



ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO DE MÚLTIPLAS FISSURAS EM MEIOS FRÁGEIS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTO RNO DUAL

Heider C. Andrade

heider.andrade@usp.br

Edson D. Leonel

edleonel@sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas.

Avenida Trabalhador São Carlense, 400, Centro. CEP 13.566-590, São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. Neste trabalho é apresentado um modelo numérico para a simulação da propagação de múltiplas fissuras em domínios bidimensionais, homogêneos e isotrópicos. É admitida fratura frágil dos materiais e a teoria da Mecânica da Fratura Elástico-Linear é utilizada. A resposta mecânica é obtida a partir do Método dos Elementos de Contorno Dual, no qual as equações integrais singular e hipersingular são empregadas. Os integrandos singulares são avaliados pelo método de subtração de singularidade. Além disso, a transformação polinomial de Telles (1987) é empregada para melhorar a precisão de integrais quase-singulares. Os fatores de intensidade de tensão são determinados a partir da integral J . A teoria da máxima tensão circunferencial é aplicada para a definição dos caminhos de propagação e da sollicitação equivalente nas pontas das fissuras. O esquema de solução pode seguir uma abordagem de controle de força/deslocamento ou de controle do comprimento da fissura crítica. O segundo esquema permite a representação de trechos com snap-back da resposta mecânica estrutural. Dois exemplos são apresentados para demonstrar a eficácia do modelo proposto na avaliação de problemas com múltiplas fissuras, incluindo a simulação de coalescência. Os resultados numéricos obtidos apresentam boa correspondência com respostas disponíveis na literatura e fornecidas por outros modelos.

Palavras-chave: Mecânica da Fratura Elástico-Linear, Método dos Elementos de Contorno Dual, Propagação de múltiplas fissuras, Coalescência.

CILAMCE 2017

Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering
P.O. Faria, R.H. Lopez, L.F.F. Miguel, W.J.S. Gomes, M. Noronha (Editores), ABMEC, Florianópolis, SC,
Brazil, November 5-8, 2017.

1 INTRODUÇÃO

A fratura dos materiais é caracterizada pela formação de novas superfícies a partir da propagação de descontinuidades materiais (fissuras), o que pode levar à falha de um componente estrutural. Estudos conduzidos nas décadas de 1980 e 1990 (Duga et al., 1983; Faria, 1991; Reed et al., 1983) apontaram que os prejuízos anuais relacionados a danos por fratura chegam a até 4% do PIB em países desenvolvidos, podendo ser ainda mais significativos em países subdesenvolvidos. Esses trabalhos também estimaram a significativa economia de recursos que poderia ser efetuada com o emprego de procedimentos mais racionais nas análises mecânicas de corpos fissurados. Assim, o desenvolvimento de estudos nessa área é fundamental para a obtenção de estruturas mais seguras e econômicas.

A investigação dos colapsos causados pela propagação de fissuras deu origem à Mecânica da Fratura. Nesse campo são contemplados um conjunto de teorias que permitem a representação do comportamento mecânico de corpos deformáveis contendo descontinuidades materiais. Além disso, também fornecem parâmetros que possibilitam a avaliação consistente do processo de crescimento das fissuras em função da intensidade do carregamento externo. Atualmente, apesar dos avanços tecnológicos observados nos processos de manufatura, nenhum processo é capaz de produzir materiais livres de defeitos em sua microestrutura. Além disso, materiais naturais que são utilizados para fins estruturais, como madeiras e rochas, possuem descontinuidades inerentes à sua composição e, portanto, são passíveis de apresentarem redução de resistência devido aos fenômenos de fratura. Ademais, processos como a corrosão em metais e a degradação mecânica favorecem a introdução de fissuras nos corpos. Dessa forma, o desenvolvimento de estudos no campo da Mecânica da Fratura, especialmente que contemplem o estado real de fissuração do material, se tornam imprescindíveis para a precisa avaliação da resistência mecânica das estruturas.

Para as análises de corpos multifissurados, as soluções analíticas são inexistentes ou são restritas apenas a um pequeno conjunto de problemas, com simplificadas condições de contorno e geometria. Portanto, de forma a analisar mecanicamente problemas gerais, métodos numéricos devem ser acoplados aos modelos descritos na Mecânica da Fratura.

