mathbf{K}_s$ o mesmo número de pontos utilizados na integração da matriz de rigidez de flexão ($\mathbf{K}_b$). Neste caso, o número de pontos de Gauss da integração reduzida é dado por

$$npg = p \quad (36)$$

No caso do MEF, a integração reduzida elimina totalmente o travamento de cisalhamento dos elementos de viga de Timoshenko (Cook et al., 2002).

No caso da AIG utilizando funções B-Splines, é possível tanto aumentar o grau, mantendo a continuidade (refinamento p), quanto aumentar o grau e continuidade simultaneamente (refinamento k). Na análise de sólidos e de problemas de estado plano de tensões, o aumento da continuidade (refinamento k) normalmente é benéfico, pois permite uma convergência mais rápida utilizando menos graus de liberdade que o refinamento p .

Contudo, Adam et al. (2014) mostraram que o aumento da continuidade torna o problema do travamento mais sério. Assim, a eliminação do travamento na AIG é mais difícil do que no MEF, onde a continuidade é C^0 . Em particular, a integração reduzida não consegue eliminar o travamento em modelos AIG com continuidade maior que C^0 .

Uma alternativa à integração reduzida uniforme é o uso da integração seletiva, com números de pontos de Gauss diferentes para a matriz de rigidez de flexão e de cisalhamento. Esta técnica tem sido utilizada com sucesso em elementos finitos de placas e cascas (Cook et al., 2002). Adam et al. (2015) propuseram um tipo de integração seletiva que elimina o travamento na AIG com alta continuidade, porém comentam que esse tipo de integração numérica é ruim para problemas não lineares, pois a convergência da solução não é garantida em grandes sistemas.

Bouclier et al. (2012) diz que, embora a seletiva seja de fácil implementação e baixo custo computacional, ela é difícil de ser generalizada para uma ordem polinomial e uma continuidade quaisquer. Além disso, a integração seletiva dificulta a utilização da não linearidade física, uma vez que as componentes de deformação de flexão e cisalhamento devem ser aplicadas em pontos diferentes. Quanto à implementação, a complexidade é maior do que a da integração reduzida uniforme, principalmente no caso de programas já existentes.

Lyly et al (1993) propõe uma técnica de estabilização para os termos do cisalhamento em elementos finitos de placas que reduz o travamento. Esta abordagem corrige a rigidez de cisalhamento por um fator que depende de parâmetros geométricos. Thai et al. (2012) adaptou

esta técnica para a AIG. Nesta abordagem, o rigidez de cisalhamento é definida como $f_{est}GAk_s$, onde:

$$f_{est} = \frac{h^2}{h^2 + \alpha l^2} \quad (37)$$

sendo h a altura da viga, α uma constante entre o intervalo $0.05 \leq \alpha \leq 0.15$ e l é comprimento do elemento (*span*). Neste trabalho considerou-se $\alpha = 0.1$. A matriz de flexão é calculada normalmente.

6 EXEMPLOS

Nesta seção são apresentados os exemplos numéricos utilizados para verificação da formulação apresentada e para estudo do efeito do tipo de integração numérica utilizada: completa, reduzida e reduzida com fator de estabilização (f_{est}). O efeito do aumento da discretização do modelo isogeométrico foi estudado utilizando o refinamento k , obtido através da aplicação inicial da elevação de grau seguida pela inserção de *knots*. Desta forma, todas as bases B-Splines utilizadas possuem continuidade C^{p-1} .

Os exemplos tratam de vigas em balanço definidas por um *patch* e sujeitas a diferentes carregamentos. Os deslocamentos foram tomados na extremidade livre da viga. Os dados utilizados são apresentados na Tabela 2. O comprimento L da viga foi variado, sendo consideradas razões de L/h de 10, 50, 100 e 1000.

Tabela 2. Dados do problema.

Propriedade	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade (E)	2.0×10^7	kN/m ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0.2	-
Módulo de Elasticidade Transversal (G)	8.3×10^6	kN/m ²
Base da seção (b)	0.2	m
Altura da seção (h)	0.8	m
Fator de forma do cisalhamento (k_s)	5/6	-

6.1 Carga Momento

Este exemplo trata de uma viga submetida a uma carga de momento M aplicada na extremidade livre, como mostrado na Figura 9. A solução exata do deslocamento é dado por:

$$v_{EX} = \frac{M x^2}{2EI} \quad (38)$$

Este é o exemplo mais severo para o travamento, pois a viga está sob flexão pura, sem cisalhamento transversal.

