



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO FRATURAMENTO HIDRÁULICO EM DOMÍNIOS MULTIFISSURADOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTO RNO DUAL

Heider C. Andrade

heider.andrade@usp.br

Edson D. Leonel

edleonel@sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas.

Avenida Trabalhador São Carlense, 400, Centro. CEP 13.566-590, São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. Este estudo apresenta um modelo numérico para a análise da propagação de fissuras cujas faces estejam sujeitas a uma pressão interna, situação típica de problemas de fraturamento hidráulico. Os domínios de análise são considerados bidimensionais, homogêneos, isotrópicos e podem conter múltiplas fissuras. Os materiais são admitidos como frágeis ao fraturamento e a teoria da Mecânica da Fratura Elástico-Linear é empregada. O comportamento mecânico é simulado a partir da formulação do Método dos Elementos de Contorno Dual, no qual são aplicadas as equações integrais singular e hipersingular. Os núcleos singulares são avaliados conforme o método de subtração de singularidade. Para melhorar a precisão da integração de núcleos quase-singulares, a transformação polinomial de Telles (1987) é utilizada. Os fatores de intensidade de tensão são determinados via integral J , sendo considerada a parcela proveniente da pressão sobre as faces. A direção de crescimento e o fator de intensidade de tensão equivalente nas pontas são definidos por meio do critério da máxima tensão circunferencial. Os resultados obtidos para os exemplos considerados apresentam adequada correspondência com as respostas de referência. Além disso, o modelo desenvolvido é capaz de representar satisfatoriamente a interação entre fissuras em problemas com domínios multifissurados, incluindo coalescência.

Palavras-chave: Mecânica da Fratura Elástico-Linear, Método dos Elementos de Contorno Dual, Fraturamento hidráulico, Coalescência.

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC,
Brazil, November 5-8, 2017.

1 INTRODUÇÃO

O fraturamento hidráulico (ou *fracking*) é uma técnica não-convencional largamente utilizada pela indústria petrolífera para a estimulação da produção de poços de extração de gás natural e óleo. Esta técnica é especialmente aplicada em poços que possuem níveis de decaimento de produção (Economides et al., 2011). O *fracking* consiste em injetar um fluido de fraturamento, composto normalmente por água, areia e produtos químicos, sob alta pressão em um poço previamente perfurado na rocha reservatório com o objetivo de induzir a propagação de fissuras e, conseqüentemente, criar caminhos para viabilizar o fluxo e produção de hidrocarbonetos. A importância maior atribuída ao fraturamento hidráulico está relacionada ao custo operacional de execução em poços já fraturados. Eshkalak et al. (2014) explicam que é mais vantajoso, financeiramente, estimular um poço já existente do que perfurar um novo.

Os reservatórios de combustíveis fósseis líquidos e gasosos são usualmente compostos por rochas sedimentares com alta permeabilidade, denominadas rochas reservatório, das quais os hidrocarbonetos são extraídos com o emprego de técnicas convencionais. Entretanto, em situações nas quais os combustíveis fósseis estejam depositados em rochas com baixa permeabilidade, a extração não é economicamente viável com o uso dessas técnicas. Nesses casos, a utilização do fraturamento hidráulico mostra-se atrativo, uma vez que promove o aumento da permeabilidade pelo fraturamento da matriz rochosa e permite acesso aos conteúdos antes inacessíveis.

A primeira aplicação experimental do fraturamento hidráulico foi realizada em 1947 pela companhia Stanolind Oil & Gas Co em um campo de exploração de gás em Kansas, EUA. As primeiras aplicações da técnica tiveram como objetivo o aumento da produtividade em campos de exploração já existentes. Em 1997 houve uma grande revolução no emprego do *fracking*, quando a companhia Michell Energy, atualmente Devon Energy, passou a empregar o fraturamento hidráulico com sucesso para a extração de depósitos de gás natural em folhelho betuminoso no campo de exploração de Barnett, nos EUA. Com a aquisição da Mitchell Energy pela Devon, em 2001, a utilização desse tipo de fluido foi aliada à técnica de poços horizontais, especialidade da Devon, o que promoveu a maior eficiência na extração de hidrocarbonetos de folhelho betuminoso por solicitar a rocha ao longo dos seus planos horizontais de estratificação (Cahoy et al., 2013).

A partir daí, houve uma crescente exploração de hidrocarbonetos provenientes de folhelho betuminoso em países como EUA, Canadá e China com o emprego do fraturamento hidráulico. Isso estimulou o desenvolvimento de novos estudos para a melhor compreensão e previsão dos fenômenos que ocorrem durante a aplicação da técnica. Para tanto, a utilização de métodos numéricos se mostrou essencial, visto que o fraturamento hidráulico é uma técnica complexa e que envolve o acoplamento de pelo menos três processos: a solicitação mecânica do fluido de fraturamento sobre as faces da fissura; o escoamento do fluido ao longo fissura; e o crescimento e interação das fissuras. Pela sua maior difusão no meio técnico, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e, em especial, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) são amplamente utilizados nas análises de *fracking*. Com essa abordagem, podem ser destacados os estudos realizados por Gordeliy e Peirce (2013), Gupta e Duarte (2014) e Lecampion (2009). Já o trabalho de Hattori et al. (2016) fornece uma visão

geral sobre as possíveis aplicações da modelagem numérica em problemas de fraturamento hidráulico.

Outro método numérico com grande apelo para as análises de problemas de fratura é o Método dos Elementos de Contorno, particularmente a sua formulação dual (MECD). Dentre as vantagens observadas do método na solução desse tipo de problema destacam-se: a definição automática do caminho de propagação no decorrer da análise; a discretização apenas do contorno da estrutura, o que facilita o processo de remalhamento e de alteração do sistema de equações algébricas durante o crescimento das fissuras; e a precisa avaliação dos campos internos próximos às pontas, o que é fundamental para correta verificação da estabilidade à propagação. O MECD foi originalmente proposto no trabalho de Hong e Chen (1988) e é útil na geração de um sistema de equações determinado mesmo com pontos de colocação situados na mesma posição, como ocorre, por exemplo, na discretização das faces opostas de uma fissura. Para tanto, as formulações singular e hipersingular do Método dos Elementos de Contorno são utilizadas separadamente para cada um dos pontos coincidentes. Portela et al. (1992) foram os primeiros a utilizar essa estratégia de forma eficiente na análise de problemas de fratura.

Neste trabalho, o MECD é utilizado para a análise numérica da propagação de fissuras em problemas de fraturamento hidráulico. São considerados domínios bidimensionais, homogêneos, compostos por materiais isotrópicos, os quais podem conter múltiplas fissuras. Os materiais são admitidos com comportamento frágil em relação ao fraturamento e, portanto, as análises de propagação são realizadas a partir dos conceitos da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL). O escoamento do fluido de fraturamento ao longo das fissuras não é considerado, sendo admitido um regime de pressão hidrostática sobre faces. Dois exemplos são apresentados para demonstrar a eficácia do modelo proposto na avaliação dos caminhos de crescimento da interação entre fissuras, incluindo a simulação de coalescência.

2 FORMULAÇÃO DO MECD

Seja um domínio bidimensional sujeito a um estado estático de carregamento, com forças de volume desprezadas e composto por um material homogêneo com comportamento elástico-linear. As componentes de deslocamento em determinado ponto fonte f no contorno Γ podem ser obtidas a partir das componentes de deslocamento u_j e de força de superfície p_j dos pontos ao longo do contorno c , denominados pontos campo, por meio da equação integral singular expressa por:

$$C_{ij}(f)u_j(f) + C_{ij}(\bar{f})u_j(\bar{f}) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(f, c)u_j(c)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(f, c)p_j(c)d\Gamma \quad (1)$$

em que U_{ij}^* e P_{ij}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais de Kelvin em deslocamento e em força de superfície, que dependem da distância r entre o ponto fonte f e o ponto campo c ; C_{ij} é o termo livre, que é igual a $\delta_{ij}/2$ caso o ponto fonte esteja em um contorno suave, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. O ponto $\bar{f}$ refere-se a um ponto fonte potencial que ocupa a mesma posição de f , porém está em uma superfície distinta. Essa situação ocorre, por

exemplo, para pontos nas faces opostas de uma fissura. Quando o ponto f não possui um correspondente, o termo relacionado a $\bar{f}$ na Eq. (1) é nulo.