O Método dos Elementos Finitos (MEF), pela sua maior difusão entre os pesquisadores, é o mais aplicado na solução de problemas de fratura, sendo Barsoum (1976) e Chan et al. (1970) alguns dos trabalhos que ajudaram o desenvolvimento nesse campo. Com relação à aplicação do MEF em problemas de múltiplas fissuras, podem ser destacados os trabalhos de Azadi e Khoei (2010) e Bouchard et al. (2000).

Todavia, o MEF clássico, cujas aproximações ao longo do domínio são realizadas por meio de funções polinomiais, não é eficaz para a representação da concentração de tensão que ocorre nas pontas das fissuras. Para uma adequada representação desses campos singulares, uma malha muito refinada é necessária nessas regiões, gerando um aumento no custo computacional. Além disso, no caso de análises de propagação, outra dificuldade surge no processo de remalhamento que deve ser realizado à medida que a fissura cresce. Uma alternativa ao uso do MEF clássico, com o objetivo de contornar as deficiências mencionadas, é a utilização do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), cujos fundamentos estão baseados nos conceitos de partição da unidade (PU) (Melenk; Babuska, 1996). O método prevê o enriquecimento das PU com funções especiais que contêm as propriedades da resposta esperada para o problema em análise. No âmbito da Mecânica da Fratura, o MEFG

foi originalmente empregado nos trabalhos de Belytschko e Black (1999) e Moës et al. (1999), nos quais os autores propuseram métodos para análises de propagação sem grandes alterações na malha a partir do uso de funções de enriquecimento descontínuas. Já Budyn et al. (2004) aplicaram o MEFG para a análise do crescimento de múltiplas fissuras em materiais homogêneos e heterogêneos.

Outro método amplamente aplicado na modelagem de problemas de fratura é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Uma grande vantagem do MEC sobre o MEF é a redução da dimensão da malha, uma vez que apenas o contorno da estrutura é discretizado. Isso simplifica o remalhamento durante as análises de propagação, já que novos elementos são apenas adicionados às novas faces de fissura. Além disso, devido à ausência de malha de domínio, as concentrações de tensão que surgem nas pontas das fissuras são naturalmente representadas com precisão pelo método. Um dos grandes empecilhos para a difusão do MEC refere-se ao elevado custo computacional para a construção do sistema de equações, determinado a partir da integração numérica de núcleos singulares. Todavia, com os avanços recentes na computação, computação em paralelo em especial, o tempo despendido nas análises vem sendo cada vez menor, favorecendo a aplicação do método.

Cruze (1972) mostrou que a aplicação direta do MEC para problemas de fratura considerando as duas faces da fissura coplanares leva a um sistema de equações indeterminado. Para contornar esse problema, o autor aproximou a forma da fissura como uma elipse, porém obteve resultados com erros significativos. Uma alternativa a esse tipo de análise foi proposta por Blandford et al. (1981). Os autores utilizaram a técnica de sub-regiões para a análise de propagação de fissuras. Nessa estratégia, cada uma das faces da fissura se encontra em regiões distintas e a compatibilidade entre os deslocamentos e os esforços entre as regiões adjacentes é imposta na montagem do sistema de equações. Entretanto, esse processo tem como desvantagem a introdução de contornos artificiais, o que resulta em um sistema de equações maior do que o estritamente necessário. Além disso, a técnica de sub-regiões não é prática para a avaliação da propagação pela necessidade de conhecimento a priori da trajetória de crescimento da ponta. Todavia, para as análises problemas de fissuras em interfaces entre diferentes materiais, a técnica de sub-regiões fornece boas respostas. Aplicações dessa técnica para esse tipo de problema foram realizadas por Lee e Choi (1988) e Tan e Gao (1990).

Uma alternativa à técnica de sub-regiões para a análise de propagação de fissuras no campo do MEC refere-se à utilização de equações integrais de deslocamento (singular) e de forças de superfície (hipersingular) aplicadas separadamente a cada uma das faces das fissuras. A partir desse procedimento obtém-se um sistema de equações determinado. A formulação básica dessa técnica foi inicialmente proposta por Hong e Chen (1988). Os autores mostraram como obter a equação integral para forças de superfície a partir da derivação da equação integral para deslocamentos e a aplicação da lei de Hooke. Essa técnica é conhecida como Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) e foi originalmente empregada em problemas de fratura nos trabalhos Portela et al. (1992, 1993). Leonel e Venturini (2010, 2011) e Oliveira e Leonel (2013) aplicaram com eficiência o MECD nas análises de propagação de múltiplas fissuras em meios isotrópicos para problemas de fratura linear.

