



THE BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH DUAL RECIPROCITY IN POTENTIAL PROBLEMS

Élida Gomes Pires

Gilberto Gomes

elidagomespires@hotmail.com

ggomes@unb.br

Afiliação

Universidade de Brasília – UNB, Campus Darcy Ribeiro SG-12, 70.910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil

Marcelo Carneiro do Carmo Ribeiro

Marcelo.ribeiro@alfa.br

Afiliação

Centro Universitário Alves Faria – UNIALFA, Avenida Perimetral Norte, Nº: 4.129, 74445-190, Goiânia, Goiás

Abstract. *The Boundary Element Method (BEM) is currently one of the most important numerical solution techniques for the treatment of physical problems, whose mathematical models are driven by partial differential equations. Its basic principle is to present an approximate solution of the proposed problem through the exclusive discretization in the physical contour involved, transforming the differential equations that are valid for each domain of the problem into integral boundary equations. When it is not possible to take into account all the terms of the governing equation, terms not considered in obtaining the fundamental solution will produce domain integrals that will preferably be transformed into boundary integrals. An alternative is to replace the effects of the integral domain to the boundary using the Dual Reciprocity Method (DRM). Here, it is proposed to present a MATLAB program to compute temperature and flow for Potential problems via BEM / DRM. To validate the implemented program an example will be shown corroborating with the accuracy and efficiency of the analysis.*

Key words: *Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Potential, MATLAB.*

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil,
November 5-8, 2017.

1 INTRODUÇÃO

O Método de Elementos de contorno (MEC) surgiu nos anos 1960 sobre as clássicas integrais de contorno para problemas de potencial e de avaliação de tensão e é na atualidade uma das principais técnicas e solução direcionando ao tratamento de problemas físicos, cujos modelos matemáticas são orientadas por equações diferenciais parciais e tem sido usado em problemas diversos como placas, cascas, mecânica dos solos, mecânica da fratura, potencial, acústica, dentre outros. O MEC é um bem estabelecido método numérico, cuja principal característica é a redução na dimensão do problema (BREBBIA e DOMINGUEZ 1989).

Vários problemas no ramo da engenharia podem ser representados pela teoria de potencial regida pela equação de Laplace, em que é um caso particular da equação de Poisson, na qual o termo de domínio possui valor nulo. Assim uma das dificuldades encontrada pelos pesquisadores do MEC era a extensão da técnica a problemas de natureza não linear ou de dependência do tempo (GOMES, 2016). Em trabalhos iniciais com MEC, integrais de domínio foram resolvidas usando células internas (Telles,1981). Para esse tipo de problema, era necessário discretizar o domínio em uma serie de células avaliando a integral de domínio da formulação do método pela aplicação da solução fundamental, tais como termos não homogêneos. Essa técnica requeria um número maior de dados para realizar o problema com uma complexidade de operações envolvidas, o que a torna pouco atrativa. Com sentido no tratamento das integrais de contorno, surgiram vários métodos apresentado por alguns autores, dentre os quais podemos citar: Método da reciprocidade múltipla, Técnica do Tensor de Galerkin, Expansões de Fourier, Método de Monte Carlo, Integração Analítica e Método da Reciprocidade Dual (MRD).

O Método de Reciprocidade Dual foi proposto por Nardine e Brebbia em 1982 e um livro coletando aplicações por Partridge *et al.* em 1992. Esse método é o que mais alcançou sucesso entre as técnicas existentes para tratar das integrais de domínio. O MRD é uma técnica que transforma integral de domínio ao contorno e é utilizado onde não existe uma solução fundamental para o problema completo. O método também pode ser aplicado para construir soluções particulares para tratar termos não lineares, juntando a condições de contorno.

Neste artigo propõe apresentar um programa que foi desenvolvido através do MATLAB por possuir uma linguagem simples. O programa permite gerar um arquivo com todos os dados de temperatura e fluxo via MEC/MRD a ser analisado. Para validar o programa implementado um exemplo baseado em Partridge et al (1992) será mostrado.

O conteúdo deste trabalho está organizado nas seguintes seções: seção 2 aborda a formulação via MEC/MRD; a implementação computacional, organização do código são apresentados na sessão 3; e um exemplo para atestar a validação do programa BEMPOTENCIAL, para gerar os resultados de temperatura e fluxo são apresentadas na seção 4; por fim, a conclusão na seção 5.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O MEC consiste basicamente na transformação da equação diferencial que governa o problema em uma equação integral. A superfície externa é dividida em uma série de elementos, cujas funções consideradas podem variar de diversas maneiras. Assim, as integrais no contorno são aproximadas por integrações efetuadas em cada elemento. Estas integrais geram coeficientes de importância entre os diversos elementos criando um sistema de equação que relacionam potenciais e fluxos em todos os elementos que aproximam o contorno. A formulação do MEC, de forma geral, pode ser obtida empregando a técnica de resíduos ponderados. Muitos são os trabalhos que tratam do problema de potencial via MEC, destacando, Brebbia e Nardine (1982), Brebbia e Dominguez (1992) e Hess e Smith (1967).

