



DETECÇÃO DE DANO UTILIZANDO OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Evandro Paulo Folletto

Otávio Augusto Alves da Silveira

evandrofolletto@gmail.com

otavio.silveira@ufsc.br

Universidade Federal de Santa Catarina

Campus Reitor João David Ferreira Lima, 88040-900, Santa Catarina, Brasil

Resumo. *Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma metodologia que tem por objetivo a detecção de dano em estruturas utilizando otimização topológica (OT). As informações utilizadas para tal são características dinâmicas do sistema, nomeadamente frequências naturais ressonantes e anti-ressonantes. A formulação utilizada consiste na minimização da diferença entre as frequências ressonantes e anti-ressonantes de uma estrutura danificada e de uma estrutura sem dano, modelada via método dos elementos finitos (FEM), sendo utilizado o elemento quadrilátero com quatro nós. Utilizou-se o método da Programação Linear Sequencial (SLP) para a otimização das variáveis de projeto, sendo estas as densidades dos elementos (SIMP). Os exemplos numéricos analisados mostram que é possível identificar a posição e a geometria do dano em questão. Ainda, foi confirmada a importância da utilização do filtro de sensibilidades, assim como a utilização do método da Redução Progressiva (PR) para a detecção de dano.*

Palavras-chave: *Deteção de dano, otimização topológica, função de resposta em frequência.*

1 INTRODUÇÃO

A presença de dano em uma estrutura pode contribuir para a geração de alterações no sistema estrutural, que afetam seu desempenho atual ou futuro, podendo, a depender da severidade do dano em questão, comprometer o funcionamento do sistema. Desta forma, avaliar a integridade estrutural utilizando técnicas baseadas na resposta dinâmica da estrutura tornou-se, nos últimos tempos, um procedimento muito atraente para as indústrias de construção civil e mecânica, pois essas técnicas possibilitam a detecção de dano de forma rápida e econômica, podendo ser propostas e implementadas medidas preventivas para a prevenção de acidentes.

Algumas destas técnicas necessitam de informações preliminares da estrutura em uso para que seja possível identificar alguma modificação no sistema. Essas informações podem ser obtidas com auxílio de algumas metodologias de sistemas de monitoramento da integridade estrutural (SHM), porém, o uso destas metodologias ainda não é uma prática comum devido ao custo elevado. Desta forma, nota-se a utilização dos SHM apenas em situações especiais, como por exemplo, grandes pontes, usinas hidrelétricas, vasos de pressão, etc. Todavia, como outras tecnologias, existe a tendência da viabilização destes sistemas com o passar do tempo.

Para que as informações provenientes dos SHM tenham sentido é necessário que sejam acompanhadas de devidas interpretações, muitas vezes podendo ser utilizadas em conjunto com metodologias de detecção de dano, por isso, estudos relacionados a esta área tornam-se importantes. Apesar dos avanços atuais no contexto da avaliação da integridade estrutural, o método de inspeção visual foi a técnica de detecção de dano mais utilizada por um longo período de tempo (este método se encaixa em uma categoria chamada de ensaios não-destrutivos). Mas esse método tradicional pode ser aplicado apenas para estruturas simples, pois necessita que a vizinhança do dano seja conhecida *a priori*. Assim, em sistemas complexos as inspeções visuais podem não ser possíveis devido a acessibilidade restrita (DESSI; CAMERLENGO, 2015). Desta forma, metodologias para detecção de dano em sistemas que não precisem de acesso a estrutura e nem conhecimento prévio da possível localização do dano geram grande interesse nos mais diversos campos da engenharia (mecânica, civil, aeronáutica).

2 DETECÇÃO DE DANO

As características dinâmicas de um sistema podem ser determinadas por dois procedimentos, denominados de Análise Modal Teórica e Análise Modal Experimental. O primeiro procedimento consiste na formulação de um modelo matemático da estrutura em estudo, como por exemplo, através de uma técnica de discretização. O método dos elementos finitos é muito utilizado para esse caso. As características dinâmicas estão contidas em uma distribuição espacial das propriedades de massa, rigidez e amortecimento (modelo espacial), descritas pelas matrizes de massa $\mathbf{M}$, matriz de rigidez $\mathbf{K}$ e amortecimento $\mathbf{C}$ (para o caso de amortecimento viscoso) ou $\mathbf{D}$ (no caso de amortecimento histerético). Então, utilizam-se essas matrizes na formulação de um problema de autovalores e autovetores que quando resolvido resulta no modelo modal, contido nas matrizes λ e Ψ , as quais possuem informações de frequências naturais e modos de vibração, respectivamente (SILVA, 2003).

No segundo procedimento (Análise Modal Experimental), os ensaios fornecem as características da resposta do sistema (modelo de resposta), que são geralmente dadas através de funções de resposta em frequência ou resposta impulsiva. Através dos dados obtidos via experimentos, determinam-se as frequências naturais, fatores de amortecimento modais e modos de

vibração. Essas técnicas que permitem a obtenção do modelo modal de um sistema a partir do conhecimento do modelo de resposta experimental são conhecidas como Identificação Modal (SILVA, 2003).

Neste trabalho estão envolvidos ambos os procedimentos mencionados. Os procedimentos relacionados a análise modal teórica são necessários pois o problema de detecção de dano será formulado via método dos elementos finitos, sendo necessária a resolução do problema de autovalores e autovetores cuja resolução fornece as informações das frequências naturais ressonantes e anti-ressonantes, assim como os modos de vibração. Já os procedimentos relacionados a análise modal experimental são importantes pois em uma aplicação real seriam necessários experimentos para a obtenção das mesmas informações mencionadas acima, porém, agora, da estrutura danificada.