As componentes de força de superfície no ponto f também podem ser determinadas a partir dos campos ao longo do contorno por meio da equação integral hipersingular. Para o ponto fonte em contorno suave, essa equação é dada por:

$$\frac{1}{2} [p_j(f) - p_j(\bar{f})] + n_k(f) \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(f, c) u_i(c) d\Gamma = n_k(f) \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(f, c) p_i(c) d\Gamma \quad (2)$$

em que D_{ijk}^* e S_{ijk}^* são soluções fundamentais obtidas a partir das derivadas de U_{ij}^* e P_{ij}^* , respectivamente, e também são funções de r . Já n_k são as componentes do vetor unitário normal ao contorno no ponto f .

Cuidado especial deve ser tomado para a avaliação das integrais presentes na Eq. (1) e na Eq. (2), uma vez que as soluções fundamentais presentes em seus núcleos possuem diferentes tipos de singularidade quando $r \rightarrow 0$. A solução U_{ij}^* apresenta uma singularidade fraca de ordem $o(\ln r)$; as soluções P_{ij}^* e D_{ijk}^* possuem uma singularidade forte de ordem $o(r^{-1})$; já S_{ijk}^* contém uma hipersingularidade de ordem $o(r^{-2})$. Dessa forma, os núcleos com singularidade forte e hipersingular devem ser avaliados no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita de Hadamard, respectivamente.

Neste trabalho, para a avaliação numérica da Eq. (1) e da Eq. (2) no âmbito do MECD, o contorno da estrutura é inicialmente subdividido em elementos isoparamétricos com grau de aproximação polinomial qualquer. Os elementos de contorno contêm os pontos de colocação, cujos graus de liberdade são adotados como parâmetros nas aproximações das grandezas dentro de um elemento. Tais pontos são tomados como os pontos fonte das formulações integrais apresentadas na Eq. (1) e na Eq. (2). A equação integral hipersingular é utilizada para os pontos de colocação de uma das faces das fissuras, enquanto a equação integral singular é aplicada para os pontos de colocação da face oposta e do contorno externo.

A integração numérica ao longo de um elemento distante do ponto fonte é realizada por meio da quadratura de Gauss-Legendre padrão, uma vez que as integrais envolvidas são regulares. Já quando o ponto fonte está próximo ao elemento integrado, as integrais tornam-se quase-singulares. Para melhorar a precisão da integração nessa situação, a transformação polinomial de terceiro grau proposta por Telles (1987) é utilizada. Nela, os pontos de Gauss ao longo do elemento são deslocados no sentido do ponto fonte, o que resulta em uma melhor resposta numérica. Por fim, caso o elemento integrado contenha o ponto fonte, as integrais envolvidas são singulares. Nesse caso, o método de subtração de singularidade é empregado (Aliabadi, 2002). Nesse método, ao núcleo de integração com algum tipo de singularidade é subtraído e somado outro núcleo com a mesma ordem de singularidade, dando origem a uma integral regular e a uma nova integral singular com resposta analítica conhecida. A integral regular pode ser avaliada pela quadratura de Gauss-Legendre padrão. Já a integral analítica fornece o valor principal de Cauchy ou a parte finita de Hadamard do núcleo original, a depender o tipo de singularidade tratada.

Para garantir que os pontos de colocação se localizem em um contorno suave e também para impor descontinuidades nas condições de contorno entre elementos adjacentes, são

utilizados elementos descontínuos ou semi-contínuos. Nesses elementos, os dois, ou apenas um dos pontos de colocação da extremidade, são deslocados para o interior do elemento, respectivamente. Além disso, para a existência da parte finita de Hadamard na equação integral hipersingular, é necessário que a primeira derivada do deslocamento nos pontos de colocação seja contínua, o que é garantido com o uso de elementos descontínuos. Portanto, as faces das fissuras na qual essa formulação é aplicada, bem como a face oposta correspondente, são discretizadas com esse tipo de elemento.

Com a aplicação da Eq. (1) ou da Eq. (2) para todos os pontos de colocação utilizados na discretização do corpo, o seguinte sistema algébrico de equações é obtido:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (3)$$

em que $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são matrizes $2n \times 2n$ contendo coeficientes de influência obtidos a partir dos núcleos P_{ij}^* e S_{ijk}^* e dos núcleos U_{ij}^* e D_{ijk}^* , respectivamente; $\mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$ são vetores $2n$ com as componentes de deslocamento e força de superfície nos pontos de colocação; e n é o número de pontos de colocação utilizado na discretização do contorno.

O sistema final de equações pode ser obtido pela troca conveniente entre as colunas das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ para a imposição das condições de contorno do problema. Com esse procedimento, os valores incógnitos no contorno são isolados no primeiro membro da equação, enquanto os valores conhecidos são isolados no segundo, resultando em:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{f} \quad (4)$$

sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes contendo valores de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores com as grandezas desconhecidas e conhecidas no contorno, respectivamente, e $\mathbf{f}$ é o vetor resultante da multiplicação de $\mathbf{B}$ por $\mathbf{y}$.

Resolvendo o sistema linear da Eq. (4), os valores desconhecidos no contorno são obtidos. Conhecidos os valores no contorno, as componentes de deslocamento e de tensão em um ponto f interno ao domínio podem ser determinadas a partir da aplicação das identidades de Somigliana apresentadas a seguir:

$$u_i(f) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(f, c) p_j(c) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(f, c) u_j(c) d\Gamma \quad (5)$$

$$\sigma_{jk}(f) = \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(f, c) p_i(c) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(f, c) u_i(c) d\Gamma \quad (6)$$

As integrais na Eq. (5) e na Eq. (6) são regulares e podem ser avaliadas numericamente sem dificuldades. Caso elas se tornem quase-singulares (ponto f próximo ao contorno), o procedimento descrito por Telles (1987) é utilizado para melhorar a precisão da resposta.

3 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO-LINEAR

Em materiais com comportamento frágil, a formação de novas superfícies de fissura se dá sem a dissipação significativa de energia relacionada à evolução de deformações inelásticas. Nesses materiais, a zona de processos inelásticos (ZPI) presente na ponta apresenta dimensão

desprezável em relação ao tamanho da descontinuidade e às demais dimensões características da estrutura. Desse modo, a maior parte do corpo apresenta comportamento elástico, inclusive em regiões próximas às pontas e fora da ZPI. Nessas situações, os campos singulares de tensão previstos pela MFEL podem ser utilizados para estimar a sollicitação nas pontas. Esses campos são associados aos chamados fatores de intensidade de tensão (FIT), que por sua vez são utilizados para a verificação da estabilidade à propagação. Os FIT estão associados aos três modos básicos de sollicitação da fissura, que são caracterizados pelos deslocamentos relativos entre as faces (Fig. 1). Toda sollicitação na ponta de uma fissura pode ser decomposta em uma combinação desses modos. Neste trabalho serão tratados apenas problemas bidimensionais e, portanto, apenas os modos I e II serão abordados.

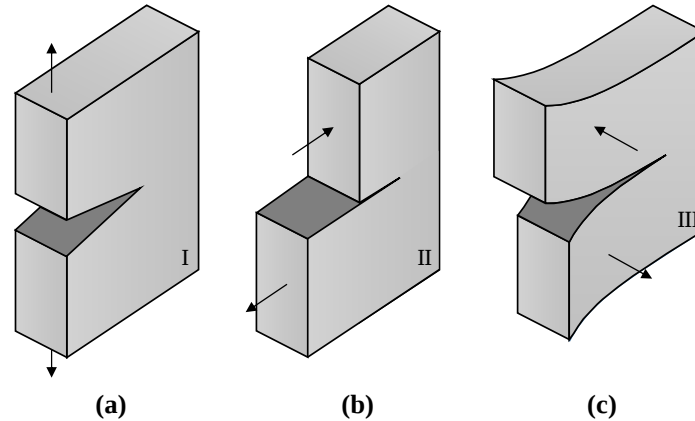


Figura 1 - Representação dos modos básicos de fratura: (a) modo de abertura (modo I), (b) modo de deslizamento (modo II) e (c) modo de rasgamento (modo III).