2.1 Equação de Laplace

A equação de Laplace serve como base para o progresso inicial do MEC aplicados a problemas de potencial. O primeiro passo para a dedução do integral de contorno é a escolha do método que vai ser empregado. Dentre esses métodos podem ser citados o método dos resíduos ponderados, o teorema de Betti, a identidade de Green e os princípios dos trabalhos virtuais. Neste artigo o método empregado é o método dos resíduos ponderados. É fundamental destacar que os elementos de contorno lineares e constates foram primeiramente produzidos por BREBBIA (1989).

2.1.1 Relações básicas:

Seja uma função potencial “u” no domínio Ω , na qual corresponde a equação empregada:

$$\nabla^2 u = 0 \text{ em } \Omega. \quad (1)$$

Decorrentes das seguintes condições de contorno:

- 1) Condição de contorno “essencial” $u = \bar{u}$ determinado em Γ_1
- 2) Condição de contorno “natural” $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$ determinado em Γ_2

A combinação das condições de contorno mostrada acima será mais complexa, como por exemplo:

$$\alpha u + \beta q = \gamma \quad (2)$$

onde: α, β, γ são parâmetros conhecidos e podem simplesmente introduzido conforme Brebbia et al (1984).

Os erros introduzidos nas equações acima, se exato (porém um- valor conhecido) de u e q for alterado pela solução aproximada, pode ser minimizada por intermédio da ponderação dos resíduo. Sendo R o resíduo, pode se escrever em geral que:

$$R = \nabla^2 u \neq 0 \text{ em } \Omega$$

$$R_1 = u - \bar{u} \neq 0 \text{ em } \Gamma_1$$

$$R_2 = q - \bar{q} \neq 0 \text{ em } \Gamma_2$$

Os resíduos mostrados acima ficam assim determinados:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (3)$$

O propósito deste procedimento é para forçar os resíduos a zero em um sentido médio. Integrando por partes 2 vezes o termo da esquerda, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (4)$$

Essa equação é o ponto de partida para a aplicação do MEC e se aplica apenas no contorno e não é utilizada como solução de problemas. Essa equação produz uma matriz singular que não permite que seja calculada a solução em pontos internos que é indispensável em alguns casos. O que fazemos normalmente é escolher uma “solução fundamental” para a equação governante para impedir os problemas citados.

2.1.2 Solução fundamental

Aplicado em um dado ponto i , a solução fundamental é a solução para a equação governante no domínio infinito com potencial unitário. Segue a equação:

$$\nabla^2 u^* + \Delta_i = 0 \quad (5)$$

onde: Δ_i representa a função delta de Dirac que caracteriza um potencial unitário atuando no ponto “ i ”.

A integral de uma função de Dirac multiplicada por qualquer outra função é igual ao valor deste último ponto “ i ”. Então:

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u (-\Delta_i) d\Omega = -u_i \quad (6)$$

A equação (4) pode ser escrita como:

$$u_i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad (7)$$

onde é válida em todo ponto em Ω .

Assim sabe-se para o caso isotrópicos bidimensionais a solução fundamental é

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (8)$$

E para meios tridimensionais a solução fundamental é dada pela equação:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (9)$$

onde r é a distância do ponto de aplicação da carga até o ponto considerado.

2.1.3 Equação integral de contorno

A equação (6) é válida a qualquer ponto do domínio. Para levantar o problema como uma técnica de contorno é necessário limitar a equação somente para os pontos do contorno, onde fica assim definida:

$$u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (10)$$

Por apresentar uma baixa ordem de singularidade, as integrais do tipo exposto no lado direito da equação (10) são fáceis de analisar, portanto não há mudança significativa. Analisando o lado esquerdo da integral percebe-se que ela se comporta de uma forma diferente. Temos ao redor de Γ_ε o seguinte resultado.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u q^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} q \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \right\} \equiv -\frac{1}{2} u_i \quad (11)$$

Eles produzem o que é chamado de termo livre. O mesmo ocorre para os problemas bidimensionais onde o lado direito da integral ao redor de Γ_ε é identicamente igual a zero e o lado esquerdo fica:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_1} u \frac{1}{2\pi\varepsilon} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} \equiv -\frac{1}{2} u_i \quad (12)$$

Utilizando (11) e (12) pode se escrever a seguinte expressão para os problemas bi e tridimensionais.

$$\frac{1}{2} u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (13)$$

2.1.4 O Método de Elementos de Contorno para Equação de Laplace

A equação (13) pode ser discretizada para encontrar o sistema de equações de que os valores de contorno são capazes de ser achados. Assim, para elementos constantes considerados aqui o contorno Γ é suposto ser dividido em N elementos, $\Gamma_i=1,2,3,...,N$, temos:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \quad (14)$$

Os valores das variáveis “u” e “q” são constates para cada elemento e igual ao valor no meio do nó.