2.1 Detecção de dano como problema inverso

O problema da detecção de dano baseado em modelos pode ser definido como um problema inverso, ou seja, tendo informações da estrutura (as quais podem ser deslocamentos, frequências naturais, etc) busca-se identificar os parâmetros do sistema. A Figura 1 mostra um fluxograma da detecção de dano através de um problema de otimização.

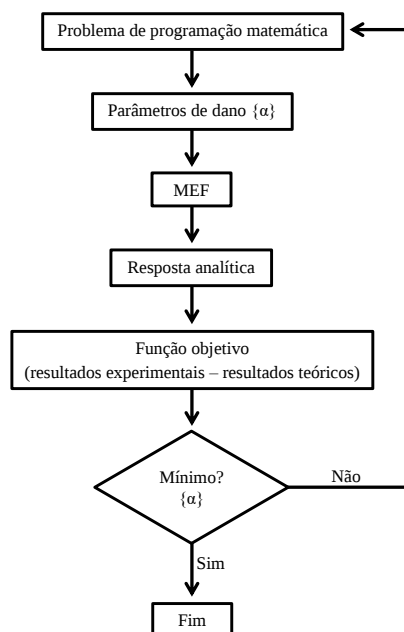


Figura 1: Solução do problema inverso de detecção de dano.

Uma das principais dificuldades encontradas na detecção de dano baseada em modelos é a presença de erros, tanto nas medidas experimentais como nos modelos utilizados (de modelagem, na ordem do modelo e nos parâmetros do modelo). O efeito dos erros experimentais pode ser incorporado, por exemplo, incluindo ruídos nos dados de entrada. Já os erros nos modelos de elementos finitos podem ser reduzidos mediante o emprego de técnicas de ajuste de modelos (CARRILLO, 2007).

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

No método de otimização topológica (Figura 2), existe uma nova distribuição de material dentro de um domínio fixo de projeto, permitindo sua adição ou remoção. Este método permite determinar a presença de novos furos na estrutura, podendo reduzir a quantidade de material consumido e uma caracterização mais ampla da geometria da estrutura otimizada, tendo como resultado a localização e forma (a depender do refinamento da malha) dos furos. Assim, o número de variáveis de projeto neste método é geralmente grande, estando estas relacionadas com o refinamento da malha de elementos finitos.

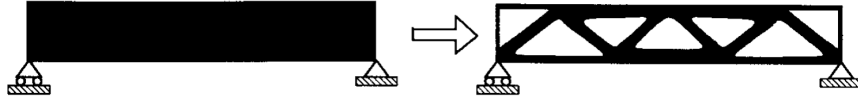


Figura 2: Otimização topológica.

Na otimização topológica, o modelo material é uma equação que permite definir uma mistura em micro-escala de dois ou mais materiais (um deles pode ser "vazio"), permitindo passar da condição de zero material ("buraco") a sólido em cada ponto do domínio. Conforme Bendsoe e Sigmund (2003), para materiais isotrópicos, pode-se escrever:

$$\mathbf{E}(x) = 1_{\Omega^{mat}}(x)\mathbf{E}^0, 1_{\Omega^{mat}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^{mat} \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \end{cases} \quad (1a)$$

$$\int_{\Omega} 1_{\Omega^{mat}} d\Omega = Vol(\Omega) \leq V, \quad (1b)$$

onde $\mathbf{E}^0$ é o tensor constitutivo que representa as propriedades de um material base isotrópico, $\mathbf{E}$ é o tensor constitutivo com as propriedades efetivas do material, V é a fração de volume de material disponível e $1_{\Omega^{mat}}$ é uma função discreta que caracteriza a presença ou ausência de material, sendo definida em cada ponto x do domínio Ω .

Porém, o problema discreto com valores de 0 ou 1 torna-se mal posto, não possuindo solução única e apresentando dependência da discretização do problema, sendo então necessária a relaxação para o problema contínuo. Essa relaxação consiste em permitir que as variáveis de projeto assumam valores intermediário entre 0 e 1, através de uma variável de projeto, que no modelo de material é denominada pseudo-densidade $\rho(x)$ e representa as propriedades de um dado material isotrópico (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

A relaxação do problema pode ser feita através da utilização do método das densidades, utilizando a formulação SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), a qual é dada por:

$$\mathbf{E}(x) = \rho(x)^p \mathbf{E}^0 \quad (2a)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad x \in \Omega, \quad (2b)$$

onde $\rho(x)$ é a variável de projeto (pseudo-densidade), $\mathbf{E}^0$ representa as propriedades do material base isotrópico e $\mathbf{E}$ é a propriedade efetiva do material, V é o volume disponível de material e p é o coeficiente de penalização.

As Eq. 2 definem que a partir da propriedade do material base isotrópico $\mathbf{E}^0$ é possível definir propriedades intermediárias - $\mathbf{E}(x)$ variando de 0 até $\mathbf{E}^0$ - de acordo com o valor da pseudo-densidade $\rho(x)$ ($\rho_{min} \leq \rho(x) \leq 1$). O valor de ρ_{min} é inserido para evitar instabilidades numéricas (neste trabalho foi utilizado $\rho_{min} = 10^{-4}$).