A extração dos FIT nos problemas deste trabalho é realizada por meio da integral J. Para materiais com comportamento elástico-linear, o valor dessa integral é equivalente à taxa de liberação de energia de Griffith (1921), que por sua vez está relacionada aos FIT por meio da seguinte expressão:

$$J = G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} \quad (7)$$

em que J é o valor da integral J, G é taxa de liberação de energia na ponta e E^* é igual ao módulo de elasticidade longitudinal E para um estado plano de tensão e igual a $E/(1-\nu^2)$ para um estado plano de deformação, sendo ν o coeficiente de Poisson.

A integral J foi originalmente proposta por Rice (1968), sendo avaliada ao longo de um caminho fechado arbitrário S que engloba a ponta da fissura. O caminho S é composto por um contorno Γ situado no domínio que contém a descontinuidade e pelos contornos Γ^s e Γ^i presentes, respectivamente, nas faces superior e inferior da fissura (Fig. 2a). A expressão da integral J independente de caminho obtida por Rice (1968), considerando o sistema cartesiano local em relação à ponta da fissura, é mostrada na Eq. (8).

$$J = \int_S (W n_1 - p_j u_{j,1}) ds \quad (8)$$

sendo W a densidade de energia de deformação obtida por $\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, p_j as componentes da força de superfície ao longo de S dadas por $\sigma_{ij}n_i$, u_j as componentes de deslocamento ao longo de S e n_1 a componente do vetor unitário normal ao caminho na direção x_1 .

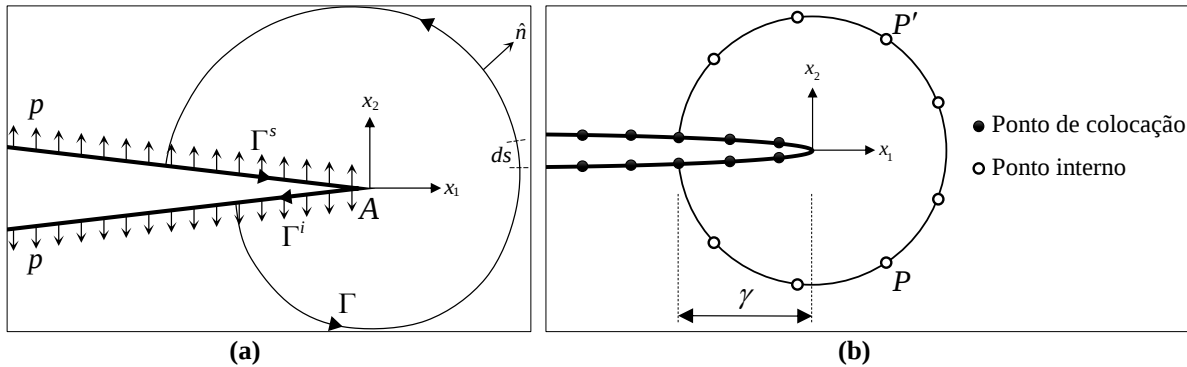


Figura 2 - Representação do (a) caminho arbitrário para a avaliação da integral J e (b) caminho utilizado neste trabalho.

Nas análises de *fracking* deste trabalho, as faces das fissuras estão submetidas a uma pressão com magnitude constante igual a p . Dessa forma, a avaliação da integral J nesse caso pode ser realizada conforme Karlsson e Bäcklund (1978). Para tanto, cada um dos trechos que compõem o caminho S são analisados separadamente. Consequentemente, a expressão da integral J mostrada na Eq (8) pode ser decomposta em três parcelas, conforme:

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds + \int_{\Gamma^s} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds + \int_{\Gamma^i} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds \quad (9)$$

Considerando o referencial local indicado na Fig. 2a e o regime de pequenos deslocamentos, as seguintes relações podem ser escritas:

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \text{ e } n_1 = 0 \text{ para } \Gamma^i \text{ e } \Gamma^s \\ p_2 &= p \text{ e } ds = dx_1 \text{ para } \Gamma^s \\ p_2 &= -p \text{ e } ds = -dx_1 \text{ para } \Gamma^i \end{aligned} \quad (10)$$

Substituindo as relações da Eq. (10) na Eq. (9), obtém-se:

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds - p \left(\int_{-\gamma^s}^0 u_{2,1} dx_1 + \int_0^{-\gamma^i} u_{2,1} dx_1 \right) \quad (11)$$

em que γ^s é a distância da ponta ao ponto de colocação correspondente ao início do caminho Γ^s e γ^i é a distância da ponta ao ponto de colocação correspondente ao final do caminho Γ^i .

Pelo teorema fundamental do cálculo, o segundo termo do lado direito da Eq. (11) pode ser reescrito como:

$$J = \underbrace{\int_{\Gamma} (Wn_1 - p_j u_{j,1}) ds}_{J_{\Gamma}} + \underbrace{p(u_2(-\gamma^s) - u_2(-\gamma^i))}_{J_p} \quad (12)$$

Assim, na situação de faces de fissuras submetidas a uma pressão interna, a integral J é obtida a partir da composição de duas parcelas: J_{Γ} , determinada a partir da integração ao longo do caminho Γ , e J_p , proveniente da pressão p aplicada sobre as faces.

Para a determinação numérica da integral J neste estudo, o caminho Γ é admitido como circular e centrado na ponta. Ele inicia em um ponto de colocação da discretização de uma das faces da fissura e termina no ponto de colocação correspondente na face oposta (Fig. 2b). O caminho não deve interceptar nenhuma outra fissura ou o contorno externo. Para que essas condições sejam satisfeitas, um esquema adaptativo é utilizado para ajustar o tamanho do raio. Com a utilização desse caminho, o termo J_{Γ} pode ser avaliado numericamente no âmbito do MECD. Para tanto, um conjunto de pontos internos é disposto simetricamente em relação ao eixo da fissura ao longo de Γ . Após o problema mecânico ser analisado via MECD, os deslocamentos e as tensões dos pontos internos são obtidos em uma fase de pós-processamento com a aplicação da Eq. (5) e da Eq. (6), respectivamente. Em seguida, o vetor de deslocamento e o estado de tensão para cada um dos pontos internos são rotacionados para um sistema de coordenadas referenciado à ponta da fissura, conforme representado na Fig. 2b. Para realizar a decomposição de modos em problemas de solitação em modo misto, o esquema proposto por Kitagawa et al. (1978) é utilizado. Nele, as componentes de deslocamento e de tensão ao longo do caminho de integração são separadas em suas parcelas simétricas e antissimétricas por meio das seguintes relações:

$$u_j = u_j^I + u_j^{II} \quad (13)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \quad (14)$$

em que os sobrescritos I e II indicam, respectivamente, as parcelas simétricas (relacionadas ao modo I) e antissimétricas (relacionadas ao modo II). Tais parcelas podem ser obtidas a partir da utilização dos valores dos campos em pontos simétricos em relação ao eixo da fissura (pontos P e P' na Fig. 2b) por meio das seguintes equações:

$$u_j^I(P) = \frac{1}{2} [u_j^P + u_j^{P'} (1 - 2\delta_{2j})] \quad u_j^{II}(P) = \frac{1}{2} [u_j^P - u_j^{P'} (1 - 2\delta_{2j})] \quad (15)$$

$$\sigma_{ij}^I(P) = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}^P + \sigma_{ij}^{P'} (2\delta_{ij} - 1)] \quad \sigma_{ij}^{II}(P) = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}^P - \sigma_{ij}^{P'} (1 - 2\delta_{ij})] \quad (16)$$

em que os índices P e P' indicam a qual ponto as componentes estão relacionadas.