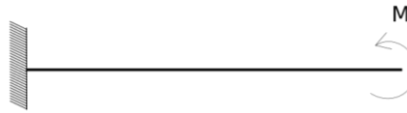


Figura 9. Viga em flexão pura.

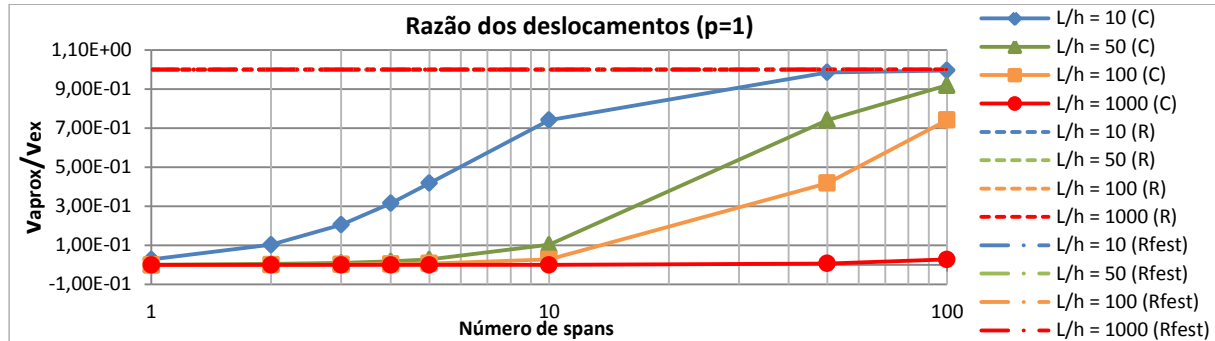


Figura 10. Gráfico da razão dos deslocamentos para uma aproximação linear.

Pela Figura 10, podemos ver que a integração completa (C) apresentou travamento para todas as relações L/h consideradas. Esse efeito é mais acentuado quando a relação L/h aumenta, ou seja, a viga vai ficando mais fina. Apesar deste problema, a resposta converge com o refinamento do modelo. Por outro lado, quando a integração reduzida (R) é utilizada, não há travamento significativo e o deslocamento tem boa aproximação mesmo com apenas um elemento (*span*). Neste caso, o elemento linear apresenta continuidade C^0 , a integração reduzida elimina o travamento e o fator de correção não é necessário.

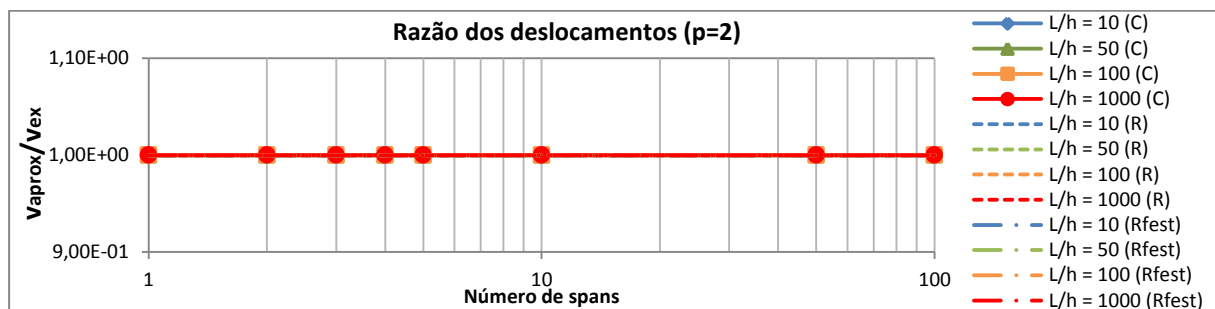


Figura 11. Gráfico da razão dos deslocamentos para uma aproximação quadrática.

Como a resposta exata do deslocamento da carga momento é quadrática, os deslocamentos obtidos utilizando bases quadráticas ($p = 2$) são exatos, a menos de pequenos erros numéricos, para todas as relações L/h . Este fato é confirmado na Figura 11, tanto para integração completa, reduzida e R_{fest} , independente da relação L/h .

