



ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS E MECANISMOS 2D COM LIGAÇÕES VISCOELÁSTICAS

Daniel Boy Vasconcellos

Marcelo Greco

danielboyvasconcellos@gmail.com

mgreco@dees.ufmg.br

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha, 31270-901, Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil

Resumo. Os dispositivos dissipadores de energia podem ser comumente utilizados em estruturas e mecanismos multicorpos submetidos a carregamentos dinâmicos para se reduzir vibrações estruturais. Este trabalho trata da aplicação da Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF) para análise dinâmica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações viscoelásticas. As equações de equilíbrio dinâmico do sistema são escritas considerando o princípio da energia potencial total estacionária e a solução do sistema não linear final de equações é obtida pelo método de Newton-Raphson. O algoritmo de integração temporal implementado é o de Newmark. Considera-se a formulação Lagrangeana total, a cinemática de Bernoulli-Euler e o comportamento linear elástico no material. Na modelagem das ligações reológicas adota-se os modelos de Maxwell e o de Kelvin-Voigt. Ao fim, realiza-se exemplos numéricos a fim de se ilustrar a aplicabilidade da formulação para problemas práticos.

Palavras-chave: Ligações viscoelásticas, Formulação posicional, Método dos elementos finitos, Análise dinâmica não linear, Mecanismos multicorpos.

1 INTRODUÇÃO

Em estruturas sujeitas a um carregamento dinâmico é comum o emprego de dispositivos que amortecem a resposta estrutural a fim de proporcionar um melhor desempenho do sistema. Esses dispositivos podem ser encontrados, por exemplo, em edificações resistentes a sismos, automóveis e em trens de pouso de aeronaves.

Nesse contexto, ressalta-se que as conexões podem apresentar comportamento não linear. Vários autores têm estudado esse aspecto dentre eles Del Savio (2004) e Reis (2012), que implementaram ligações semirrígidas para casos estáticos. Castro (2006) estudou a influência na resposta dinâmica de estruturas que possuem conexões não lineares. Esses trabalhos, no entanto, não consideram efeitos de viscosidade nas ligações que, ocasionalmente, podem estar presentes no problema.

Diante disso, então, torna-se essencial levar em consideração esse fator na análise estrutural. Entretanto, soluções analíticas para esses casos são restritas, especialmente em corpos submetidos a ações dinâmicas, o que torna necessário a utilização de métodos numéricos para encontrar respostas aproximadas do problema.

Neste trabalho será feita uma incorporação de ligações viscoelásticas na análise dinâmica de estruturas e mecanismos reticulados planos através da Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF). Considera-se no código computacional conexões viscoelásticas rotacionais e translacionais não lineares que podem estar presentes nos apoios ou entre os elementos do modelo. O código foi desenvolvido em MATLAB.

2 FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A FPMEF foi inicialmente concebida nos trabalhos de Coda (2003) e de Coda e Greco (2004) para o caso estático. A extensão para o caso dinâmico pode ser encontrada em Greco (2004) e em Greco e Coda (2006). Na concepção dessa formulação, as equações de equilíbrio são construídas a partir do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE), considerando, em vez dos graus de liberdade de translação dos nós, as posições nodais como incógnitas. Para a aplicação desse princípio a energia potencial total (Π) de um Elemento Finito (EF) é escrita como:

$$\Pi = U - \sum_{i=1}^6 F_i X_i + K + Q \quad (1)$$

em que U é a energia de deformação, F_i é a(o) força(momento) externa(o) aplicada(o) diretamente em um nó na direção do grau de liberdade i , X_i é a incógnita relativa à direção de F_i e 6 é o número de graus de liberdade de um EF, que possui dois nós e três incógnitas por nó. Salienta-se que X_i pode ser tanto posição (horizontal ou vertical) quanto rotação de um nó.

A grandeza K é a energia cinética e Q é a energia dissipada devida ao amortecimento estrutural.

A cinemática do EF adotada (válida para cadeias cinéticas abertas ou fechadas) é a de Bernoulli-Euler e considera-se comportamento elástico linear no material. Assim, como o material é Hookeano, U é expresso como:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV = \int_V \int_{\varepsilon} E \varepsilon d\varepsilon dV = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon^2 dV \quad (2)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal, σ é a tensão normal atuante em um elemento de volume dV que apresenta uma deformação normal ε . A integral da Eq. (2) é realizada no volume inicial V do EF em questão. A deformação é, então, escrita com base na cinemática escolhida e fica em função dos graus de liberdade do EF. Como o referencial é fixo durante a análise, a formulação é do tipo Lagrangeana total. Detalhes matemáticos desses aspectos podem ser encontrados em Greco (2004).

A energia cinética K do EF é escrita como:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 m_{ii} (\dot{X}_i)^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{X}}^T \underline{M} \dot{\underline{X}} \quad (3)$$

em que $\dot{\underline{X}}$ é o vetor velocidade dos graus de liberdade do EF e m_{ii} é um elemento da diagonal principal da matriz de massa $\underline{M}$, que neste caso é considerada discreta e é dada por:

$$\underline{M} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que ρ é a massa específica do material, A é a área da seção transversal e L é o comprimento inicial do EF. Pela Eq. (4), enfatiza-se que a inércia à rotação é desprezada.