Com a utilização das relações mostradas na Eq. (15) e na Eq (16) na Eq. (12), a integral J é decomposta em dois termos:

$$J = J^I + J^{II} \quad (17)$$

com:

$$J^I = \int_{\Gamma} (W^I n_1 - p_j^I u_{j,1}^I) ds + J_p \quad (18)$$

$$J^{II} = \int_{\Gamma} (W^{II} n_1 - p_j^{II} u_{j,1}^{II}) ds \quad (19)$$

Conforme mostrado na Eq. (18) e na Eq. (19), o termo J_p modifica apenas o termo da integral J referente ao modo I, visto que a sollicitação gerada pela pressão p é exclusiva desse modo de fratura. Pelo caminho de integração adotado, tem-se que $\gamma^s = \gamma^i = \gamma$ (ver Fig. 2b) e, portanto, J_p é dado simplesmente por:

$$J_p = p w(\gamma) \quad (20)$$

em que $w(\gamma)$ é a abertura normal da face da fissura avaliada no par de pontos de colocação a uma distância γ da ponta.

Discretizando Γ em elementos com uma aproximação polinomial, as integrais na Eq. (18) e na Eq. (19) podem ser calculadas numericamente utilizando a quadratura Gauss-Legendre. Com isso, os valores J^I e J^{II} são determinados. Cada uma dessas parcelas se relaciona exclusivamente a um dos FIT por meio da Eq. (7). Assim, K_I e K_{II} podem ser obtidos por meio das seguintes expressões:

$$K_I = \sqrt{E^* J^I} \quad (21)$$

$$|K_{II}| = \sqrt{E^* J^{II}} \quad (22)$$

O valor de K_I é sempre positivo e pode ser determinado diretamente da Eq. (21). Já da Eq. (22) obtém-se apenas a magnitude de K_{II} . O sinal é positivo se o deslocamento ao longo do eixo x_1 da face superior for maior que o da face inferior, e negativo no caso contrário.

Com os valores determinados de K_I e K_{II} , uma sollicitação equivalente, representada por K_{eq} , pode ser estabelecida a partir de algum critério. Neste trabalho, o critério da máxima tensão circunferencial proposto por Erdogan e Sih (1963) é utilizado. Nele, assume-se que a fissura irá crescer na direção θ_p , perpendicular à direção da máxima tensão circunferencial na ponta. Essa direção pode ser determinada a partir dos campos de tensão assintóticos definidos pela MFEL, sendo dada por:

$$\theta_p = \sin^{-1} \left(\frac{K_I K_{II} - 3K_{II} \sqrt{8K_{II}^2 + K_I^2}}{9K_{II}^2 + K_I^2} \right) \quad (23)$$

Finalmente, o valor de K_{eq} pode ser determinado a partir de θ_p conforme a equação seguinte:

$$K_{eq} = \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_p) \right] \quad (24)$$

Caso o valor de K_{eq} calculado para determinada ponta supere a resistência ao fraturamento do material K_{Ic} , também denominada tenacidade, há propagação da fissura.

4 TÉCNICA NUMÉRICA DE SOLUÇÃO

Após a construção das matrizes **H** e **G** pela aplicação das respectivas equações integrais aos pontos de colocação da discretização, inicia-se o processo de obtenção da resposta mecânica da estrutura submetida ao *fracking*. Tal processo é dividido em duas etapas de solução. A primeira corresponde à solução da estrutura sob ação exclusiva das condições de contorno externas, conforme representado na Fig. 3a. Essa etapa tem como objetivo introduzir um estado de confinamento sobre a estrutura, que será utilizado como condição inicial para etapa seguinte. Para evitar o problema de auto interseção entre as faces opostas das fissuras, elas são inicialmente definidas com contato perfeito. Já a segunda etapa de solução consiste na aplicação da pressão interna sobre elementos predefinidos, como mostrado na Fig. 3b. A resposta obtida para essa etapa é sobreposta com o estado fornecido pela etapa anterior e, com os valores das grandezas acumuladas, a estabilidade à propagação das pontas das fissuras é verificada. Ambas as etapas podem ser realizadas a partir de um esquema incremental de carregamento.

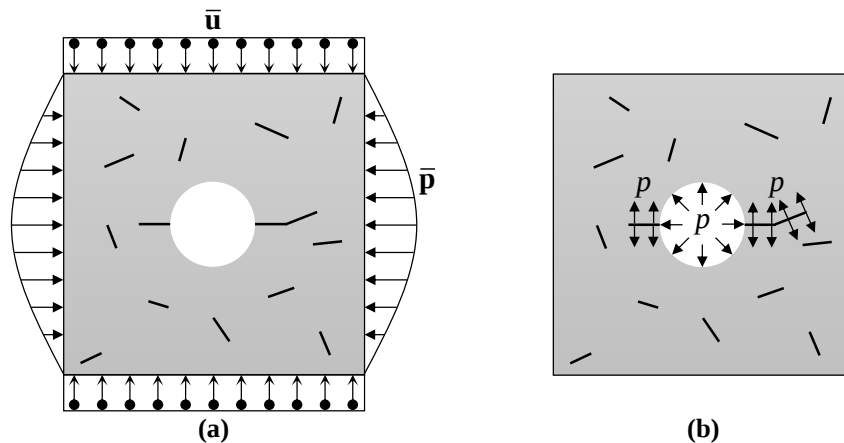


Figura 3 - Etapas de análise dos problemas de fraturamento hidráulico: (a) fase de aplicação das condições de contorno externas e (b) fase de aplicação da pressão interna.

Caso o valor de K_{eq} para alguma das pontas de fissura na análise supere a tenacidade do material, inicia-se a fase de propagação. Para as pontas que propagam, o comprimento de crescimento ΔL_f é determinado por meio da seguinte relação:

$$\Delta L_f = \Delta L \frac{K_{eq}}{K_{eq}^{m\acute{a}x}} \quad (25)$$

em que ΔL é o valor do incremento padrão definido na análise e $K_{eq}^{m\acute{a}x}$ é o máximo valor de K_{eq} na análise. Dessa forma, o tamanho do crescimento das fissuras é admitido como proporcional à sua sollicitação.

Em seguida, ao longo dos caminhos de propagação, definidos pela direção e comprimento determinados na Eq. (23) e na Eq. (25), respectivamente, são inseridos novos pontos de colocação que representam a discretização das novas faces criadas (Fig. 4a-b). As pontas que apresentam maior sollicitação possuem prioridade na definição das novas faces. A cada novo ponto de colocação definido, duas novas linhas e colunas, correspondentes aos novos graus de liberdade criados, são adicionadas às matrizes **H** e **G**. No caso do comprimento de fissura adicionado interceptar um elemento preexistente, o elemento original cruzado é modificado e um novo elemento é criado (Fig. 4b). Os coeficientes dos graus de liberdade do elemento modificado são alterados nas matrizes **H** e **G**, enquanto novos coeficientes referentes ao elemento criado são adicionados. Na Figura 4c é apresentado o esquema de alteração das matrizes do sistema com a adição e a modificação de elementos na malha da estrutura.