6.2 Carga Distribuída

Neste exemplo uma carga distribuída q uniforme é aplicada ao longo da viga como mostrado na Figura 12. A solução exata do deslocamento é expressa por uma equação de quarto grau:

$$v_{EX} = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{24} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{L^2x^2}{4} \right) - \frac{q}{GAk_s} \left(\frac{x^2}{2} - Lx \right) \quad (39)$$

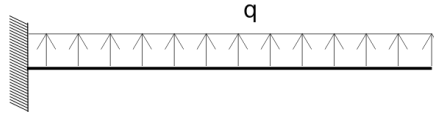


Figura 12. Viga em balanço com carga distribuída.

Por motivos de espaço, a norma L_2 foi calculada apenas para a rotação, pois o momento fletor, que é o efeito dominante na viga, depende dela. Na Figura 13 vemos o efeito do travamento quando a relação L/h aumenta, deixando a viga mais fina. Nas aproximações com integração completa (C), observa-se que o efeito do travamento é mais severo. Quanto à integração reduzida (R), os erros são menores, porém não eliminam o travamento, confirmando os resultados de Adam et al. (2015). Na integração reduzida como fator de estabilização (R_{fest}), há erros ainda menores, não eliminando, mas reduzindo significativamente o travamento. Verifica-se que o travamento aparece para todos os graus e que a partir de $L/h = 1000$, o erro se estabiliza.