O termo relativo à energia dissipada pode ser escrito já na forma de sua taxa de variação em relação à posição conforme a Eq.(5). Ressalta-se que nessa equação os índices repetidos não indicam somatório.

$$\frac{dQ}{dX_i} = c_{ii} \dot{X}_i \quad \text{ou} \quad \frac{dQ}{dX} = \underline{C} \dot{X} \quad (5)$$

Na Eq. (5) c_{ii} é um elemento da diagonal principal da matriz de amortecimento $\underline{C}$, que neste caso é considerada proporcional à massa e é dada por:

$$\underline{C} = 2c_m \underline{M} \quad (6)$$

em que c_m é o coeficiente de amortecimento suposto conhecido.

Uma vez concluída a escrita de Π em função dos X_i 's, segue-se para a aplicação do PEPTE, que estabelece que dentre todas as configurações possíveis para um corpo submetido a ações externas, aquela que corresponde a um valor estacionário da energia potencial total é a configuração equilibrada. Matematicamente isso pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial X_i} d\xi - F_i + \frac{dK}{dX_i} + \frac{dQ}{dX_i} = g(X_i) = 0 \quad (7)$$

em que u é a densidade linear de energia de deformação e l_0 é o comprimento do EF antes da deformação, cuja configuração deslocada é parametrizada como uma função da variável adimensional ξ ($0 \leq \xi \leq 1$). Na Eq. (7) definiu-se:

$$\begin{aligned} g(X_i) &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi - F_i + m_{ii} \dot{X}_i \frac{d\dot{X}_i}{dX_i} + c_{ii} \dot{X}_i = \\ &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi - F_i + m_{ii} \frac{dX_i}{dt} \frac{d\dot{X}_i}{dX_i} + c_{ii} \dot{X}_i = \\ &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi - F_i + m_{ii} \ddot{X}_i + c_{ii} \dot{X}_i = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Para integrar a Eq.(8) no tempo utiliza-se o esquema de Newmark cuja ideia básica é supor a aceleração constante ou linear durante um intervalo de tempo Δt . Dessa forma, chega-se às seguintes equações (os passos matemáticos podem ser encontrados em Greco (2004)):

$$X_i|_{S+1} = X_i|_S + \Delta t \dot{X}_i|_S + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_i|_S + \beta \ddot{X}_i|_{S+1} \right] \quad (9)$$

$$\dot{X}_i|_{S+1} = \dot{X}_i|_S + \Delta t(1-\gamma)\ddot{X}_i|_S + \gamma \Delta t \ddot{X}_i|_{S+1} \quad (10)$$

em que S é um instante de tempo qualquer e, considerando-se aproximação constante para $\ddot{X}_i$, tem-se $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$ e, para aproximação linear de $\ddot{X}_i$, tem-se $\gamma = 0.5$ e $\beta = 1/6$. Escrevendo-se a Eq.(8) num instante de tempo $S + 1$ e utilizando-se as equações (9) e (10) chega-se a:

$$\begin{aligned} g(X_i|_{S+1}) &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi \Big|_{S+1} - F_i|_{S+1} + m_{ii} \ddot{X}_i|_{S+1} + c_{ii} \dot{X}_i|_{S+1} \\ &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi \Big|_{S+1} - F_i|_{S+1} + \left[\frac{X_i|_{S+1} - Q|_S}{\beta(\Delta t)^2} - Q|_S \right] m_{ii} + \left(\frac{X_i|_{S+1} - \Delta t Q|_S}{\beta \Delta t} \right) \gamma c_{ii} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

em que:

$$Q|_S = \frac{X_i|_S}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\dot{X}_i|_S}{\beta \Delta t^2} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_i|_S \quad (12)$$

$$R|_S = \dot{X}_i|_S + \Delta t(1-\gamma)\ddot{X}_i|_S \quad (13)$$

Nota-se, então, que a solução do problema é a raiz da função g e, como g é não linear, utilizou-se o Método de Newton-Raphson para solucioná-lo. Assim, expandindo-se g em polinômio de Taylor até o termo de primeira ordem tem-se:

$$g(X_i|_{S+1}) = 0 \Rightarrow g(X_i^0|_{S+1}) + \nabla g(X_i^0|_{S+1}) \Delta X \cong 0 \quad (14)$$

em que X_i^0 é a posição inicial do grau de liberdade i , ΔX é o termo incógnito da equação e $\nabla g(X_i^0|_{S+1})$ é um valor a ser incorporado na matriz Hessiana do EF em questão. Esse valor é dado por:

$$\nabla g(X_i^0|_{S+1}) = g_{,k}(X_i^0|_{S+1}) = l_0 \int_0^1 u_{,ik} d\xi \Big|_{X_i|_{S+1}=X_i^0|_{S+1}} + \frac{m_{ii}}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\gamma c_{ii}}{\beta \Delta t} \quad (15)$$