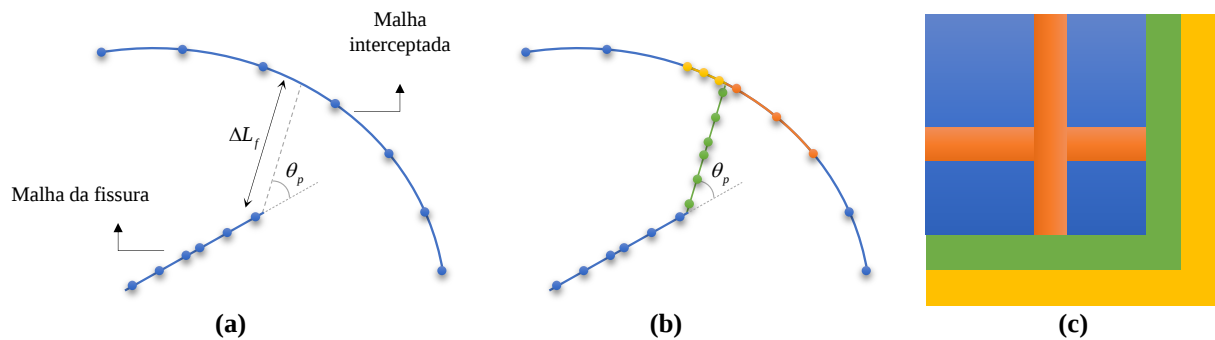


Figura 4 - Representação (a) da malha inicial, (b) do remalhamento na propagação e na interseção de algum elemento durante a propagação de uma fissura e (c) da alteração das matrizes **H e **G** com a criação e modificação de elementos durante a propagação.**

Se uma fissura com pressão prescrita interceptar outra fissura com faces livres de sollicitação, a pressão é então aplicada sobre as faces da descontinuidade cruzada quando abertas. Já se a fissura que propaga não apresentar pressão prescrita e cruzar com algum elemento com pressão aplicada, as faces da fissura passam a ser solicitadas por p quando abertas.

Os valores acumulados de deslocamento e de força de superfície para os pontos de colocação dos elementos modificados e dos elementos criados a partir da divisão de um elemento preexistente são obtidos a partir da interpolação dos valores acumulados dos pontos de colocação do elemento original (Fig. 5a). Já para a determinação dos valores acumulados para as novas faces de fissura, a estrutura é resolvida adotando os valores acumulados como condições de contorno conhecidas para o problema. Dessa forma, após a solução do sistema de equações apresentado na Eq. (4), os valores acumulados desconhecidos de deslocamento e

de força de superfície para os pontos de colocação das novas faces, definidos como pontos com contato perfeito, são obtidos (Fig. 5b).

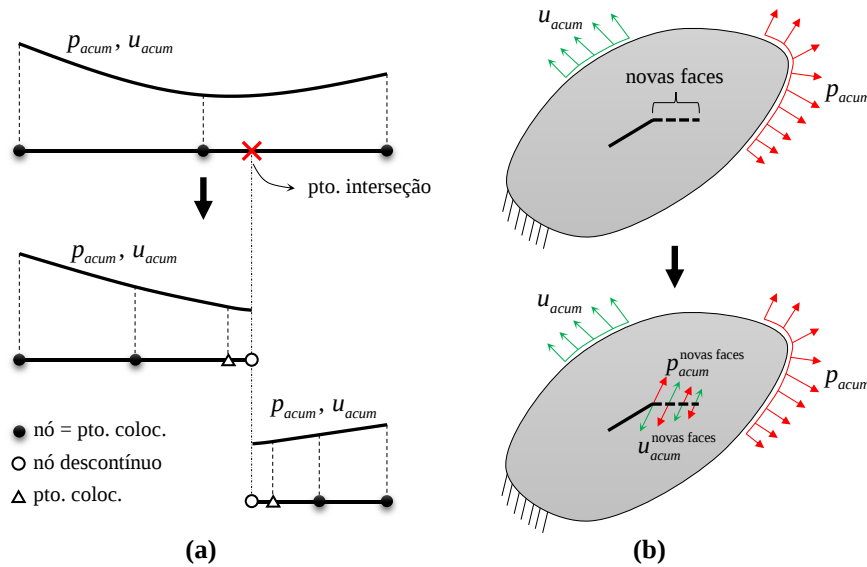


Figura 5 - (a) Interpolação dos valores acumulados de deslocamento e força de superfície para elementos criados a partir da divisão de outro. (b) Determinação dos valores acumulados para novas faces.

Após a atualização das variáveis acumuladoras para os pontos de colocação modificados e criados, os pares de pontos de colocação das fissuras são verificados quanto à abertura (se inicialmente fechados) ou quanto à auto interseção (se inicialmente abertos). Terminada essa etapa, a estabilidade à propagação das pontas é examinada. Se a sollicitação em uma ou mais pontas superar a tenacidade do material, a fase de propagação é novamente efetuada.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 1: Propagação em modo misto

Neste exemplo busca-se simular numericamente um dos experimentos de fraturamento hidráulico realizado por Abass et al. (1994). Um esquema bidimensional do corpo de prova utilizado é mostrado na Fig. 6a. As dimensões apresentadas possuem os seguintes valores: $L = 15.24$ cm, $2R = 1.55$ cm e $a = 1.27$ cm. O material apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 17375$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.228$. As pressões de confinamento aplicadas sobre as faces possuem magnitudes $\bar{\sigma}_1 = 17.2$ MPa e $\bar{\sigma}_2 = 9.7$ MPa. Já o valor da pressão interna é tomado igual à pressão de quebra determinada por Abass et al. (1994), sendo dado por $p = 25.2$ MPa. Já o ângulo de inclinação das fissuras em relação à horizontal é $\theta = 45^\circ$. É adotado um estado plano de deformação.

Nas simulações numéricas via MECD, cada uma das faces do corpo é discretizada com 12 elementos quadráticos e 1 elemento linear. Esse último apresenta comprimento $l = 0.01L$, está localizado no centro da face e tem os deslocamentos restritos na direção perpendicular à pressão aplicada. Todos os elementos da face estão submetidos ao carregamento mostrado na

Fig. 6a, inclusive aqueles com aproximação linear. O furo é discretizado com 16 elementos quadráticos, enquanto a discretização de cada uma das faces das fissuras é realizada com 12 elementos cúbicos. Na Fig. 6b mostra-se a representação da malha de elementos de contorno utilizada para o contorno externo do corpo de prova e para o furo.

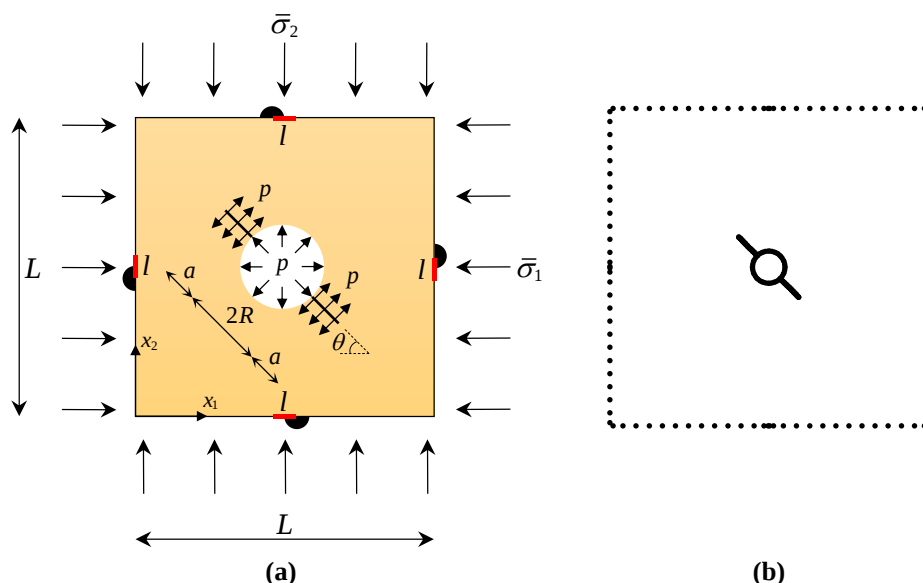


Figura 6 - Representação do problema analisado no Exemplo 1: (a) geometria e condições de contorno e (b) malha de elementos de contorno utilizada.

Inicialmente é avaliado o caminho de crescimento das fissuras sobre ação da pressão interna. Para a determinação do caminho de propagação, um incremento no comprimento $\Delta L = 0.127$ cm foi adotado. Na Figura 7 são apresentados os caminhos de propagação obtidos neste trabalho. Observa-se que as fissuras tendem a buscar uma orientação horizontal, paralela à direção de maior tensão confinante, sendo os caminhos de crescimento antissimétricos. Na Figura 7 também é mostrado o caminho experimental determinado por Abass et al. (1994). Nota-se uma boa correspondência entre as tendências de crescimento das fissuras, com destaque para a precisão da representação trajetória da ponta inferior pelo modelo proposto.