A equação (13) pode ser discretizada para cada nó “i” antes de colocar qualquer condição de contorno, portanto a equação assume a forma:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma \quad (15)$$

Há dois tipos de integrais a serem admitidas sobre os elementos para montar uma equação que relaciona “u” e “q”, que segue:

$$\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (16)$$

Essas integrais relacionam o nó “i” onde a solução fundamental está atuando com o outro nó “j”. Assim essas integrais serão chamadas de $\overline{H}_{ij}$ e $\overline{G}_{ij}$, isto é:

$$\overline{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma \quad \text{e} \quad \overline{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_i^* d\Gamma \quad (17)$$

onde i: fonte unitária no contorno, e j: índice associado ao nó do elemento que está sendo integrado.

Aplicando uma fonte ou uma carga unitária “i”, calcula-se H_{ij} e G_{ij} . Logo para um ponto particular “i” pode-se escrever:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij} q_j \quad (18)$$

2.1.5 Montagem da matriz H_{ij} e G_{ij}

Admitindo que a fonte unitária é aplicada em cada um dos nós funcionais do contorno e que a posição de “i” pode variar de 1 a N, vemos que a solução fundamental está sendo aplicada em cada um dos nós sucessivamente e chega-se a um sistema de N equações resultantes da aplicação da equação (18) a cada um dos pontos em volta do contorno.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N u_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{H}_{ij} u_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \overline{G}_{ij} q_i \quad (19)$$

Em um determinado momento “i” será igual a “j”, pois o valor do índice “j” passará por todo o contorno, a partir do índice “i” fixado. Esse índice percorre todo o contorno em N elementos. Portanto, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^N \left(\overline{H}_{ii} + \frac{1}{2} \right) u_i = \sum_{i=1}^N \overline{G}_{ii} q_i \quad (20)$$

Chamando de:

$$H_{ii} = \overline{H}_{ii} + \frac{1}{2} \quad \text{para } i=j \quad (21)$$

E para índices diferentes $i \neq j$, temos:

$$H_{ij} = \overline{H_{ij}} \quad (22)$$

Assim a equação (18) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N \overline{H_{ij}} u_j = \sum_{j=1}^N \overline{G_{ij}} q_j \quad (23)$$

Esta série de equações pode ser escrita na forma matricial como:

$$HU=GQ \quad (24)$$

onde H e são duas matrizes $N \times N$ e U e Q são vetores de tamanho N.

Observando que N_1 valores de u e N_2 valores de q são conhecidas em Γ_1 e Γ_2 respectivamente ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), então existem somente N valores desconhecidos no sistema de equações (24). Para estabelecer essas condições de contorno temos de rearranjar o sistema movendo as colunas de H e G de um lado ao outro. Uma vez que todos os valores desconhecidos são passados para o lado esquerdo, podemos escrever:

$$Ax=y \quad (25)$$

No qual x é um vetor de valores nodais nos potenciais u e dos fluxos q desconhecidos no contorno e y é encontrado pela multiplicação da coluna correspondente da matriz resultante do rearranjo das colunas de H e G pelos valores conhecidos ou prescritos de u's ou q's resultante do rearranjo das linhas de U e Q.

Agora pode ser resolvida a equação (25) e todos os valores de contorno são então conhecidos. Uma vez que isto é realizado, é possível calcular qualquer valor interno de u de suas derivadas. Os valores de u's são calculados em qualquer ponto interno "i", o qual pode ser escrita como:

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad (26)$$

Observe que agora a solução fundamental é considerada ser ativo sobre o ponto interno "i" e que todos os valores de u e q já são conhecidos. O processo é então de integração.

A mesma discretização é utilizada para integrais de contorno, isto é:

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \overline{H_{ij}} u_j \quad (27)$$

os coeficientes G_{ij} e H_{ij} foram calculados novamente para cada diferente ponto interno.

Os valores dos fluxos internos nas duas direções x_1 e x_2 , $q_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $q_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$, são calculados efetuando-se as derivadas em (26), isto é:

$$\begin{aligned} (q_{x_1})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)_i = \int_{\Gamma_1} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_1} \right) d\Gamma \\ (q_{x_2})_i &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)_i = \int_{\Gamma_1} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_2} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (28)$$

Observando que as derivadas são efetuadas somente sobre as soluções fundamentais u^* e q^* conforme estamos calculando as variações de fluxo ao redor do ponto “i”.