Neste trabalho, o domínio é discretizado em elementos finitos, sendo as penalidades aplicadas nas matrizes de rigidez e de massa. O coeficiente p corresponde a penalização da matriz de rigidez e o coeficiente q corresponde a penalização da matriz de massa, como mostram as Eq. 3 e 4:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega_e = \rho_e^p \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{B} d\Omega_e \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \rho_{mat} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e = \rho_e^q \int_{\Omega_e} \rho_{mat} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_e, \quad (4)$$

onde ρ_{mat} é a densidade do material, p e q são os fatores que penalizam as pseudo-densidades, fazendo com que os valores intermediários se aproximem de 0 e 1.

3.1 Aspectos numéricos na otimização topológica

No campo de estudo da otimização topológica, complicações numéricas são amplamente conhecidas (BENDSOE; SIGMUND, 2003). Os problemas de dependência de malha e existência de soluções, escala de cinzas e instabilidade de tabuleiro são documentados em vasta literatura e não serão tratados aqui.

Entre as técnicas para contornar a dependência de malha e a instabilidade de tabuleiro está o uso de filtros de sensibilidade. Tal técnica já foi utilizada com sucesso em diferentes aplicações e será aqui apresentada (BENDSOE; SIGMUND, 2003).

3.2 Filtro de sensibilidades

O filtro de sensibilidades consiste em modificar a sensibilidade de um elemento específico, baseado na média ponderada das sensibilidades vizinhas. A Eq. 5 mostra a expressão para o filtro de sensibilidades:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{i=1}^N \hat{H}_i} \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \rho_i \frac{\partial c}{\partial \rho_i}, \quad (5)$$

em que:

$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_e}$ - nova sensibilidade;

N - número total de elementos da malha;

$\hat{H}_i$ - fator peso, dado pela Eq. 6:

$$\hat{H}_i = r_{min} - \text{dist}(e, i), \quad \{i \in N \mid \text{dist}(e, i) \leq r_{min}\}, \quad (6)$$

onde o operador $\text{dist}(e, i)$ é definido como a distância entre o centro do elemento e até o centro do elemento i . O fator peso $\hat{H}_i$ é zero fora da área do filtro. É possível visualizar na expressão acima que a sensibilidade decai linearmente com a distância do elemento i , tendendo para a sensibilidade original quando o raio de filtragem r_{min} vai a zero e todas as sensibilidades são iguais quando r_{min} tende ao infinito.

3.3 Estratégia de redução de variáveis de projeto

Conforme Lee, Kim e Kim (2006) se o dano em uma estrutura for grave, este pode ser facilmente encontrado. Caso contrário, o mesmo pode ser consideravelmente difícil de ser encontrado ainda que utilizando métodos avançados. Nestes, muitas variáveis de projeto intermediárias podem aparecer no final do processo de otimização, dificultando a identificação dos elementos danificados.

No método da Redução Progressiva (PR), o método de otimização é aplicado várias vezes durante o processo, enquanto isso o número de variáveis de projeto (que são as densidades dos elementos) pode diminuir através do critério mostrado pelas Eq. 7 e 8:

$$\text{se } \rho_e > \eta \rightarrow \text{deixa de ser variável e } \rho_e = 1 \quad (7)$$

$$\text{se } \rho_e \leq \eta \rightarrow \text{continua variável de projeto} \quad (8)$$

O valor de η é determinado heurísticamente, sendo que o mesmo pode ter um valor apropriado para cada tipo de problema. Esta pode ser uma desvantagem da técnica PR. Em Lee, Kim e Kim (2006), os valores de η entre 0.8 e 0.9 mostraram resultados satisfatórios. No presente trabalho, utilizando-se valores de $\eta = 0.7$, a redução de variáveis funcionou adequadamente.

4 CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DE ESTRUTURAS

4.1 Análise modal de um sistema com múltiplos graus de liberdade

A vibração livre não amortecida para sistemas dinâmicos com múltiplos graus de liberdade pode ser escrita, em forma matricial, pela equação diferencial de segunda ordem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0, \quad (9)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez, $\mathbf{x}$ é o vetor de deslocamentos e $\ddot{\mathbf{x}}$ é o vetor de acelerações.

A equação de movimento livre para um sistema com n graus de liberdade pode ser escrita sob a forma de um problema de autovalores e autovetores:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\Psi = 0 \quad (10)$$

As matrizes $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ são simétricas, dessa forma temos n raízes reais. A solução da Eq. 10 é composta de n autovalores λ e de n autovetores Ψ_r ($r = 1, 2, \dots, n$).

4.2 Função de resposta em frequência

O modelo de Resposta $\mathbf{H}(\omega)$ é resultado de experimentação. A Função de Resposta em Frequência (FRF) é uma função de transferência expressa no domínio da frequência, relacionando a resposta de um ponto i a uma excitação de um ponto j . Essa grandeza é descrita como uma matriz $H_{ij}(\omega)$, sendo muito utilizada para a análise de vibrações:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{X}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)}, \quad (11)$$

em que X e F são as amplitudes de resposta e excitação, respectivamente. A função $\mathbf{H}(\omega)$ é uma característica intrínseca do sistema dinâmico em estudo. A resposta do sistema pode ser medida com deslocamentos, velocidade ou aceleração. Os sinais de resposta obtidos em um ensaio dinâmico são obtidos por acelerômetros ou transdutores de força, os quais são obtidos no domínio do tempo. O *analisador* converte os sinais analógicos do domínio do tempo em dados digitais no domínio da frequência. Um analisador comumente utilizado é denominado *analisador de transformada rápida de Fourier*. Este calcula os espectros de frequência discreta de sinais individuais, bem como espectros cruzados entre a entrada e os diferentes sinais de saída. Os sinais analisados podem ser usados para determinar as frequências naturais, fatores de amortecimento e as formas modais em forma numérica ou gráfica.