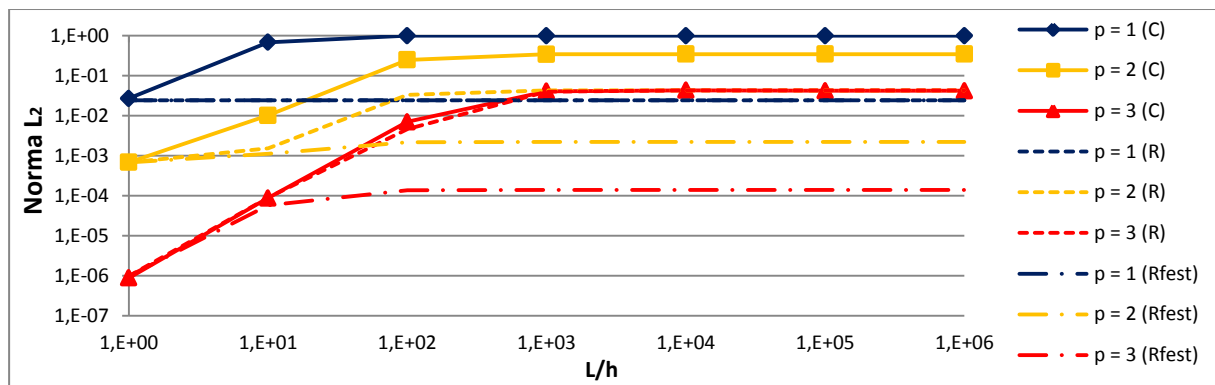
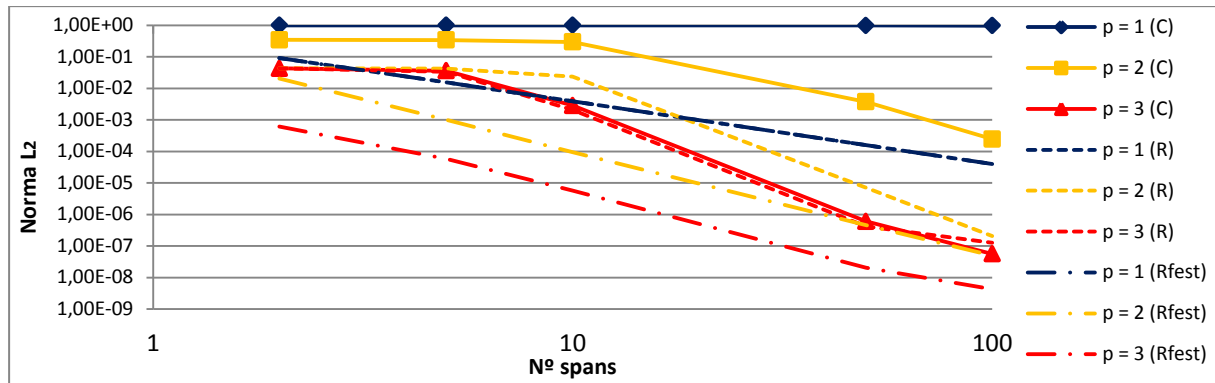
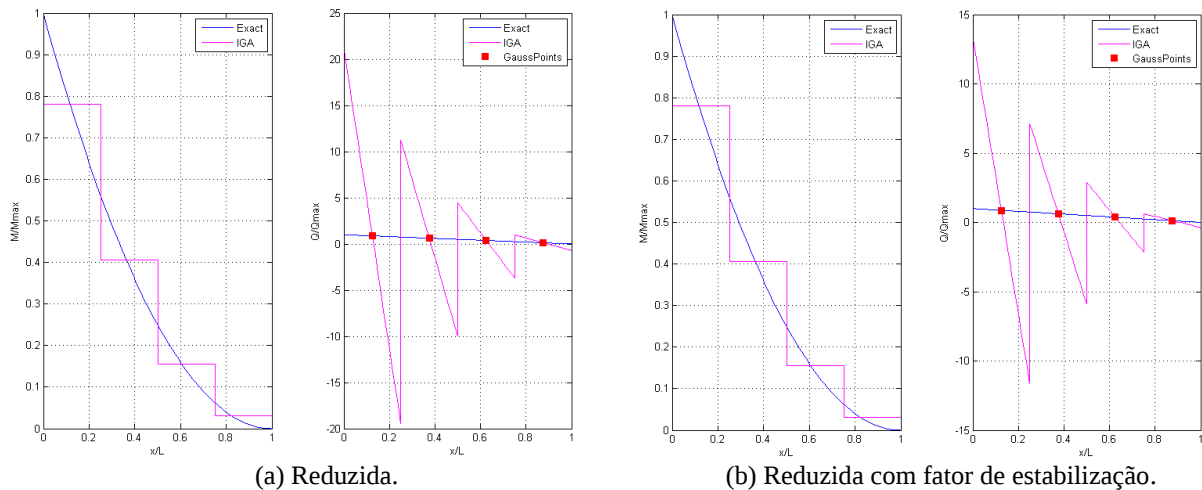
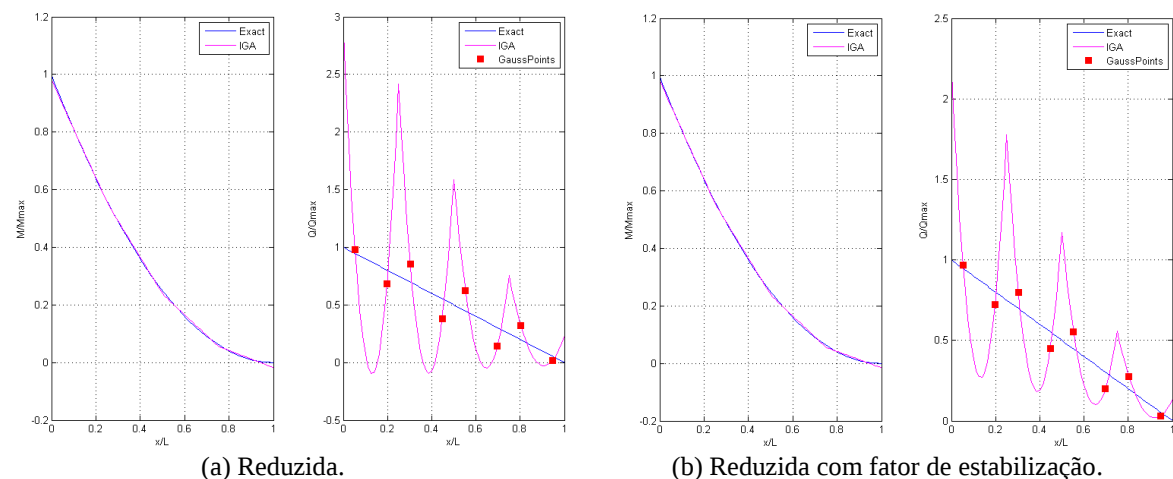


Figura 13. Comportamento da norma L_2 da rotação com a esbeltez da viga.

A Figura 14 apresenta o resultado do refinamento do modelo para $L/h = 1000$. As curvas mostram que há convergência lenta das integrações completa e reduzida no regime pré-assintótico. O elemento linear com integração completa não converge, mas os outros têm convergência assintótica. Finalmente, verifica-se que o uso do fator de estabilização melhora significativamente os resultados desde o início.


 Figura 14. Comportamento da norma L_2 com o aumento do número de spans.