2.2 Equação de Poisson

Integrais de domínio em elementos de contorno podem surgir devido a uma variedade de efeitos, tais como as forças de corpo, estados iniciais, termos não lineares, entre outros. A equação de Poisson possui várias aplicações dentro da teoria de potencial como por exemplo o problema de torção, condução do calor, movimento de fluidos, processo de difusão entre outros, ou seja, uma equação muito importante na análise de engenharia.

2.2.1 Relações básicas

Considera-se uma função “u”, a qual satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 u = b \quad \text{em } \Omega \quad (29)$$

onde b é considerado uma função conhecida.

De maneira similar feito para equação de Laplace feito na seção, aplicando a formulação do Método dos Resíduos Ponderados para deduzir as equações integrais básicas, temos:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (30)$$

que fazendo duas integrações por partes a partir da equação (30), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega - \int_{\Omega} b u^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (31)$$

É uma importante equação, pois é o ponto de partida para a aplicação do método dos elementos de contorno.

Utilizando a solução fundamental originalmente usada para a equação de Laplace, e agrupando todos os termos do contorno, obtém-se:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} b u^* d\Omega = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (32)$$

Embora a função b é conhecida a integral em Ω não introduz quaisquer novas incógnitas, o problema mudou na característica e agora precisamos efetuar uma integral de domínio, bem como as integrais de contorno. A constante c_i depende apenas da geometria do contorno no ponto i em consideração.

2.3 MÉTODO DE RECIPROCIDADE DUAL

O MEC não tem capacidade de simular problemas onde o termo b apresentado na equação de Poisson não seja nulo. Para mudar esse problema Brebbia e Nardini (1982) desenvolveram o Método de Reciprocidade. Esse método é usado para levar integrais de domínio ao contorno e transformando-a em uma equação integral somente com termos do contorno. Nas seções seguintes apresentaremos a formulação do MRD para o caso de potencial.

2.3.1 Desenvolvimento matemático de MRD para a Equação de Poisson

Considere a equação $\nabla^2 u = b$ onde o potencial u pode ser escrito como:

$$u = \tilde{u} + \hat{u} \quad (33)$$

onde $\tilde{u}$ é a solução homogênea e $\hat{u}$ é a solução particular da equação. Desse modo é válido mostrar:

$$\nabla^2 \hat{u} = b \quad (34)$$

Assim a integral de domínio fica:

$$\int_{\Omega} b u^* d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}) u^* d\Omega \quad (35)$$

Integrando por partes e considerando a solução fundamental, obtém-se o resultado:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b u^* d\Omega &= \int_{\Omega} (\Delta^2 \hat{u}) u^* d\Omega = \int_{\Omega} \hat{u} ((\Delta^2 u^*)) d\Omega + \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \\ &= -c_i \hat{u}_i + \int_{\Gamma} u^* \hat{q} d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \hat{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (36)$$

Geralmente é difícil encontrar uma solução que satisfaça essa equação, particularmente no caso de problemas não lineares ou dependente do termo. O MRD propõe o uso de uma série de soluções específicas $\hat{u}_j$ em vez de uma única função u_j . Considerando que se tem N nós no contorno e L nós internos, tem-se então $N+L$ valores de $\hat{u}_j$.

2.3.2 Equação matricial de contorno

A seguinte aproximação para b é considerada (Partridge *et al* 1992)

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (37)$$

onde α_j é um vetor de constantes desconhecidos que será determinado e f_j são funções de aproximação. A solução particular de $\hat{u}_j$ e a função de aproximação f_j devem atender à relação:

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (38)$$

Assim a integral do problema pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} b u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (39)$$

Integrando por partes e substituindo na equação integral de contorno inicialmente desenvolvida, obtém-se:

$$c_i \hat{u}_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \equiv \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_{ij} \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (40)$$

O termo $\hat{q}_j$ é definido como $\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial n}$, onde n é o vetor normal ao contorno Γ , e tem sua expansão da seguinte forma:

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (41)$$

Observe que a equação (40) não envolve mais a integral de domínio, pois o termo b foi substituído por integrais de contorno similares, que foi feito aproximando b pelo uso da equação (39) e usando a técnica dos resíduos ponderados para expressar os dois lados da equação resultante com integrais de contorno.

Agora é escrever a equação (40) de forma discretizada com somatórios sobre os elementos de contorno, substituindo as integrais. Dessa forma tem-se um nó i qualquer do contorno a seguinte equação:

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u^* \hat{q}_j d\Gamma \right) \quad (42)$$

Nota-se que se $\hat{u}$ e $\hat{q}$ são funções conhecidas, visto que f é definido não há necessidade de aproximar suas variações para cada elemento do contorno usando funções de interpolações e valores nodais, como foi feito para u e q . Entretanto fazer isso resulta que as mesmas matrizes H e G , já apresentadas, podem ser utilizadas nos dois lados da equação.