As derivadas $u_{,i}$ (Eq. (8)) e $u_{,ik}$ (Eq. (15)) podem ser encontradas em Greco (2004). Uma vez calculados o vetor de resíduo (função g) e a matriz Hessiana para cada EF, obtém-se, através do Método da Rigidez Direta, o vetor de resíduos, a matriz Hessiana e termo incógnito $\Delta \underline{X}$ para todo o sistema. O critério de parada considerado para o processo incremental-iterativo foi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^N [(\Delta \underline{X})_i]^2} \leq Tol \quad (16)$$

em que N é o número de graus de liberdade incógnitos do modelo, Tol é a tolerância (igual a 10^{-8} neste trabalho) e $\Delta \underline{X}$ é expresso por:

$$\Delta \underline{X} = - \left[\nabla g(\underline{X}^0|_{S+1}) \right]^{-1} g(\underline{X}^0|_{S+1}) \quad (17)$$

Caso exista convergência em uma iteração, o vetor $\underline{X}$ é atualizado através da fórmula $\underline{X} = \underline{X}^0 + \Delta \underline{X}$. No passo de tempo seguinte, recalcula-se a matriz Hessiana e o vetor de resíduos utilizando-se o vetor $\underline{X}$ corrigido e, então, prossegue-se para o cálculo de um novo $\Delta \underline{X}$. O código executa essas etapas até o tempo total requerido pelo usuário.

3 INCLUSÃO DE LIGAÇÕES VISCOELÁSTICAS

As ligações viscoelásticas abordadas neste trabalho são a de Maxwell e a de Kelvin-Voigt, conforme mostra a Fig. 1. Destaca-se que, por hipótese, as conexões não tem dimensão no modelo de elementos finitos.

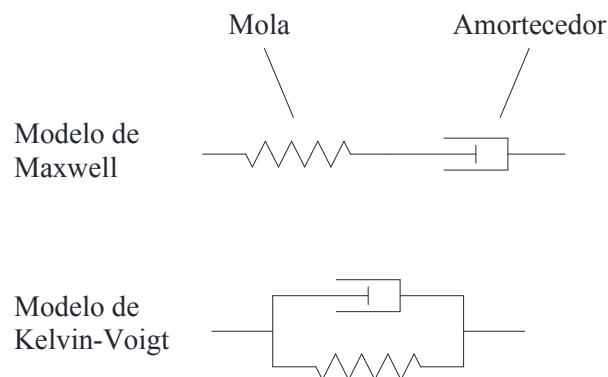


Figura 1 – Representação esquemática das ligações viscoelásticas.

A lei de comportamento tanto da mola quanto do amortecedor foi suposta não linear. Essa não linearidade foi modelada utilizando-se uma curva multilinear permitindo, assim, que o usuário insira a curva que melhor que atenda. Para a mola insere-se uma curva força *versus* deslocamento e para o amortecedor uma curva força *versus* velocidade.

Em um dado trecho linear da curva da mola, utilizou-se a relação dada pela Eq. (18), e para um dado trecho linear da curva do amortecedor, empregou-se a relação dada pela Eq. (19).

$$\begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_a \\ \dot{X}_b \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Nas equações (18) e (19) f_a e f_b representam as forças nodais que atuam, respectivamente, na direção dos graus de liberdade a e b , que estão conectados através de uma mola e/ou de um amortecedor. O termo X_a é a incógnita na direção do grau de liberdade a e X_b é a incógnita na direção de b . O parâmetro k é a inclinação da reta corrente da curva da mola para um dado deslocamento igual à $X_b - X_a$. Os termos $\dot{X}_a$ e $\dot{X}_b$ são as velocidades dos graus de liberdade a e b , respectivamente. Analogamente à k , o parâmetro c é a inclinação da reta corrente da curva do amortecedor para uma dada velocidade igual a $\dot{X}_b - \dot{X}_a$. Ressalta-se que X_a e X_b podem ser graus de liberdade translacionais ou rotacionais.

Assim, dado o deslocamento e a velocidade dos graus de liberdade associados a uma conexão, verifica-se em qual trecho linear de cada lei de comportamento os dados se encontram e, através das equações (18) e (19), calcula-se as forças nodais e a matriz Hessiana correntes e os incorpora, respectivamente, no vetor de forças nodais e na matriz Hessiana da estrutura em cada grau de liberdade associado à ligação. Essa incorporação é feita dentro de cada iteração do método de Newton-Raphson.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 Exemplo 1

Deseja-se analisar a barra da Fig. 2 submetida ao carregamento $p(t)$ dado pela Eq. (20). Utilizou-se uma malha de 60 EF para este problema e, na modelagem do comportamento da mola dos casos a) e b), adotou-se uma discretização da função $F = 9.5 \times 10^5 x^{3/4}$, em que F é a força na mola em newtons e x é o seu deslocamento em metros. A Fig. 3 mostra a lei do amortecedor para os casos a) e b). Na integração temporal de Newmark utilizou-se $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$ e $\Delta t = 0.005$. Para o cálculo numérico de integrais empregou-se a quadratura de Gauss-Legendre com dois pontos de Gauss. O amortecimento estrutural foi desprezado a fim

de se estudar com maior clareza a influência de um amortecedor pontual na resposta do sistema. A análise foi realizada até $t = 1.5$ s.