A vibração de uma forma geral é medida em termos de movimento e, portanto, a FRF pode ser escrita com as variáveis de deslocamento, velocidade ou aceleração. A FRF que relaciona deslocamento com excitação é chamada de Receptância, Eq. 12:

$$\alpha(\omega) = \frac{\text{deslocamento}}{\text{força}} = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (12)$$

4.3 Matriz de rigidez dinâmica e matriz de receptância

A relação entre a matriz de rigidez dinâmica e a matriz de receptância pode ser dada por:

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}(\omega)^{-1} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}} \quad (13)$$

coloquei a equação que estava abaixo, aqui em cima, Ou seja, o inverso da matriz de rigidez dinâmica é igual à matriz de receptância:

$$\alpha(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \alpha_{12}(\omega) & \cdots & \alpha_{1n}(\omega) \\ \alpha_{21}(\omega) & \alpha_{22}(\omega) & \cdots & \alpha_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(\omega) & \alpha_{n2}(\omega) & \cdots & \alpha_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (14)$$

A matriz de receptância é simétrica, pois a matriz de rigidez dinâmica é simétrica.

Entretanto, o procedimento para obtenção da FRF mostrado na expressão 14 necessita que, para cada frequência, uma matriz de rigidez dinâmica $n \times n$ tenha que ser invertida. Este procedimento é bastante caro computacionalmente. Então, utilizando-se o princípio da ortogonalidade de um sistema de múltiplos graus de liberdade, a matriz de receptância pode ser derivada utilizando-se características modais do sistema, nomeadamente matrizes de frequências naturais e modos de vibrar.

A FRF que relaciona deslocamentos e forças é chamada de receptância (Eq. 12), a mesma então pode ser escrita:

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{X_i}{F_j} = \sum_{k=1}^N \frac{A_{ij}^k}{\omega_k^2 - \omega^2}, \quad (15)$$

em que α_{ij} é a receptância medida no grau de liberdade i , provocada por uma excitação aplicada no grau de liberdade j ; N é o número de graus de liberdade do modelo; $A_{ij} = \phi_{ik} \phi_{jk}$ é a constante modal e ϕ_{ik} e ϕ_{jk} são os elementos i e j do vetor modal ϕ_k ; ω_k é a frequência natural relativa ao k -ésimo modo de vibração e ω é a frequência do carregamento.

4.4 Receptância pontual

É comum utilizar a medição e a excitação no mesmo grau de liberdade (*resposta em frequência pontual*) para se verificar a existência de frequências anti-ressonantes. A Eq. 16 mostra a expressão para a receptância pontual de um sistema não amortecido.

$$\alpha_{ii}(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{A_{ii}}{\omega_k^2 - \omega^2}, \quad (16)$$

onde α_{ii} é a receptância medida no grau de liberdade i , provocada por uma excitação aplicada no grau de liberdade i ; N é o número de graus de liberdade do modelo; $A_{ii} = \phi_{ik} \phi_{ik}$ é a constante modal; ω_k é a frequência natural relativa ao k -ésimo modo de vibração e ω é a frequência do carregamento.

4.5 Aquisição dos dados da estrutura danificada

Uma questão a ser determinada na resolução do problema é os dados da estrutura alvo (danificada). Os mesmos devem ser obtidos via experimentação. No código desenvolvido foi considerado apenas a situação de receptância pontual, a qual consiste em excitar a estrutura e ler a resposta no mesmo ponto (ou muito próximo). Para tal, é necessário o uso de uma fonte de excitação, que pode ser feita através de um excitador eletrodinâmico (*Shaker*) e de um leitor de resposta (acelerômetro, por exemplo). A excitação deve ser feita em uma faixa de frequências de interesse e a determinação das frequências ressonantes e anti-ressonantes pode ser feita analisando graficamente a resposta.

5 DETECÇÃO DE DANO COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A representação do dano é feita através da relaxação de uma função discreta ($\rho = 0$ ou $\rho = 1$) para uma função contínua ($\rho_{min} \leq \rho(x) \leq 1$), permitindo que as variáveis de projeto assumam valores intermediários entre 0 e 1, sendo a mesma um multiplicador das propriedades de rigidez e massa da estrutura. Desta forma, o problema torna-se encontrar as pseudo-densidades que minimizam a função objetivo. Assim, a matriz de rigidez e a matriz de massa passam a ser escritas levando-se em conta a variável de projeto, como mostram as Eq. 17 e 18:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \rho(x)_i^p \mathbf{K}_{e,i} \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \rho(x)_i^q \mathbf{M}_{e,i}, \quad (18)$$

em que N é o número de elementos da malha; $\mathbf{M}$ é a matriz de massa global da estrutura; $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global da estrutura; $\rho(x)$ é a pseudo densidade; $\mathbf{M}_{e,i}$ é a matriz de massa do i -ésimo elemento; $\mathbf{K}_{e,i}$ é a matriz de rigidez do i -ésimo elemento; p é o coeficiente de penalização da pseudo-densidade para a matriz de rigidez e q é o coeficiente de penalização da pseudo-densidade para a matriz de massa.