Fazendo os somatórios e aplicando a equação (42) em todos os nós do contorno, pode-se expor seus termos em forma de matriz. Igualmente se considera que os vetores $\hat{u}_j$ e $\hat{q}_j$ seja uma coluna das matrizes $\hat{U}$ e $\hat{Q}$ respectivamente. Deste modo podemos escrever a seguinte equação:

$$Hu - Gq = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (43)$$

A equação (43) é a base para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual e envolve a discretização apenas no contorno.

2.3.3 O vetor α

Um vetor na equação (43) agora vai ser considerado. Ao tomar o valor b em $N+L$ pontos diferentes um conjunto de equações com (37) está sendo obtido, e pode ser obtido em forma de matriz como:

$$b = F\alpha \quad (44)$$

em que cada coluna de F equivale num vetor de f_{ij} compondo os valores da função de aproximação a ser determinado.

Assim a função b pode ser invertida para encontrar α :

$$\alpha = F^{-1}b \quad (45)$$

O lado direito da equação (37) é, portanto, um vetor conhecido:

$$Hu - Gq = d \quad (46)$$

onde

$$d = (H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha \quad (47)$$

Verifica que o vetor d pode ser obtido diretamente pela multiplicação de matrizes conhecidas e vetores. Aplicando as condições de contorno na equação (46), essa equação se reduz a forma:

$$Ax = y \quad (48)$$

onde x possui N valores do contorno de u e q .

2.3.4 Diferentes expansões de f

A solução particular $\hat{u}$ e sua derivada normal $\hat{q}$, que tem função de aproximação similar f usada na análise de MRD, não são limitadas pela formulação exceto quando a matriz resultante F seja não singular (Partridge *et al* 1992)

Para determinar essas funções propõe-se uma expansão para f e então se calcula $\hat{u}$ e $\hat{q}$, usando as equações (38) e (41) respectivamente.

Nardine e Brebbia, criadores do método, propuseram os seguintes tipos de funções de f :

1. Elementos de triângulo de pascal
2. Séries trigonométricas e
3. A função de distância r usada na definição da solução fundamental.

Diversos tipos de funções podem ser propostos. A função *r* foi adotada primeiro por Nardini e Brebbia (1982) e depois pela maioria dos pesquisadores por ser a escolha mais simples e muito precisa (Partridge *et al* 1992).

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Foi implementado um programa utilizando a linguagem MATLAB para tratar problemas de potencial, utilizando MEC/MRD. O MATLAB vem de *Matrix Laboratory* devido ao programa ser destinado a fazer cálculos com matrizes. É um software que apresenta sua própria linguagem de programação, cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento. Esse sistema possibilita o desenvolvimento de muitos programas numéricos em pouco tempo com facilidade e precisão em comparação com que se gastaria para escrever um programa similar em linguagem tradicional com Fortran, C/C++, Visual Basic, etc.

O programa desenvolvido permite o processamento da análise e a obtenção dos resultados para temperatura e fluxo. Na Figura 1 o fluxograma mostra como o código foi organizado para análise dos problemas de potencial via MEC/MRD.



Figura 1 - Estrutura modular para o programa BEMPOTENTIAL

O programa é composto por oito módulos que contém todas as sub-rotinas desenvolvidas. A função de cada módulo é apresentado a seguir:

BEMPOTENTIAL

Essa rotina faz a declaração do nome do programa. É o código principal que irá gerenciar cada um dos arquivos da sequência. Ele diz a ordem que esses arquivos devem ser chamados e serve para organizar o código. A seguir é apresentado um fragmento dessa rotina.

```
clear all
clc
%% 01 ARQBEM - Ler entrada de dados
filename = 'DADOS_DATA.txt';
[NN,NE,L,X,Y,KODE,CON,U,Q,LE,DADOS] = ARQBEM(filename);
%% 02 ALFA - Cálculo do vetor Alfa
ALPHA = ALFA(NN,L,X,Y);
%% 03 ASSEM - Cálculo das matrizes G e H: Aplica condições de contorno
[GG,HH,XY,A] = ASSEM(NN,NE,L,NI,POEI,FDEP,X,Y,LE,CON,KODE,Q,U);
%% 04 VETORD - Cálculo do vetor Adicional D
D = VETORD (NN,NE,L,X,Y,LE,CON,ALPHA,HH,GG);
%Soma XY e D
for I=1:NN
    XY(I)= XY(I)+D(I);
end
%% 05 SOLVER - Resolver para valores do contorno
NNS = NN;
XYS = XY;
AS = A;
SOLXY = SOLVER(NNS,XYS,AS);
%SOLXY = A\XY;
for I= 1:NN
    KK = KODE (I);
    if((KK == 0) || (KK == 2))
        U(I) = SOLXY(I);
    else
        Q(I) = SOLXY(I);
    end
end
%% 06 INTERM - Calcular os valores dos nós internos
SOLU= SOLINTER (NN,D,Q,HH,GG,NE,L);
```