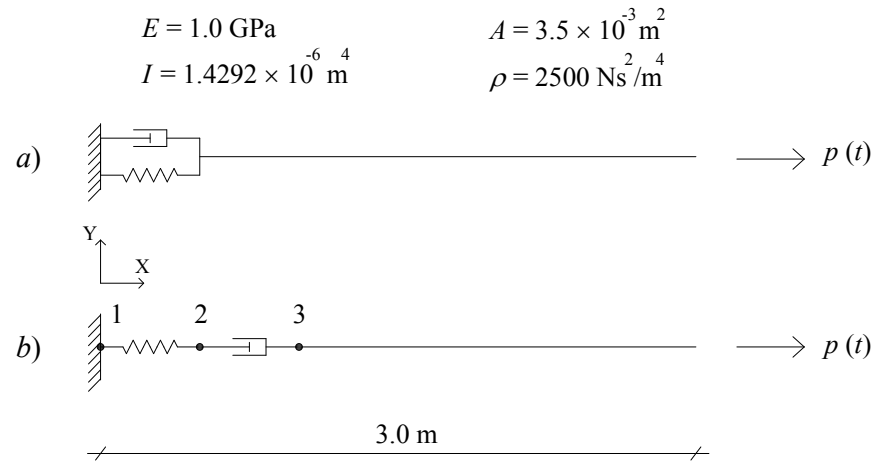


Figura 2 - Dados do Exemplo 1.

$$p(t) = \begin{cases} 100 \text{ N} & \text{para } 0 \leq t \leq 0.4 \text{ s} \\ 0 & \text{para } t > 0.4 \text{ s} \end{cases} \quad (20)$$

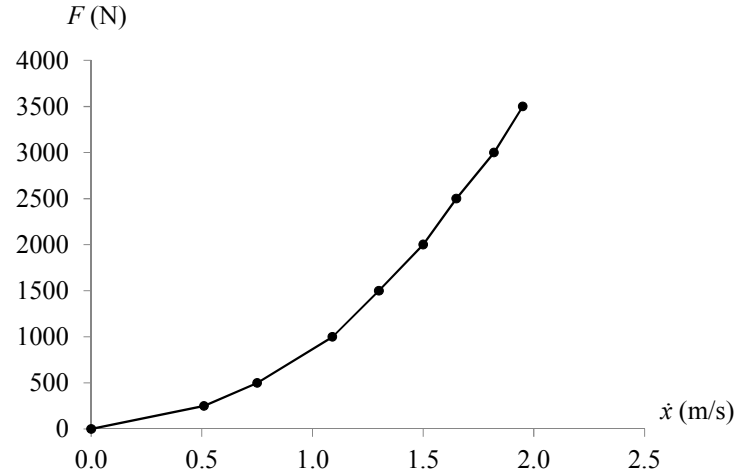


Figura 3 - Lei de comportamento do amortecedor.

A Fig. 4 mostra a posição horizontal do nó da extremidade da barra em duas situações: com ligação de Kelvin-Voigt e considerando a barra engastada.

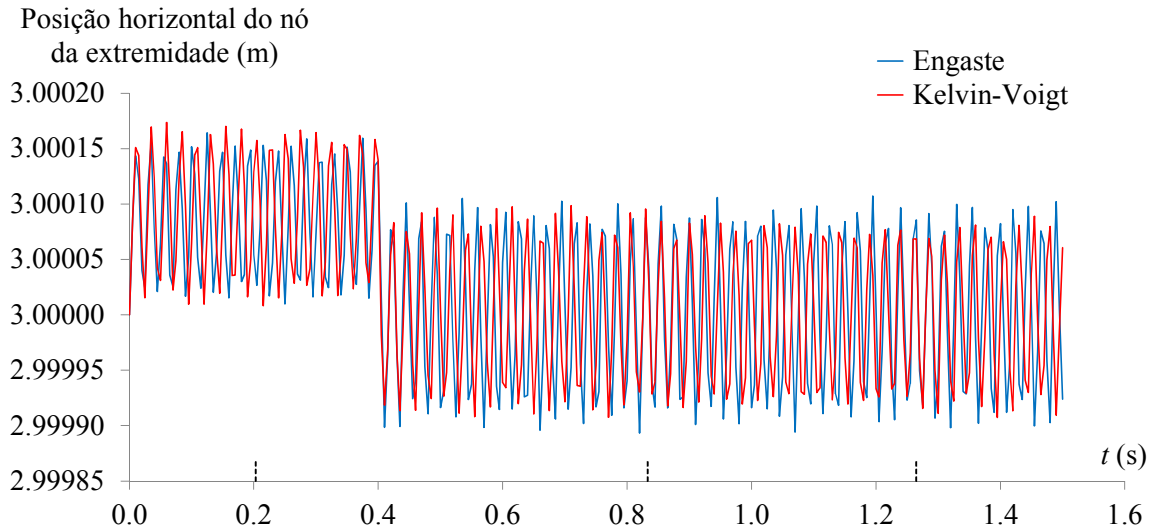


Figura 4 – Comparação da resposta para a barra engastada e para o caso *a*).