A pseudo-densidade é um valor que está dentro do intervalo ($\rho_{min} \leq \rho(x) \leq 1$). No contexto da Otimização Topológica, o valor de $\rho(x) = 0$ (ou ρ_{min}) significa ausência de material e para o caso de $\rho(x) = 1$, significa a existência de material. Já para o contexto deste trabalho, em que trata-se da detecção de dano, o valor de $\rho(x) = 0$ (ou ρ_{min}) significa elemento danificado e para o caso de $\rho(x) = 1$ elemento intacto.

5.1 Formulação do problema

Nishizu, Takezawa e Kitamura (2014) escreveram o problema de detecção de dano utilizando apenas as informações modais de frequências ressonantes da estrutura. O problema fica como mostrado nas Eq. 19:

$$\text{Minimizar } J(\rho) \quad (19a)$$

$$\text{Sujeito a: } 0 < \rho_i \leq 1, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (19b)$$

onde n é o número de elementos da malha de elementos finitos. A função objetivo $J(\rho)$ é formulada em função da diferença entre frequências da estrutura danificada e intacta, Eq. 20:

$$J(\rho) = \sum_{i=1}^{m_1} w_{r,i} \frac{(\lambda_{r,alvo,i} - \lambda_{r,i})^2}{\lambda_{r,alvo,i}} \quad (20)$$

onde $\lambda_{r,alvo,i} = \omega_{alvo,i}^2$ é o quadrado da i -ésima frequência natural da estrutura danificada; $\lambda_{r,i} = \omega_i^2$ é o quadrado da i -ésima frequência natural da estrutura; m_1 é o número de frequências naturais da estrutura danificada; $w_{r,i}$ é o fator de ponderação das frequências naturais.

O presente trabalho também mostra resultados obtidos utilizando uma formulação que inclui as frequências anti-ressonantes. Desta forma, reescreve-se a função objetivo:

$$J(\rho) = \sum_{i=1}^{m_1} w_{r,i} \frac{(\lambda_{r,alvo,i} - \lambda_{r,i})^2}{(\lambda_{r,alvo,i})^2} + \sum_{i=1}^{m_2} w_{a,i} \frac{(\lambda_{a,alvo,i} - \lambda_{a,i})^2}{(\lambda_{a,alvo,i})^2} \quad (21)$$

em que $\lambda_{a,alvo,i} = \mu_{alvo,i}^2$ é o quadrado da i -ésima frequência anti-ressonante da estrutura danificada; $\lambda_{a,i} = \mu_i^2$ é o quadrado da i -ésima frequência anti-ressonante da estrutura; m_2 é o número de frequências anti-ressonantes da estrutura danificada; $w_{a,i}$ é o fator de ponderação das frequências anti-ressonantes.

5.2 Cálculo de sensibilidades

A necessidade de linearização da função objetivo em relação às variáveis de projeto do problema se dá em função da metodologia utilizada na SLP. As sensibilidades das funções objetivo (5.1) são:

A sensibilidade da Eq. 20 é dada por:

$$\frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho_j} = -2 \sum_{i=1}^m w_i \frac{(\lambda_{r,alvo,i} - \lambda_{r,i})}{(\lambda_{r,alvo,i})^2} \frac{\partial \lambda_{r,i}(\rho)}{\partial \rho_j}, \quad (22)$$

em que a sensibilidade da i -ésima frequência natural em relação a j -ésima variável de projeto é dada por:

$$\frac{\partial \lambda_{r,i}(\rho)}{\partial \rho_j} = \Phi_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_j} - \lambda_{r,i} \frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial \rho_j} \right) \Phi_i, \quad (23)$$

em que:

Φ_i^T - modo de vibração da i -ésima frequência natural;

$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_j}$ - sensibilidade da matriz de rigidez, dada por:

$$p \cdot \rho_e^{p-1} \cdot \mathbf{K}_e \quad (24)$$

$\frac{\partial \mathbf{M}_e}{\partial \rho_j}$ - sensibilidade de massa, dada pela Eq. 25:

$$q \cdot \rho_e^{q-1} \cdot \mathbf{M}_e \quad (25)$$

Já sensibilidade da Eq. 21 é dada por:

$$\frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho_j} = -2 \sum_{i=1}^{m1} w_{r,i} \frac{(\lambda_{r,alvo,i} - \lambda_{r,i})}{(\lambda_{r,alvo,i})^2} \frac{\partial \lambda_{r,i}(\rho)}{\partial \rho_j} - 2 \sum_{i=1}^{m2} w_{a,i} \frac{(\lambda_{a,alvo,i} - \lambda_{a,i})}{(\lambda_{a,alvo,i})^2} \frac{\partial \lambda_{a,i}(\rho)}{\partial \rho_j}, \quad (26)$$

em que $\frac{\partial \lambda_{r,i}(\rho)}{\partial \rho_j}$ e $\frac{\partial \lambda_{a,i}(\rho)}{\partial \rho_j}$ são calculadas como detalhado na Eq. 23

5.3 Programação linear sequencial

O método de programação linear (LP) é utilizado para problemas em que as funções objetivo e restrições são lineares. Porém, a metodologia da LP também pode ser utilizada para resolver problemas em que estas funções não são lineares, isto é feito dividindo-se o problema não linear em subproblemas lineares, obtendo a solução após um número suficiente de iterações.