Os resultados em termos dos esforços também foram estudados neste caso, adotando-se uma malha de 4 spans, variando-se tanto o grau de aproximação quanto a relação L/h para a integração reduzida com e sem fator de estabilização f_{est} . Inicialmente, temos os resultados para $L/h = 10$.


 Figura 15. Aproximação linear com $L/h = 10$.

 Figura 16. Aproximação quadrática com $L/h = 10$.

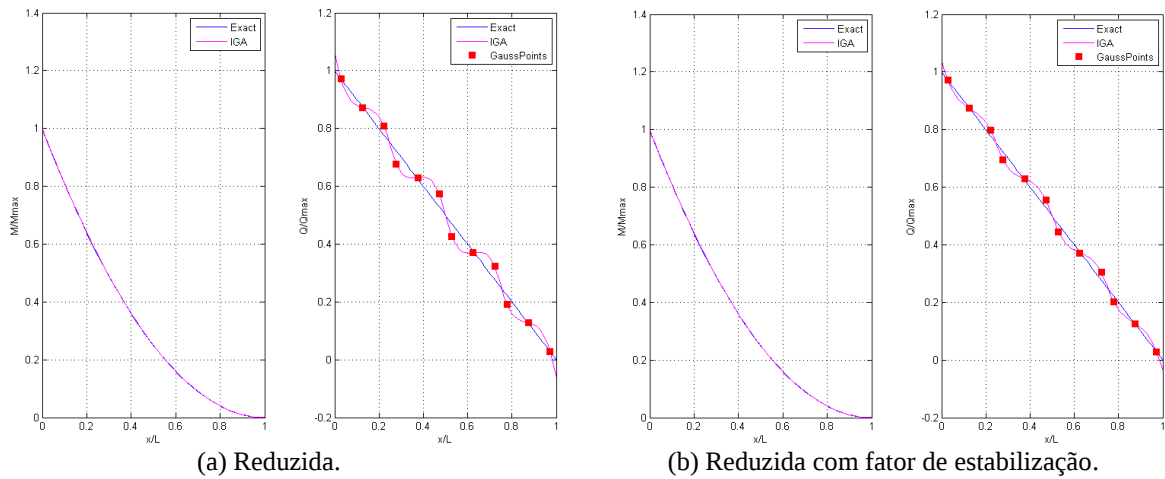


Figura 17. Aproximação cúbica com $L/h = 10$.

Por fim, os resultados de $L/h = 1000$.

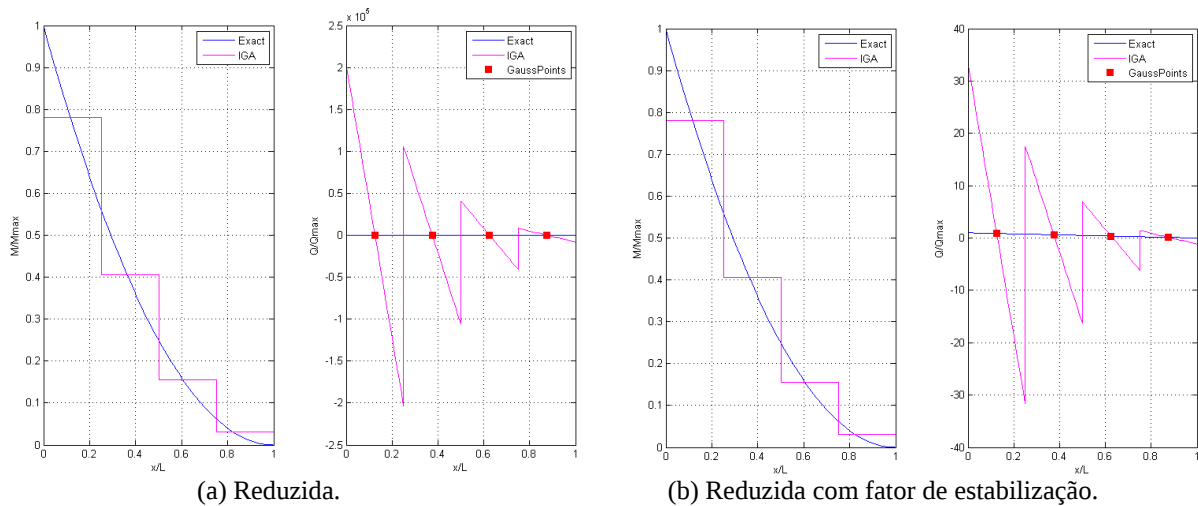


Figura 18. Aproximação linear com $L/h = 1000$.