Verifica-se que, como esperado, a posição do nó oscila em torno da posição de equilíbrio estático tanto para a barra engastada como para o caso *a*) após a retirada da força. Além disso, nota-se que, no instante de tempo próximo a 2 s, as respostas estão totalmente defasadas. No entanto, elas entram em fase em 0.4 s e em 0.83 s e 1.27 s aproximadamente, conforme indicado na Fig. 4. Diante disso, pode-se inferir que a ligação de Kelvin-Voigt aumenta o período de resposta da barra. Observa-se também que, de uma forma geral, o amortecedor contribuiu levemente na redução da amplitude de resposta da barra durante a vibração livre. A mola, por sua vez, conferiu o caráter oscilatório na resposta do sistema. Deste modo, conclui-se que a implementação da conexão de Kelvin-Voigt neste exemplo forneceu resultados aceitáveis do ponto de vista teórico.

A Fig. 5 mostra a posição horizontal do nó 3 da barra no caso *b*).

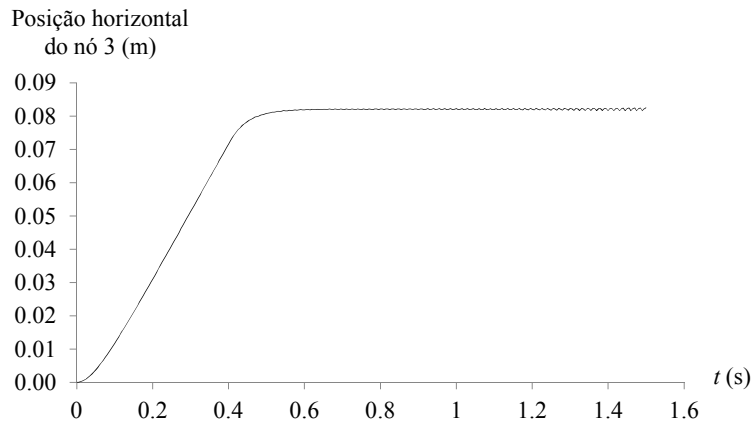


Figura 5 – Posição do nó 3 $\times$ tempo.

Nota-se que o amortecedor ofereceu resistência ao deslocamento nos instantes logo após a aplicação da força, o que pode ser percebido pela concavidade para cima da curva no início do gráfico da Fig. 5. Em instantes posteriores, a posição do nó 3 cresce aproximadamente linearmente no tempo. Coerentemente, como a velocidade é a derivada temporal da posição, a velocidade do nó 3, mostrada pela Fig. 6, apresenta-se constante (com pequenas oscilações) no mesmo intervalo de tempo em que a posição cresce de forma linear. Além disso, é importante constatar que a posição do nó 3 aumenta, até certo valor, mesmo após a retirada da força em $t = 0.4$ s. Como o nó 3 se encontra com velocidade diferente de zero nesse instante, ele ainda se desloca por um certo tempo com diminuição da velocidade, de acordo com a Fig. 6, até a posição em torno de 0.08 m.

Pode-se perceber também que, ao contrário da ligação de Kelvin-Voigt, a conexão de Maxwell não confere o caráter oscilatório ao sistema. Pela Fig. 5, observa-se que a posição do nó 3 se manteve em torno de 0.08 m (com ligeiras oscilações).

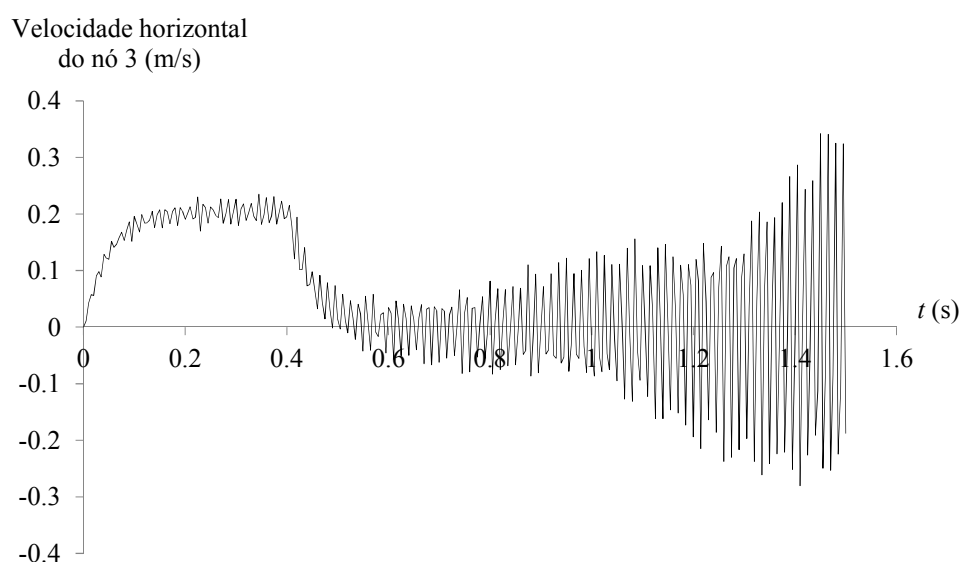


Figura 6 – Velocidade do nó 3 $\times$ tempo.