A linearização de um problema não linear é feita através de uma expansão em série de Taylor, utilizando apenas os termos de primeira ordem. Considerando uma função $f(x)$, a expansão em série de Taylor ao redor de um ponto x^* é dada pela expressão:

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f^T (x - x^*), \quad (27)$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ e ∇f é o vetor gradiente.

Pelo fato de que o algoritmo resolve apenas problemas lineares, a série de Taylor é truncada após os termos lineares. Dessa forma, a informação referente a matriz Hessiana é desprezada.

Assim, um problema de otimização linear pode ser reescrito fazendo-se expansões em série de Taylor tanto para a função objetivo, quanto para as funções de restrição, ficando:

Minimizar

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x^*} \quad (28a)$$

Sujeito à:

$$g(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{x^*} \leq 0 \quad (28b)$$

$$h(x) = h(x^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x^*} = 0 \quad (28c)$$

$$a_i^l \leq x_i - x_i^* \leq a_i^u, \quad (28d)$$

em que n é o numero de variáveis de projeto. A última restrição refere-se aos limites móveis. Os mesmos são adicionados ao problema pelo fato da linearização em série de Taylor ser válida apenas na vizinhança de x^* .

5.4 Atualização dos limites móveis

Na resolução via SLP é necessário atualizar os limites móveis a cada iteração. Se os valores dos mesmos forem muito pequenos, o custo computacional do processo para obter o ponto ótimo pode se tornar muito grande. Já para o caso em que os limites móveis forem muito grandes, pode-se perder o ponto ótimo.

A metodologia aqui utilizada, é uma atualização dos limites móveis baseada na história das iterações anteriores, aumentando ou reduzindo os valores dos limites móveis dependendo de como estão se comportando as variáveis de projeto. A atualização é realizada através de uma variável denominada lim_e que deve ser subtraída do valor da variável na iteração i , para o caso do limite inferior, e adicionado ao valor da variável na iteração i , para o caso do limite superior, Eq. 29:

$$a_i^l = \max(\rho_{e,i} - lim_e, 0.00001) \rightarrow \text{limite inferior} \quad (29a)$$

$$a_i^u = \min(\rho_{e,i} + lim_e, 1) \rightarrow \text{limite superior} \quad (29b)$$

A variável lim_e é atualizada a cada iteração. Caso o sinal da diferença entre o valor da variável de projeto na iteração $i - 2$ e $i - 1$ for igual ao sinal da diferença entre os valores nas iterações $i - 1$ e i , o valor da variável lim_e é aumentado multiplicando-se o mesmo por um coeficiente de aumento, denominado m_a (Eq. 30.a), caso contrário, a variável lim_e é diminuída multiplicando-se a mesma por um coeficiente denominado m_d , Eq. 30.b:

$$lim_e = \min(lim_e \cdot m_a, 0.01) \quad (30a)$$

$$lim_e = \max(lim_e \cdot m_d, 0.00001) \quad (30b)$$

5.5 Adição de ruídos nos parâmetros

A presença de ruídos em medições afetam a capacidade de uma metodologia de detecção de dano em identificá-lo, pois oculta as mudanças na resposta da estrutura e leva a cenários de danos incorretos. Desta forma, quanto maior for a confiabilidade dos dados obtidos, mais confiável será a sua aplicação no contexto da detecção de dano (MORALES, 2012).

A adição de ruídos foi feita como mostram as Eq. 31.a e 31.b, as quais efetuam perturbações nos valores das frequências ressonantes e anti-ressonantes da estrutura, que são utilizadas na formulação da função objetivo 21.

$$\omega_{nr} = \omega_n \times (1 + R_g \times \gamma_r) \quad (31a)$$

$$\mu_{nr} = \mu_n \times (1 + R_g \times \gamma_a), \quad (31b)$$

em que ω_{nr} e μ_{nr} são as frequências ressonantes e anti-ressonantes, respectivamente, contaminadas com ruído. Os parâmetros γ_r e γ_a são os níveis de perturbação do ruído para as frequências ressonantes e anti-ressonantes, respectivamente. R_g é um número aleatório que segue a distribuição de Gauss com média zero e desvio padrão igual a 1.

6 RESULTADOS

Este exemplo trata de uma viga com dimensões de 5 m de comprimento e 1 m de altura. As vinculações são caracterizadas por não possuir simetria, sendo compostas por um apoio de segundo gênero na extremidade inferior esquerda, e apoios horizontais na face direita da estrutura, como mostra a Figura 3.a. A Figura 3.b mostra a viga com um dano na parte superior central da viga, com dimensões de 0.375 m por 0.1875 m. A área deste dano é 0.070 m^2 , que corresponde a 1.41% da área da viga.

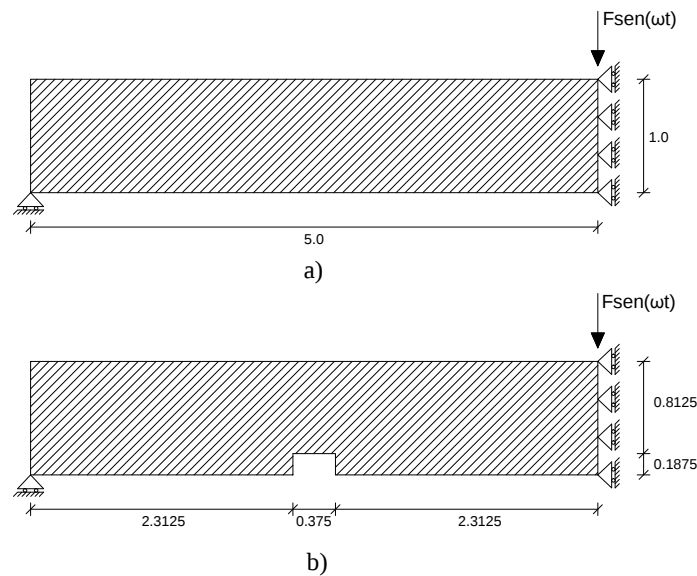


Figura 3: a) estrutura sem dano; b) estrutura com dano.