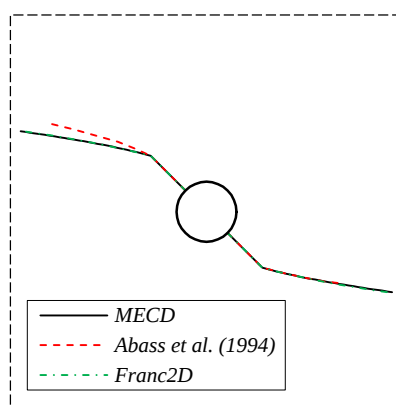


Figura 7 - Comparação entre os caminhos de crescimento das fissuras obtidos numericamente a partir do modelo proposto (MECD) e pelo Franc2D e experimentalmente por Abass et al. (1994).

Os resultados também são comparados com os obtidos a partir do *software* baseado em elementos finitos Franc2D (Wawrzynek; Ingraffea, 1994), que é reconhecidamente eficiente nas análises de problemas de fratura. Os caminhos de propagação determinados por esse modelo computacional também são apresentados na Fig. 7 e estão em concordância com a resposta obtida neste trabalho. Isso ocorre devido à boa correspondência entre os valores de K_I e K_{II} determinados em ambos os modelos numéricos, conforme mostrado na Fig. 8, uma vez que a direção de crescimento depende exclusivamente desses fatores (ver Eq. (23)).

A partir dos valores dos FIT determinados neste trabalho e mostrados na Fig. 8, observa-se que, inicialmente, a magnitude de K_{II} é significativa em relação ao valor de K_I . Isso indica a tendência da fissura em mudar de direção. Com o crescimento da descontinuidade material, o modo I de sollicitação passa a ser dominante. Nessa situação, K_{II} se estabiliza e assume valores com pequena magnitude e negativos, indicando a tendência da fissura em se alinhar com a horizontal. Com relação à resposta obtida via Franc2D, observa-se comportamento semelhante. Todavia, durante a fase de sollicitação com modo I dominante, alguns dos valores de K_{II} oscilam em torno da resposta obtida pelo MECD. Esse comportamento está relacionado ao processo de remalhamento e ao refinamento da malha na região próxima da ponta, indicando o problema de dependência de malha nas análises de fratura via elementos finitos convencional.

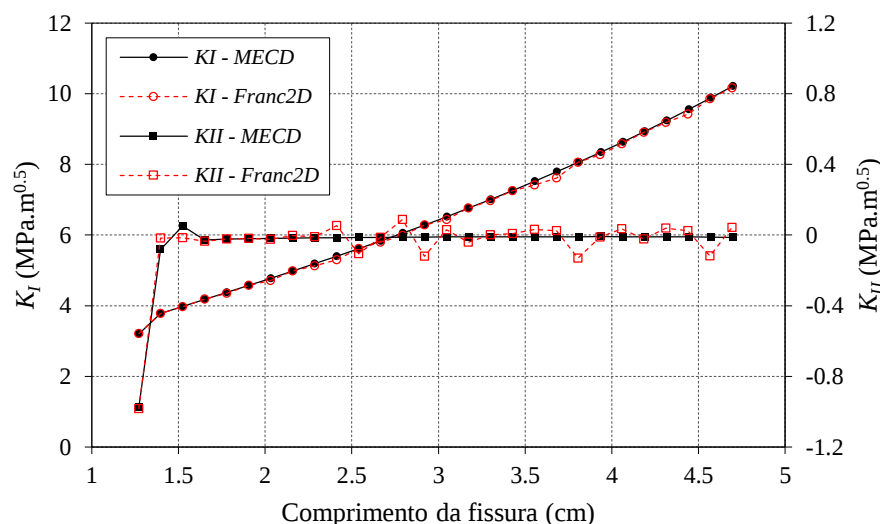


Figura 8 - Variações de K_I e K_{II} com o comprimento da fissura determinadas neste trabalho e via Franc2D. Resultados valem para as duas fissuras, uma vez que a diferença entre as respostas de ambas é pequena.

Da comparação dos resultados obtidos neste trabalho com as respostas de referência, pode-se concluir que o modelo proposto é capaz de simular satisfatoriamente o crescimento de fissuras cujas faces estão sollicitadas a uma pressão hidrostática.

Exemplo 2: Interação entre fissuras

Em problemas envolvendo múltiplas fissuras, a interação entre elas exerce grande influência nos caminhos de propagação. Para avaliar esse efeito, neste exemplo são

consideradas três configurações envolvendo duas fissuras, conforme representado na Fig. 9, sendo as dimensões do domínio de análise muito maiores que L . Nos casos apresentados na Fig. 9a e na Fig. 9b, ambas as fissuras possuem pressão interna aplicada. Essas duas situações também foram analisadas por Wu e Olson (2015), cujos resultados são tomados como referência. Já na disposição mostrada na Fig. 9c, a fissura horizontal possui pressão interna prescrita, enquanto a fissura vertical não. Essa situação é analisada para verificar a interseção entre as fissuras e a transferência de pressão entre elas.

O comprimento das fissuras é tomado como $L = 10$ m e distância horizontal entre os centros das fissuras é assumido como $D = 10$ m. Como propriedade do material são adotados os seguintes valores: módulo de Young $E = 30000$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0.35$ e tenacidade $K_{Ic} = 1.0$ MPa $\sqrt{\text{m}}$. A pressão interna aplicada sobre as fissuras possui magnitude $p = 0.36$ MPa. O problema é analisado como um estado plano de deformação.

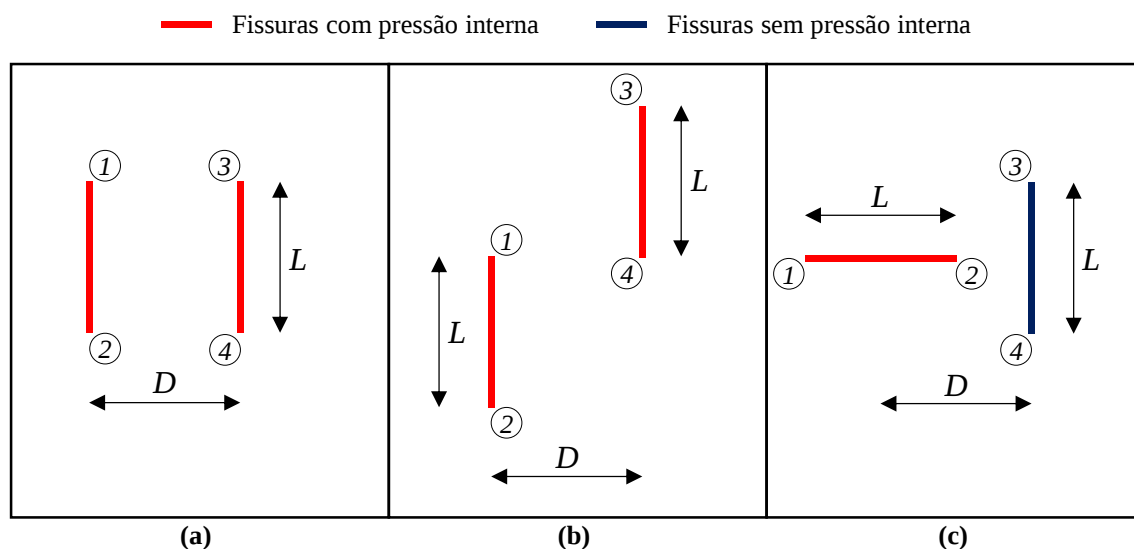


Figura 9 - Configurações analisadas no Exemplo 2: (a) fissuras dispostas paralelamente sem excentricidade vertical; (b) fissuras dispostas paralelamente com excentricidade vertical igual a L e (c) fissuras dispostas perpendicularmente sem excentricidade vertical entre os centros.