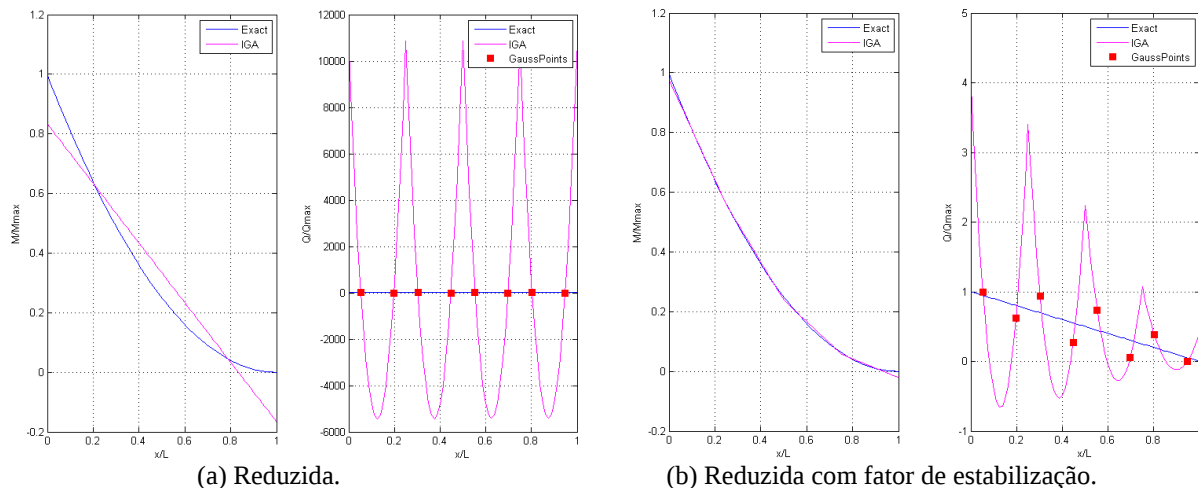


Figura 19. Aproximação quadrática com $L/h = 1000$.

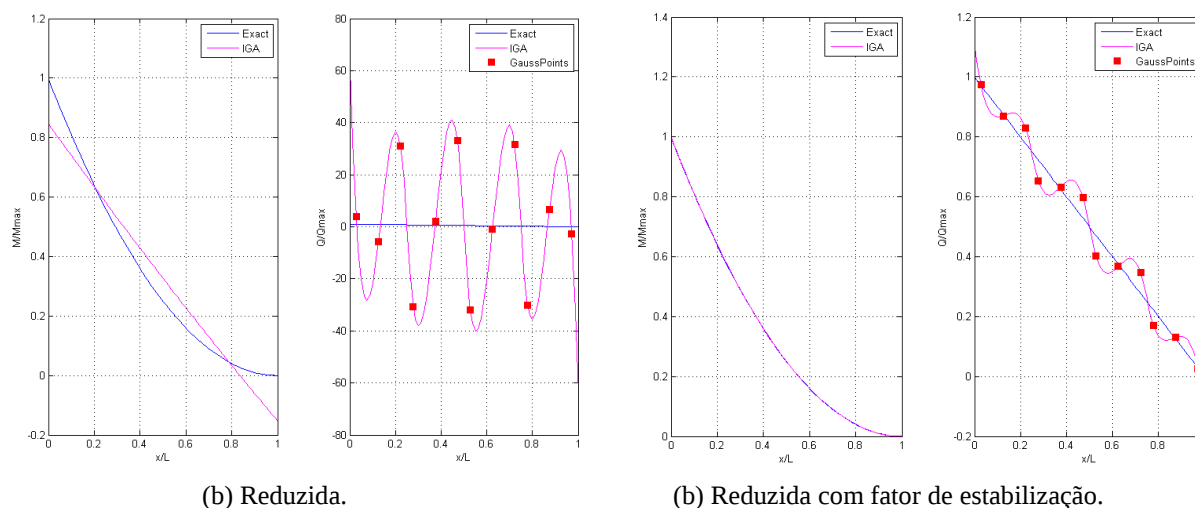


Figura 20. Aproximação cúbica com $L/h = 1000$.

Os resultados para $L/h = 10$ mostram que neste caso a integração reduzida já leva a bons resultados, pois o travamento não é significativo para esta relação, que corresponde às vigas usais. Contudo, o uso do fator de estabilização leva uma melhora nos resultados da força cortante, principalmente para ordens mais altas.