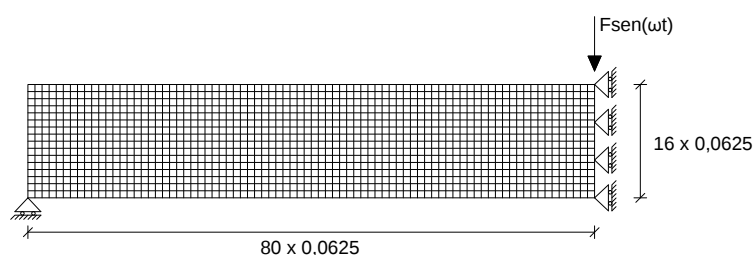


Figura 4: Malha de elementos finitos.

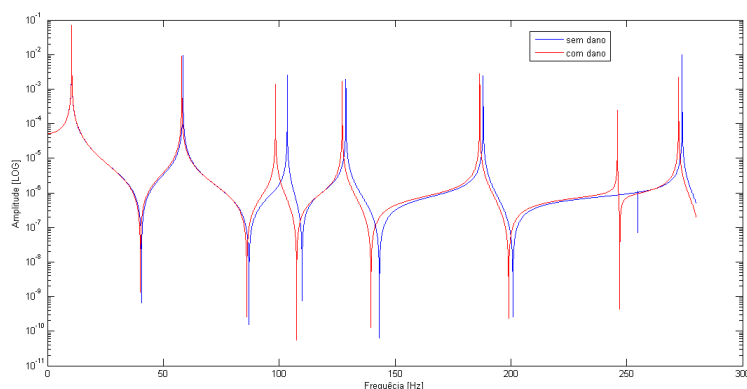


Figura 5: FRF - receptância

A malha de elementos finitos é mostrada na Figura 4 e o gráfico da FRF da receptância pontual na Figura 5.

A Tabela 1 mostra os valores das frequências ressonantes (ω_r) e anti-ressonantes (ω_a) da estrutura sem dano e com dano teórico, assim como a diferença percentual entre os mesmos. As frequências que sofreram as maiores variações foram a terceira (-4.9%) para a frequência ressonante e a sexta (-3.07%) para a frequência anti-ressonante. As médias das variações foram de 1.72% e 1.83%, para as frequências ressonantes e anti-ressonantes, respectivamente.

Os valores atribuídos aos diversos parâmetros para a otimização deste exemplo estão mostrados na Tabela 2.

A Tabela 3 mostra a comparação dos resultados das frequências ressonantes e anti-ressonantes da estrutura danificada de modo teórico e os resultados obtidos após a otimização, assim como a diferença entre os valores.

A variação dos resultados para diferentes iterações está mostrada na Figura 6. Como se observa (Figura 6.e), com 1000 iterações obteve-se um resultado satisfatório quando do objetivo de detectar a posição e geometria do dano. Porém, avalia-se que com 600 iterações (Figura 6.c) já é possível ter uma ideia da localização do dano.

A Tabela 4 reescreve os valores de frequências da terceira e quarta coluna da Tabela 1, porém, com a adição de perturbações nos dados.

A Figura 7 mostra o resultado obtido quando considerado o ruído mostrado na Tabela 4. Pode-se observar que o resultado foi afetado pela presença de dano, porém, ainda sendo possível uma identificação da posição do dano.

Sem dano		Com dano		Dif. (%)	
ω_r	ω_a	ω_r	ω_a	ω_r	ω_a
10,465	40,606	10,484	40,113	0,18	-1,21
58,506	86,962	58,004	86,033	-0,86	-1,07
103,508	109,913	98,434	107,546	-4,9	-2,15
128,825	143,261	127,234	139,624	-1,23	-2,54
188,076	200,888	186,587	199,049	-0,79	-0,92
254,839	254,840	245,984	247,029	-3,47	-3,07
273,961		272,417		-0,56	
			Média	1,72	1,83

Tabela 1: Frequências ressonantes e anti-ressonantes da estrutura com e sem dano (Hz).

Parâmetro	Valor utilizado
raio(item 3.2)	0,28
nº ressonâncias (item 5.1)	7
nº anti-ressonâncias (item 5.1)	6
coeficiente p (item 3)	1
coeficiente q (item 3)	1
η (item 3.3)	0,7
fator de ponderação $w_{r,i}$ (item 5.1)	1
fator de ponderação $w_{a,i}$ (item 5.1)	1
lim_e (item 5.4)	0,0001
m_a (item 5.4)	1,01
m_d (item 5.4)	0,9

Tabela 2: Valores dos parâmetros utilizados na otimização.