A Fig. 7 mostra a posição horizontal do nó 2 da barra no caso *b*). Pode-se perceber que a mola, como esperado, ofereceu um limite superior para o deslocamento do nó 2 e restaurou sua posição inicial imediatamente logo após a retirada da força. Na vibração livre, o sistema apresentou um comportamento oscilatório crescente como pode ser identificado na Fig. 7.

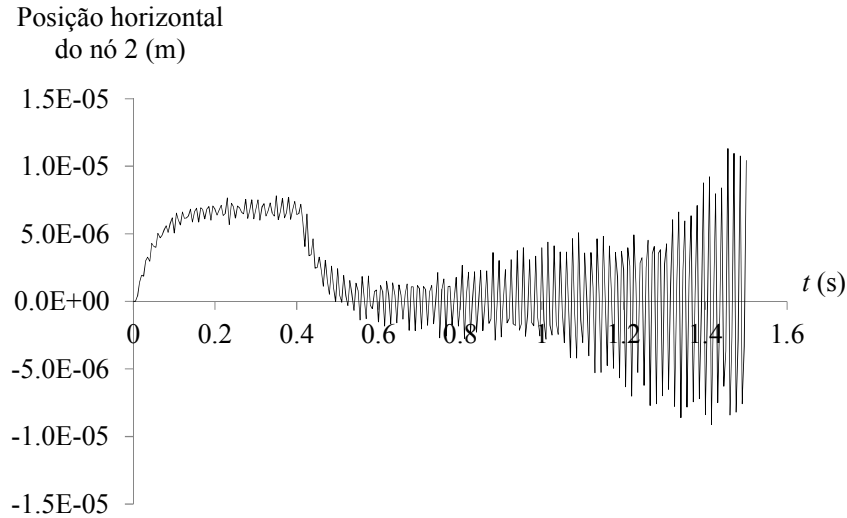


Figura 7 - Posição do nó 2 $\times$ tempo.

4.2 Exemplo 2

Deseja-se analisar o mecanismo da Fig. 8 submetido ao carregamento $M(t)$ dado pela Eq. (21). Utilizou-se 1 EF para o braço mecânico (comprimento de 0.2 m) e 1 EF para a haste (comprimento de 0.4 m). A análise foi realizada até $t = 5.03$ s. Os parâmetros do método de integração temporal de Newmark são os mesmos do exemplo anterior. O amortecimento estrutural também foi desprezado. Este exemplo foi realizado a partir de um similar estudado por Escalona *et al.* (1998).

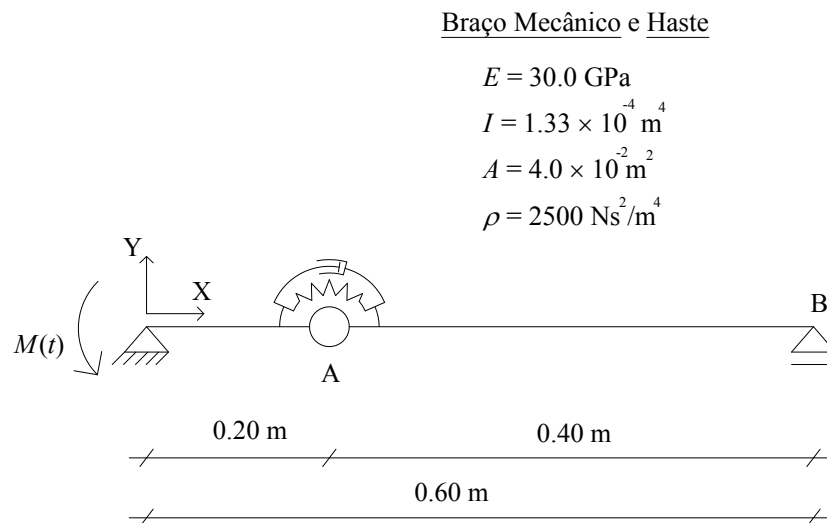


Figura 8 – Dados do exemplo 2.

$$M(t) = \begin{cases} 26.0(1 - e^{-4.988t}) & \text{para } 0 \leq t \leq 0.7 \text{ s} \\ 0 & \text{para } t > 0.7 \text{ s} \end{cases} \quad (21)$$

A Fig. 9 mostra a lei não linear utilizada para a mola e a Fig. 10 as leis empregadas no amortecedor.