ARQBEM

Essa rotina faz a leitura dos dados referentes ao problema e condições de contorno (temperatura e fluxo). Solicita esses dados diretamente do prompt do MATLAB em um arquivo chamado DADOS_DAT.txt que é utilizado para gravar os dados do problema. Um fragmento da rotina é apresentado a seguir.

```

% 01 _ Entrada de dados
function [NN,NE,L,X,Y,KODE,CON,U,Q,LE,DADOS] = ARQBEM(filename)
% filename = 'DADOS_DATA.txt';
DADOS = importdata(filename);
%% 1. Linha de dados globais:
% Número de nós do contorno (NN)
% Número de elementos do contorno (NE)
% Número de nós internos (L)
NN = DADOS(1,1);
NE = DADOS(1,2);
L = DADOS(1,3);
%% 2. Linhas NN + L para definir coordenadas de cada nó. Os nós de fronteira são no sentido
horário
% X = x coordenadas de nós
% Y = y coordenadas de nós
X = DADOS(2:(NN+L+1),1);
Y = DADOS(2:(NN+L+1),2);
%% 3. Linhas para definir condições de contorno. Um tipo de condição de contorno e um valor por
linha
% KODE = Tipo de condição de contorno:
%   KODE(i) = 0 --> livre
%   KODE(i) = 1 --> U conhecidos no ponto i
%   KODE(i) = 2 --> Q conhecidos no ponto i
% VAL = Valor da condição de contorno
KODEC = DADOS((NN+L+2):length(DADOS),1);
VALC = DADOS((NN+L+2):length(DADOS),2);

```

ALFA

O tipo de função a ser utilizado deve ser fornecido pelo usuário e incorporado. O usuário define o tipo de função b, conforme um dos seguintes tipos:

- $b = \text{constante}$;
- $b = x^2$
- $b = \text{constante} - x^2$

A matriz F é então construída e um α é obtido por eliminação de Gauss usando a sub-rotina Solver. O vetor α é armazenado na matriz ALPHA.

ASSEM

Esta rotina faz a montagem das matrizes H e G para formar o sistema $Hu = Gq$ (Equação 24). Após aplicação das condições de contorno, o sistema é reduzido a $Ax = y$ (Equação 25).

VETORD

Esta rotina é responsável pela obtenção do vetor d do MRD, dado pela equação (47), $(H\hat{U} - G\hat{Q})\alpha$. As matrizes G e H já estão disponíveis, uma vez que foram armazenadas durante a sub-rotina ASSEM.

SOLVER

Esta é uma rotina padrão de resolução de sistemas, pode ser extraída diretamente dos *solvers* do MATLAB, ou por meio de um solver implementado baseado na Eliminação Gaussiana.

SOLINTER

Essa rotina calcula os resultados em pontos internos uma vez que os valores de contorno estão disponíveis. Desde que H e G foram armazenadas e o vetor D contém os resultados de MRD, o processo é de simples multiplicação.

OUTPUT

Essa rotina imprime os resultados de temperatura e fluxo. É a rotina final a ser chamada no programa principal.

4 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA BEMPOTENTIAL

Para fins de calibrar o programa implementado será mostrado um exemplo clássico, devido a Partridge et.al (1992), onde aborda um problema da torção de Saint-Venant de uma seção elíptica. O modelo físico-geométrico da Elipse contém eixo maior $a = 2$ m e eixo menor $b = 1$ m, conforme apresentado na Figura 2a. Em seu modelo discretizado, ilustrado na Figura 2b, foram utilizados 16 elementos de contornos lineares e 17 pontos internos. As condições de contorno são todas de temperatura ($T = 0^\circ$) em todo o contorno.

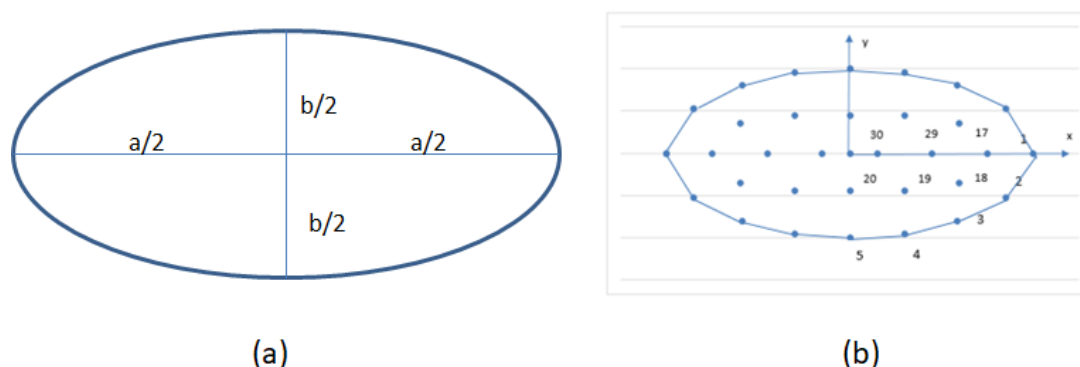


Figura 2 – Problema de torção Elíptica: a) Modelo físico-geométrico; b) Modelo discretizado.