Por outro lado, o travamento é bastante evidente nos resultados para $L/h = 1000$. Neste caso, podemos perceber a melhoria que o fator de estabilização traz para os esforços internos. Os momentos fletores obtidos considerando este fator são praticamente exatos para $p = 2$ e 3 , o que não ocorre quando o fator não é considerado. O seu uso leva a uma melhora significativa também no cortante ao longo do elemento. Apesar de não serem exatos, os resultados nos pontos de Gauss são muito bons, principalmente no ponto localizado no centro do elemento, que corresponde ao ponto utilizado na integração seletiva de Adam et al. (2015).

É importante notar que o momento fletor depende da curvatura ($\kappa = \theta_{,x}$), como as rotações são melhoradas pela estabilização, resultados mais precisos são obtidos para o momento fletor ao longo de todo o elemento. Por outro lado, o esforço cortante depende da deformação de cisalhamento ($\gamma = v_{,x} - \theta$). Neste caso, o desbalanceamento dos termos vindos do deslocamento e da rotação impede a obtenção de valores exatos em todo o elemento.

7 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma formulação isogeométrica para análise de vigas pela teoria de Timoshenko utilizando B-Splines como funções de aproximação. A formulação foi avaliada através da análise de vigas cuja solução analítica é conhecida. O desempenho da formulação foi estudado considerando diferentes relações altura/vão, utilizando integração completa, integração reduzida e integração reduzida com fator de estabilização.

Os resultados mostraram que a formulação isogeométrica sofre de travamento quando a integração completa é utilizada. Assim como no MEF, o travamento cresce quando a esbeltez da viga aumenta, comprometendo os resultados obtidos para vigas finas. Verifica-se ainda que o uso de aproximações de ordem mais alta alivia, mas não elimina o travamento. Por outro lado, os resultados obtidos neste trabalho confirmam os estudos de Adam et al. (2014)

mostrando que a integração reduzida uniforme não elimina o travamento na AIG com continuidade superior a C^0 obtidas por refinamento k .

Finalmente, o uso do fator de estabilização mostrou-se uma alternativa simples e eficiente, quando utilizado juntamente com a integração reduzida. Os resultados mostraram uma melhoria significativa nos esforços internos obtidos, mostrando que esta abordagem é uma forma interessante para aliviar o travamento na análise isogeométrica.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem o suporte financeiro dado pela CAPES.

REFERÊNCIAS

- Adam, C., Bouabdallah, S., Zarroug, M., & Maitournam, H., 2014. Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I: Beams. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 279, pp. 1-28.
- Adam, C., Hughes, T. J. R., Bouabdallah, S., Zarroug, M., & Maitournam, H., 2015. Selective and reduced numerical integrations for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 732-761.
- Barroso, E. S., 2015. Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará.
- Bletzinger, K., Bischoff, M., & Ramm, E., 2000. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements, *Computers & Structures*, vol. 75, pp. 321-334.
- Bouclier, R., Elguedj, T., & Combescure, A., 2012. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 245-246, pp. 144-162.
- Echter, R., & Bischoff, M., 2010. Numerical efficiency, locking and unlocking of NURBS finite elements, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, pp. 374-382.
- Hu, P., Hu, Q., & Xia, Y., 2016. Order reduction method for locking free isogeometric analysis of Timoshenko beams. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 308, pp. 1-22.
- Hughes, T., Cottrell, J., & Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4135-4195.
- Kiendl, J., Auricchio, F., Hughes, T. J. R. & Reali, A., 2015. Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 988-1004.

Lyly, M., Stenberg, R., & Vihinen, T., 1993. A stable bilinear element for the Reissner-Mindlin plate model. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, pp. 343-357.

Piegl, L. & Tiller, W., 1997. The NURBS Book. 2 ed. Germany: Springer.

Rank, E., Krause, R., & Preusch, K., 1998. On the accuracy of p-version elements for the Reissner Mindlin plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 43, pp. 51-67.

Thai, C. H.; Nguyen-Xuan, H.; Nguyen-Thanh, N.; Le, T-H.; Nguyen-Thoi, T.; Rabczuk, T., 2012. Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, pp. 571-603.

Wall, W. A., Frenzel, M. A., & Cyron, C., 2008. Isogeometric structural shape optimization. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pp. 2976-2988.