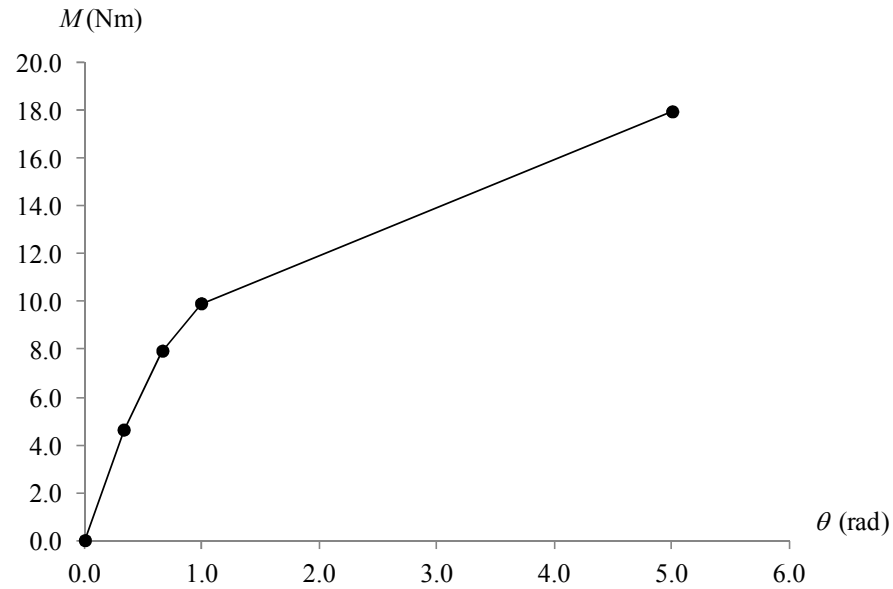


Figura 9 – Lei de comportamento da mola.

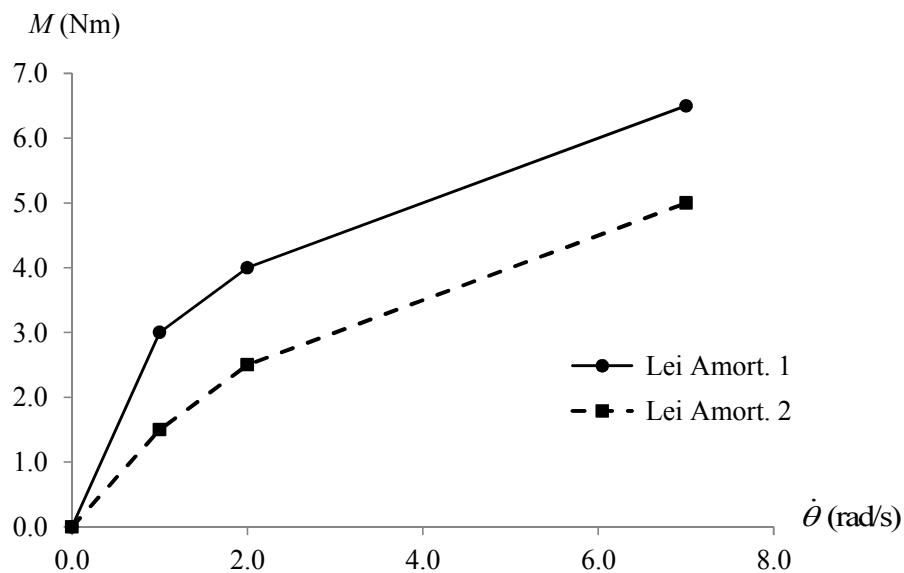


Figura 10 – Leis de comportamento do amortecedor.

A Fig. 11 mostra a posição horizontal do nó B ao longo do tempo. Nota-se a diferença de comportamento quando se utiliza a lei 1 ou 2 para o amortecedor na resposta do mecanismo com ligação Kelvin – Voigt (KV). A lei 1 reduz a amplitude de resposta do sistema mais rapidamente do que a lei 2, como esperado. Constata-se, também, que o mecanismo com ligação elástica realiza um pouco mais da metade de um ciclo completo, como pode ser observado na Fig. 11. O mecanismo com rótula livre, por outro lado, consegue perfazer um ciclo completo, comportando-se em movimento oscilatório no *steady state*.

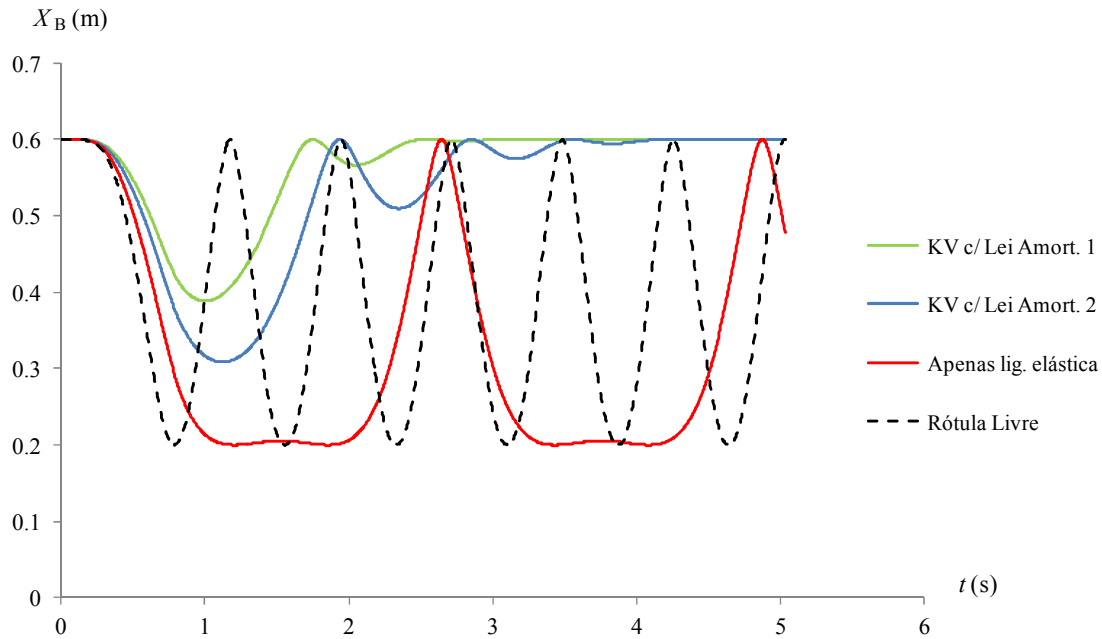


Figura 11 - Posição horizontal do nó B $\times$ tempo.