Esse problema é orientado pela equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -2\theta \quad (49)$$

Onde G é o módulo de cisalhamento e θ é o ângulo de torção. A variável do problema é a função de tensão, tal que:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (50)$$

Definindo $u = \frac{v}{G\theta}$ a equação (49) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \quad (51)$$

que é o mesmo que a equação $\nabla^2 u = b$, com $b = -2$.

A equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (52)$$

Essa equação não só permite que as coordenadas dos nós do contorno da figura 2 seja gerado, mas também aparece na solução exata para qual $G = \theta = 1$ é dado por:

$$u = -0,8 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (53)$$

Assim, pode ser visto que a equação acima satisfaz a condição de contorno $u = 0$ em Γ . A equação pode ser verificada pela substituição em $\nabla^2 u = b$. A solução para q é obtido começando em:

$$q = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (54)$$

No caso de uma elipse, os cossenos de direção normal para qualquer ponto do contorno são dados por: $\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{x}{a}$ e $\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{y}{b}$ tal que:

$$q = -0,2(x^2 + 8y^2) \quad (55)$$

4.1 Resultados e discussões

A Tabela 1 apresenta resultados de fluxo para pontos do contorno obtidos pelo programa BEMPOTENTIAL e comparados com a solução exata, onde pode-se verificar os ótimos resultados, conforme ilustrado no gráfico da Figura 3. O erro de 14,9% nos pontos 1 e 9 podem ser melhorados com o uso de elementos quadráticos ou com uso de elementos descontínuos.

Tabela 1. Resultado de fluxo para torção de Elipse

Pontos do contorno	Coordenadas		FLUXO		
	X	Y	Programa BEMPOTENTIAL	Solução Exata	Erro (%)
1	2,00000	0,00000	-0,68079	-0,80000	14,90%
2	1,70571	-0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%
3	1,17880	-0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
4	0,59761	-0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
5	0,00000	-1,00000	-1,58851	-1,60000	0,72%
6	-0,59761	-0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
7	-1,17880	-0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
8	-1,70571	-0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%
9	-2,00000	0,00000	-0,68079	-0,80000	14,90%
10	-1,70571	0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%
11	-1,17880	0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
12	-0,59761	0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
13	0,00000	1,00000	-1,58851	-1,60000	0,72%
14	0,59761	0,95431	-1,53248	-1,52856	0,26%
15	1,17880	0,80784	-1,35918	-1,32209	2,81%
16	1,70571	0,52215	-1,02039	-1,01811	0,22%

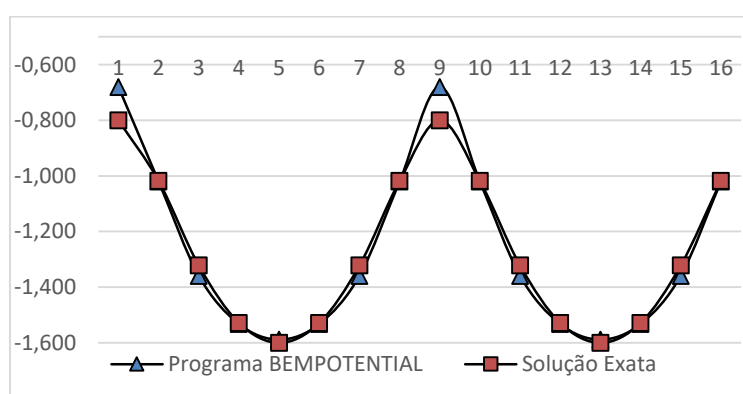


Figura 3. Resultados de fluxo em pontos do contorno.

A Tabela 2 apresenta resultados de temperaturas para pontos do interior obtidos pelo programa BEMPOTENTIAL e comparados com a solução exata, onde pode-se verificar os ótimos resultados, conforme ilustrado no gráfico da Figura 4.