A discretização de cada uma das faces das fissuras é efetuada com 12 elementos quadráticos. Para a definição dos caminhos de propagação, um valor padrão de incremento no comprimento $\Delta L = 1$ m é adotado. As trajetórias de crescimento das fissuras determinadas neste trabalho para os dois primeiros casos analisados são apresentadas na Fig. 10. Na Figura 10 também são mostrados os caminhos determinados por Wu e Olson (2015). Observa-se que os caminhos obtidos estão de acordo com a resposta de referência.

Como pode ser observado na Fig. 10a, na primeira configuração analisada as fissuras tendem a crescer de forma simétrica e se afastando entre si. Inicialmente, o modo II de sollicitação é significativo, o que origina um maior desvio na direção de propagação. À medida que a fissura cresce, o modo I passa a ser dominante. Esses comportamentos podem ser observados nas variações dos valores dos FIT com o comprimento da fissura apresentada na Fig. 11.

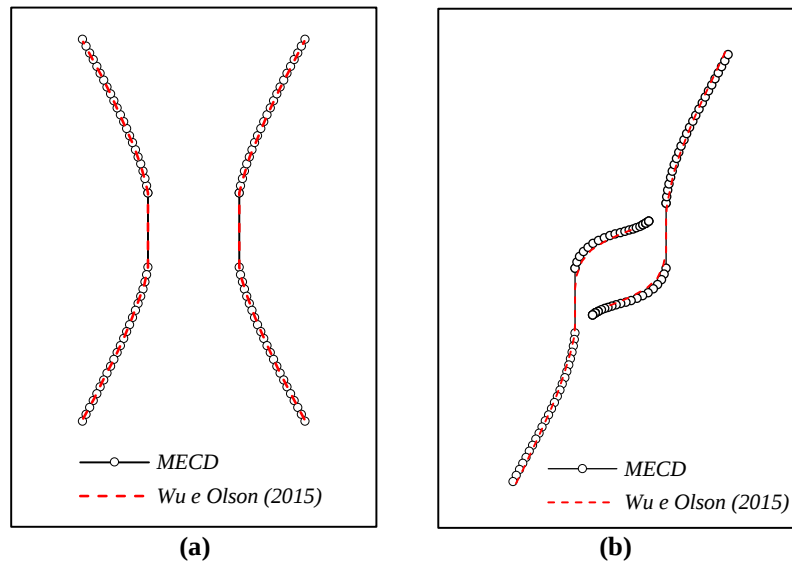


Figura 10 - Comparação entre os caminhos de propagação determinados neste trabalho e por Wu e Olson (2015) para as configurações apresentadas pela (a) Figura 9a e (b) Figura 9b.

Já na Figura 10b observa-se que, para a segunda configuração analisada, a pressão interna sobre as fissuras faz com que as pontas 1 e 4 cresçam inicialmente na direção da fissura adjacente, enquanto as pontas 2 e 3 cresçam na direção contrária. Na Figura 12 são apresentadas as variações de K_I e K_{II} com o crescimento das fissuras. Para as pontas 2 e 3, o comportamento é semelhante aos das pontas para o primeiro caso analisado. Já para as pontas 1 e 4, inicialmente há um aumento do valor de K_I , enquanto K_{II} se mantém positivo, o que representa o desvio na direção da fissura adjacente. Na sequência, à medida que essas pontas se aproximam da outra descontinuidade material, há uma redução de K_I , enquanto K_{II} passa a assumir valores negativos, indicando uma mudança na direção de crescimento. Principalmente pela influência da diminuição do valor de K_I , o valor de K_{eq} é reduzido até valores inferiores a K_{Ic} , cessando o crescimento dessas pontas.

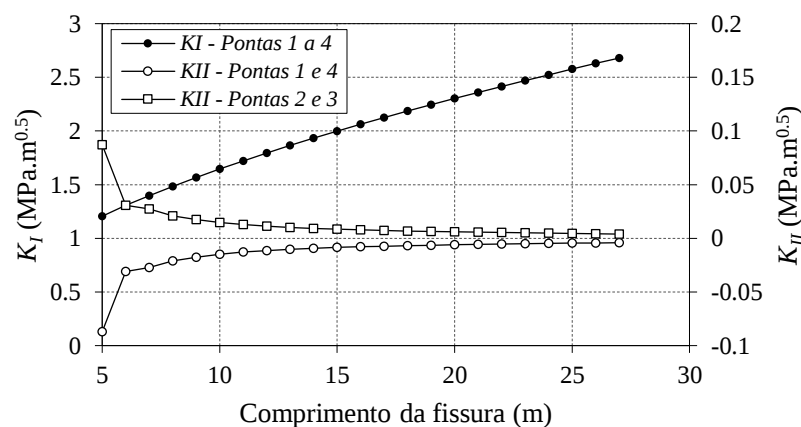


Figura 11 - Variações de K_I e K_{II} com o comprimento da fissura para o caso mostrado na Figura 9a.

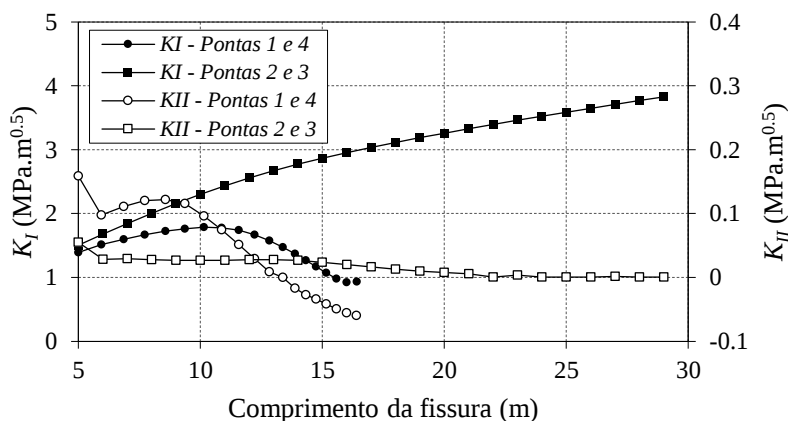


Figura 12 - Variações de K_I e K_{II} com o comprimento da fissura para o caso mostrado na Figura 9b.

Na análise da configuração apresentada na Fig. 9c, as pontas 1 e 2 propagam na direção horizontal pela ação da pressão interna. À medida que a fissura horizontal cresce, o seu efeito sobre a fissura vertical sem pressão interna passa a ser cada vez maior. Quando a ponta 2 cruza com a fissura vertical, esta também passa a ter as faces submetidas à pressão interna. Com isso, o valor K_{eq} nas pontas 3 e 4 superam o valor de K_{lc} e, conseqüentemente, essas pontas passam a crescer na direção contrária à da fissura adjacente. Na Figura 13 é mostrada a evolução dos comprimentos das fissuras no decorrer da análise. Observa-se que o modelo computacional desenvolvido neste trabalho foi capaz de tratar de forma eficaz o cruzamento entre as fissuras e de transferir a pressão de uma fissura para a outra.

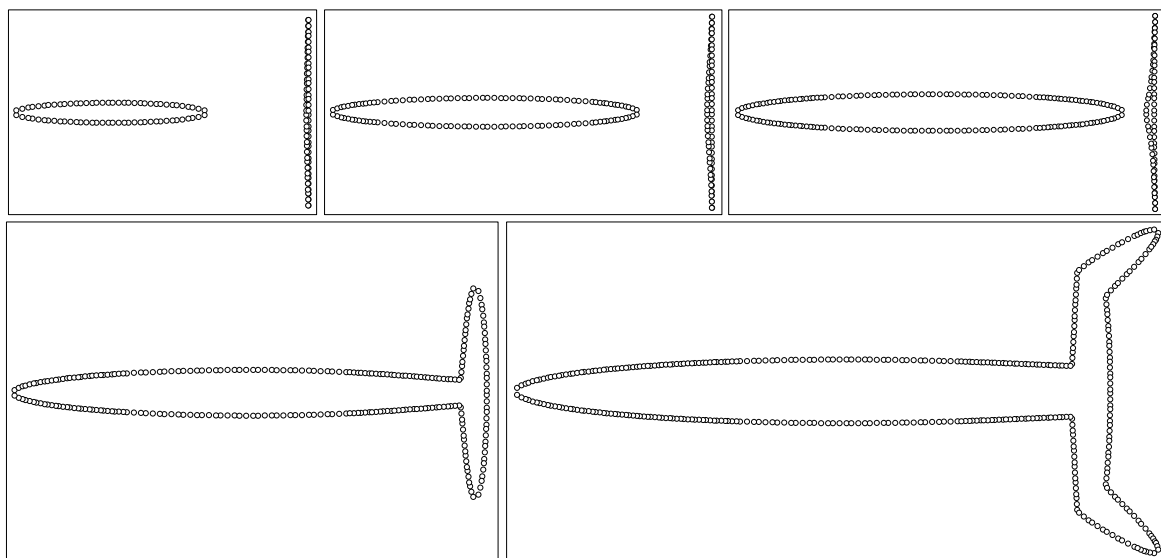


Figura 13 - Sequência de crescimento das fissuras. Os deslocamentos estão ampliados em 5000 vezes.