A Fig. 12 mostra a posição vertical do nó A ao longo do tempo para diversos casos. Percebe-se, de maneira análoga à Fig. 11, a distinção na resposta do sistema que possui ligação KV e que possui ligação puramente elástica. Destaca-se que nos casos em que não há amortecedor não houve redução da amplitude de resposta, conforme esperado.

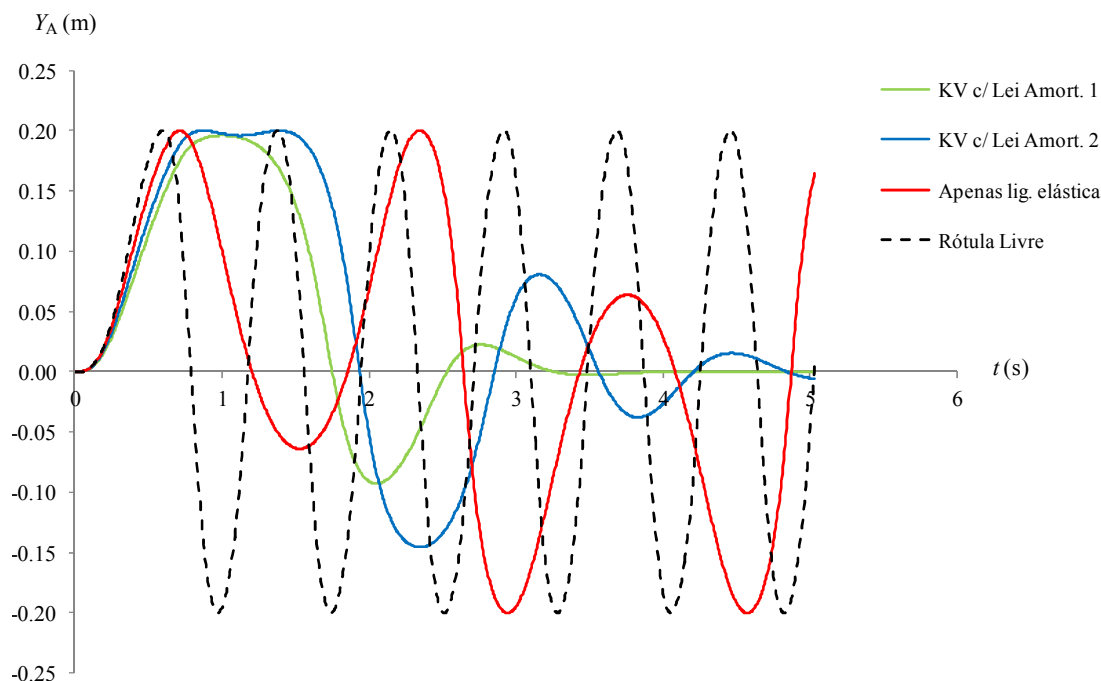


Figura 12 – Posição vertical do nó A $\times$ tempo.

5 CONCLUSÕES

A inclusão de ligações viscoelásticas na análise estrutural é necessária para uma correta avaliação do comportamento do sistema. Neste trabalho fez-se essa incorporação através da FPMEF.

Pode-se afirmar que a metodologia aqui empregada foi eficaz na consideração de não linearidades em molas e em amortecedores e conduziu a resultados teoricamente adequados. Além disso, a formulação posicional se mostrou satisfatoriamente capaz para a análise de mecanismos. Nesse contexto, ressalta-se que o problema pode ser complexo dependendo das condições de contorno e do carregamento dinâmico em que o mecanismo está submetido.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro a este trabalho.

REFERÊNCIAS

Castro, R. A., 2006. *Modelagem computacional de ligações semirrígidas e sua influência na resposta dinâmica não linear de pórticos de aço*. Dissertação de Mestrado, UERJ, Rio de Janeiro.

- Coda, H.B., 2003. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In São Paulo, *XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- Coda, H.B.; Greco, M., 2004. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, n. 33, p. 3541-3557.
- Del Savio, A.A., 2004. *Modelagem computacional de estruturas de aço com ligações semirrígidas*. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- Escalona, J.L.; Hussien, H.A.; Shabana, A.A., 1998. Application of the absolute nodal co-ordinate formulation to multibody system dynamics. *Journal of sound and vibration*, vol. 214, p. 833-851.
- Greco, M., 2004. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese de Doutorado, EESC/USP, São Carlos.
- Greco, M.; Coda, H. B., 2006. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 290, n. 3, p. 1141-1174.
- Reis, M.C.J., 2012. *Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elasto-plásticas*. Dissertação de Mestrado, EESC/USP, São Carlos.