Com dano teórico		Dano otimizado		Dif. (%)	
ω_r	ω_a	ω_r	ω_a	ω_r	ω_a
10,484	40,113	10,487	40,101	0,03	-0,03
58,004	86,033	57,995	86,071	-0,02	0,04
98,434	107,546	98,417	107,526	-0,02	-0,02
127,234	139,624	127,172	139,657	-0,05	0,02
186,587	199,049	186,480	198,978	-0,06	-0,04
245,984	247,029	246,028	247,056	0,02	0,01
272,417		272,358		-0,02	

Tabela 3: Resultado da otimização.

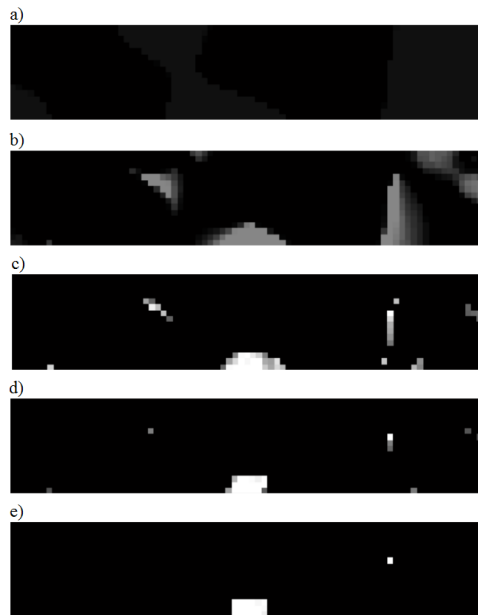


Figura 6: Resultado da otimização. Número de iterações: a) 200; b) 400; c) 600; d) 800 e e) 1000.



Figura 7: Resultado com a adição de ruído de: a) 1% ; b) 2%.

Ruído 1%		Ruído 2%	
ω_r	ω_a	ω_r	ω_a
10,478	40,124	10,471	40,135
57,959	85,977	57,915	85,922
98,476	107,522	98,518	107,497
127,186	139,422	127,138	139,219
186,555	199,121	186,523	199,194
246,049	246,975	246,113	246,921
272,520		272,623	

Tabela 4: Frequências da estrutura com dano e perturbadas com ruído (Hz).

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O exemplo apresentado possui as duas dimensões com ordens de grandezas parecidas (5 m de comprimento e 1 m de largura), a utilização apenas das informações de frequências ressonantes, para as formulações e metodologias utilizadas, não foram suficientes para a detecção do dano (posição e geometria).

Para as variáveis p e q foram atribuídos valores unitários, desprezando o método das penalizações. No contexto da otimização topológica, inúmeros autores recomendam o uso de valores para estas variáveis, porém, neste trabalho, no contexto da detecção de dano, os exemplos mostrados atingiram o objetivo de detectar o dano sem a utilização desse método.

Para os fatores de ponderação utilizados na formulação da função objetivo (item 5.1) foram atribuídos valores unitários, em todos os exemplos. A formulação utilizada nesta pesquisa foi baseada no trabalho de Nishizu, Takezawa e Kitamura (2014). Neste, os autores também utilizaram fatores de ponderação unitários.

No exemplo mostrado, a utilização em conjunto de informações das frequências ressonantes e anti-ressonantes (7 e 6, respectivamente) mostrou-se suficiente para a detecção do dano na estrutura, sendo possível sua localização e geometria. Para tal, foram necessárias 1000 iterações, como mostra a Figura 6.e. Porém, observa-se (Figura 6.c) que com 600 iterações já é possível se ter uma ideia da localização da posição do dano. Esse número de iterações necessárias ocorre pelo fato da utilização dos limites móveis muito pequenos, utilizados na programação linear sequencial.

Adicionando perturbações nos dados de referência em níveis de 1% e 2%, o código mostrou-se capaz de localizar o dano e sua geometria com a perturbação menor, e perdeu precisão a medida que o nível de perturbação aumentou. Tal conclusão é semelhante com a de outros autores (Palacz; Krawczuk, 2002), na qual os pesquisadores concluíram que a qualidade dos resultados diminuiu conforme diminuía também a qualidade das medições.

REFERÊNCIAS

- Afolabi, D., 1987. An anti-resonance technique for detecting structural damage. *Proceedings of the Fifth International Modal Analysis Conference*, pp. 491-495.
- Bendsoe, M. P.; Sigmund, O., 2003. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer-Verlag.
- Carrillo, O. J. B., 2007. *Algoritmo híbrido para avaliação da integridade estrutural: uma abordagem heurística*. PhD thesis, Universidade de São Paulo/São Carlos.
- Dessi, D.; Camerlengo, G., 2015. Damage identification techniques via modal curvature analysis: overview and comparison. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 52, pp. 181–205.
- Lee, J. S.; Kim, J. E.; Kim, Y. Y., 2006. Damage detection by the topology design formulation using modal parameters. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 69, pp. 1480–1498.
- Morales, J. D. V., 2012. *Detecção de dano em estruturas via inteligência computacional e análise dinâmica*. PhD thesis, Universidade de São Paulo/São Carlos.
- Nishizu, T.; Takezawa, A.; Kitamura, M., 2006. Damage detection method by topology optimization based on eigenvalue analysis. *International Ocean and Polar Engineering Conference*, pp. 883–889.
- Sigmund, O., 1997. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 24, pp. 493–524.
- Silva, D. C. C. M., 2003. *Determinação de termos rotacionais da resposta dinâmica por técnicas de análise modal*. Master dissertation, Universidade Técnica de Lisboa/Lisboa.
- Palacz, M.; Krawczuk, M., 2002. Vibration parameters for damage detection in structures. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 249, pp. 999–1010.