Por fim, na Figura 14a e na Figura 14b são apresentados, respectivamente os históricos de variação de K_I e K_{II} para o último caso analisado. Especial atenção deve ser tomada na análise dos gráficos, uma vez que diferentes pontas de fissuras atingem um mesmo comprimento em instantes distintos. Pode-se observar que ambas as pontas da fissura

horizontal estão solicitadas exclusivamente ao modo I. Já para a fissura vertical, há uma pequena variação da solicitação nas suas pontas à medida que a ponta 2 se aproxima, porém sem alteração no comprimento. Quando ocorre a interseção, há uma variação súbita nos valores dos FIT das pontas 3 e 4, que passam a crescer. Observa-se na Fig. 14b que, para essas duas pontas, as magnitudes de K_{II} são iguais, porém com sinais opostos. Tais valores de K_{II} justificam a tendência de crescimento das pontas na direção contrária à fissura horizontal.

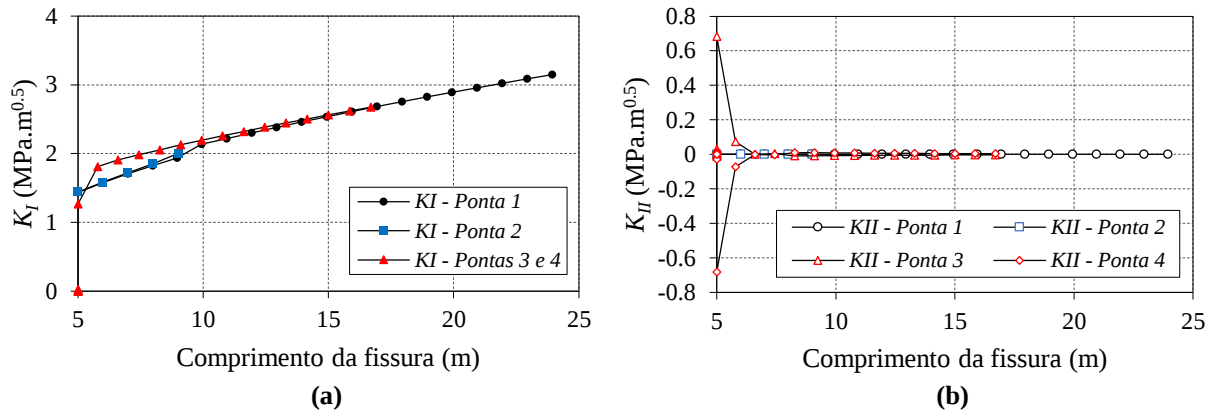


Figura 14 - Variações de (a) K_I e (b) K_{II} com o comprimento da fissura para o caso da Figura 9c.

Do exposto, pode-se concluir que o modelo proposto é capaz de representar satisfatoriamente a interação entre diferentes fissuras sujeitas à pressão interna. Além disso, ele é capaz de reproduzir de forma eficaz e automática a coalescência entre fissuras e a transferência de pressão interna entre elas, simulando a passagem do fluido de fraturamento de uma para outra.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo numérico baseado no MECD para a análise de problemas de fraturamento hidráulico contendo múltiplas fissuras em domínios bidimensionais, homogêneos e isotrópicos. A pressão interna sobre as faces das fissuras foi admitida como hidrostática. Os materiais foram considerados frágeis ao fraturamento e os fundamentos da MFEL foram utilizados para a verificação da estabilidade das pontas das fissuras e para a definição dos caminhos de propagação.

Por meio dos exemplos analisados, observou-se que os métodos utilizados para a extração dos FIT e para a definição dos caminhos de propagação forneceram respostas precisas, estáveis e em correspondência com os resultados de referência. Além disso, o modelo computacional foi capaz de representar satisfatoriamente a interação entre fissuras e o comportamento observado em resultados experimentais. O fenômeno de coalescência entre fissuras e a transferência de pressão interna entre elas também foram satisfatoriamente reproduzidos. Por fim, pode-se destacar a robustez e a eficácia do modelo desenvolvido, visto que ele é capaz de lidar de forma automática com problemas de fraturamento hidráulico.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pela FAPESP, projeto de pesquisa nº 2016/23649-0, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

REFERÊNCIAS

- Abass, H.H.; Brumley, J.L.; Venditto, J.J., 1994. Oriented Perforations - A Rock Mechanics View. *Spe Annual Technical Conference and Exhibition*, p.411-425.
- Aliabadi, M.H., 2002. *The Boundary Element Method: Application in solids and structures*. v.2. New York: Wiley.
- Cahoy, D.R.; Gehman, J; Lei, Z., 2013. Fracking Patents: The Emergence of Patents as Information-Containment Tools in Shale Drilling. *Michigan Telecommunications and Technology Law Review*, v.19, n.2, p.279-377.
- Economides, M.; Oligney, R.; Valkó, P., 2011. *Projeto unificado de fraturamento*. Rio de Janeiro: E-Papers.
- Erdogan, F.; Sih, G.C., 1963. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, v.85, n.4, p.519-527.
- Eshkalak, M.O.; Aybar, U.; Sepehrnoori, K., 2014. An Economic Evaluation on the Re-fracturing Treatment of the U.S. Shale Gas Resources. *Spe Eastern Regional Meeting*, p.21-23.
- Gordeliy, E; Peirce, A., 2013. Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.253, p.305-322.
- Griffith, A.A., 1921. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philosophical Transactions Of The Royal Society A: *Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v.221, n.582-593, p.163-198.
- Gupta, P.; Duarte, C.A., 2014. Simulation of non-planar three-dimensional hydraulic fracture propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 8, n.13, p.1397-1430.
- Hattori, G.; Trevelyan, J.; Augarde, C.E.; Coombs, W.M.; Aplin, A.C., 2016. Numerical Simulation of Fracking in Shale Rocks: Current State and Future Approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering*, p.1-37.
- Hong, H.K.; Chen, J.T., 1988. Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, v.114, n.6, p.1028-1044.
- Karlsson, A.; Bäcklund, J., 1978. J-integral at loaded crack surfaces. *International Journal of Fracture*, v.14, n.6, p.311-318.
- Kitagawa, H.; Okamura, H.; Ishikawa, H., 1978. Application of J-integral to mixed-mode crack problems. *Transactions of the JSME*. n.780-4, p.52-54.
- Lecampion, B., 2009, An extended finite element method for hydraulic fracture problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.25, n.2, p.121-133.

Portela, A.; Aliabadi, M.H.; Rooke, D.P., 1992. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.33, n.6, p.1269-1287, 1992.

Rice, J. R., 1968. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v.35, n.2, p.379-386.

Telles, J. C. F., 1987. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.24, n.5, p.959-973.

Warwzynek, P.; Ingraffea, A., 1994. *Franc2D: a two-dimensional crack propagation simulator* (Version 2.7 User's Guide). NASA Contractor Report 4572.

Wu, K.; Olson, J.E., 2015. Simultaneous Multifracture Treatments: Fully Coupled Fluid Flow and Fracture Mechanics for Horizontal Wells. *Spe Journal*, v.20, n.02, p.337-346.