Tabela 2. Resultado de temperatura para torção de Elipse

Pontos internos	Coordenadas		TEMPERATURA		
	X	Y	Programa BEMPOTENTIAL	Solução Exata	Erro (%)
17	1,50000	0,00000	0,34911	0,35000	0,26%
18	1,20000	-0,35000	0,41827	0,41400	1,03%
19	0,60000	-0,45000	0,57360	0,56600	1,34%
20	0,00000	-0,45000	0,64632	0,63800	1,30%
21	-0,60000	-0,45000	0,57360	0,56600	1,34%
22	-1,20000	-0,35000	0,41827	0,41400	1,03%
23	-1,50000	0,00000	0,34911	0,35000	0,26%
24	-1,20000	0,35000	0,41827	0,41400	1,03%
25	-0,60000	0,45000	0,57360	0,56600	1,34%
26	0,00000	0,45000	0,64632	0,63800	1,30%
27	0,60000	0,45000	0,57360	0,56600	1,34%
28	1,20000	0,35000	0,41827	0,41400	1,03%
29	0,90000	0,00000	0,64336	0,63800	0,84%
30	0,30000	0,00000	0,78944	0,78200	0,95%
31	0,00000	0,00000	0,80768	0,80000	0,96%
32	-0,30000	0,00000	0,78944	0,78200	0,95%

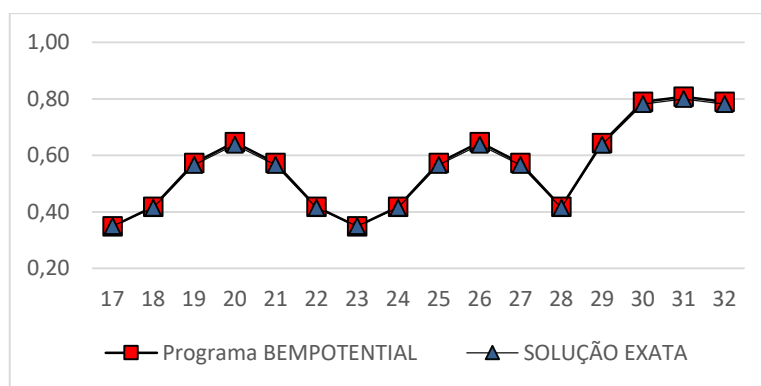


Figura 4. Resultados de temperatura em pontos internos.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo a utilização do método dos elementos de contorno com reciprocidade dual para tratar os termos não homogêneos da equação de Poisson. Comparando a resposta analítica e experimental do problema tratado no trabalho com a resposta numérica obtida utilizando o programa BEMPOTENCIAL, pode-se atestar a eficiência da técnica numérica, bem como validar o programa desenvolvido.

Este programa será adaptado a interface gráfica BEMLAB2D (Delgado Neto, 2017) para uso acadêmico em problemas analisados via método dos elementos de contorno e, em minha dissertação de mestrado, será analisada uma placa de argamassa fissurada submetida a uma fonte de calor para simularmos a distribuição de temperatura tanto na face da placa quanto em sua espessura, a fim de estudarmos sua influência na profundidade das fissuras.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer pelo apoio a esta pesquisa à: Ao PECC – Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil.

REFERÊNCIAS

- BREBBIA C.A. and DOMINGUEZ J. Boundary element - an introduction course. Computational Mechanics Publication, 1992.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUES, J. *Boundary elements: an introductory course*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company; Southampton: Computational Mechanics Publications; Boston: Computational Mechanics Publications, 1989.
- BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. & WROBEL, L. C., 1984, *Boundary Elements Techniques: Theory and Application*. Berlin, Springer-Verlag.
- DELGADO NETO, A. M.; GOMES, G.; GUIMARÃES, D.C.. BEMLAB2D: Graphical Interface For Modeling, Viewing And Analysis With Boundary Element - An Application In Elastostatic Problems. In: XXXVII Iberian Latin American Congress On Computational

Methods In Engineering, 2016, Brasília. XXXVII Iberian Latin American Congress On Computational Methods In Engineering, 2016.

D. Nardini e C.A. Brebbia, " A New Approach for Free Vibration Analysis using Boundary Elements", Boundary Element Methods in Engineering, (Ed. C. A. Brebbia), Springer-Verlag, Berlin e N. York, pp. 312-326, (1982).

GOMES, G. "Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto". Universidade de Brasília - UnB. Brasília, p. 165. 2006. (E.TD- 002A/06).

HESS,J.L., e SMITH,A.M., "Calculation of potential flow about arbitrary bodies", Pergamon Press, Lodon,1967.

PARTRIDGE, P. W., BREBBIA, C. A. & WROBEL, L. C., 1992, The Dual Reciprocity Boundary Element Method. London, Computational Mechanics Publications.

RIZZO, F.J., " *An Integral Aproach to Boundary Value Problems of Classical Elastototatics.* " Q. Appl. Math., vol 25, pp.83-85, 1967.

TELLES,J.C.F e BREBBIA, C.A., "Elastoplastic boundary elemnt analysis.", in proc.Europe,pp.403-434,Springer-Verlang Berlin,1980