Neste trabalho é realizada a análise de problemas de fratura linear em corpos bidimensionais multifissurados. Os domínios são considerados como homogêneos e

compostos por materiais com propriedades isotrópicas e frágeis ao fraturamento. Um modelo numérico baseado no MECD é desenvolvido, no qual é admitido a utilização de elementos isoparamétricos com qualquer grau de aproximação (elementos de alta ordem). Tal modelo é capaz de simular a propagação de múltiplas fissuras discretas, incluindo a representação do fenômeno de coalescência. Dois esquemas de solução são implementados: um envolvendo a análise incremental em passos de carregamento e outro considerando o controle do comprimento da fissura. Dois exemplos são apresentados para demonstrar a eficácia do código desenvolvido.

2 FORMULAÇÃO DO MECD

Seja um domínio bidimensional Ω , com contorno Γ , homogêneo, com comportamento elástico-linear e sujeito a um estado estático de carregamento. Utilizando o teorema da reciprocidade de Betti e desprezando forças de volume, as componentes de deslocamento u_i em um ponto f interno a Ω podem ser determinadas a partir dos deslocamentos e das forças de superfície ao longo do contorno por meio de:

$$u_i(f) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(f, c) p_j(c) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(f, c) u_j(c) d\Gamma \quad (1)$$

em que $u_j(c)$ e $p_j(c)$ são as respectivas componentes de deslocamento e de força de superfície relativas a um ponto c no contorno. Já U_{ij}^* e P_{ij}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais de Kelvin em deslocamento e em força de superfície, que dependem da distância r entre o ponto fonte f e o ponto campo c .

A equação para calcular as componentes de tensão σ_{ij} no ponto f pode ser obtida a partir da diferenciação da Eq. (1) com relação à posição do ponto interno. Em seguida, utilizando a relação linear entre deformação e deslocamento e aplicando a lei de Hooke, obtém-se:

$$\sigma_{jk}(f) = \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(f, c) p_i(c) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(f, c) u_i(c) d\Gamma \quad (2)$$

em que D_{ijk}^* e S_{ijk}^* são novas soluções fundamentais obtidas a partir das derivadas de U_{ij}^* e P_{ij}^* , respectivamente, e também são funções de r .

A Eq. (1) e a Eq. (2) contêm integrais regulares e permitem o cálculo dos campos elásticos em pontos internos desde que os deslocamentos e as forças de superfície ao longo do contorno sejam conhecidos. Para determinar essas componentes via MEC, o ponto fonte f pode ser levado ao contorno. Realizando o processo limite sobre a Eq. (1), a equação integral em deslocamentos, ou equação integral singular, é obtida e é expressa por:

$$C_{ij}(f) u_j(f) + C_{ij}(\bar{f}) u_j(\bar{f}) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(f, c) u_j(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(f, c) p_j(c) d\Gamma \quad (3)$$

sendo C_{ij} um coeficiente resultante do processo limite sobre a integral contendo P_{ij}^* e igual a $\delta_{ij}/2$ caso o ponto fonte esteja em um contorno suave, com δ_{ij} igual ao delta de Kronecker.

O ponto $\bar{f}$ refere-se a um ponto fonte potencial que ocupa a mesma posição de f , porém está em uma superfície distinta. Essa situação ocorre, por exemplo, para pontos nas faces opostas de uma fissura. Quando o ponto f não possui um correspondente, o termo relacionado a $\bar{f}$ na Eq. (3) é nulo.

O mesmo processo limite pode ser realizado sobre a Eq. (2). Em seguida, utilizando a fórmula de Cauchy, a equação integral em forças de superfície, ou equação integral hipersingular, é obtida. Para um ponto fonte em um contorno suave, essa equação é dada por:

$$\frac{1}{2} [p_j(f) - p_j(\bar{f})] + n_k(f) \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(f, c) u_i(c) d\Gamma = n_k(f) \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(f, c) p_i(c) d\Gamma \quad (4)$$

em que n_k são as componentes do vetor unitário normal ao contorno no ponto fonte.

A Eq. (3) e a Eq.(4) possuem integrais impróprias, uma vez que as soluções fundamentais apresentam diferentes tipos de singularidade quando o ponto fonte se aproxima do ponto campo, ou $r \rightarrow 0$. A solução U_{ij}^* apresenta uma singularidade fraca de ordem $o(\ln r)$; as soluções P_{ij}^* e D_{ijk}^* possuem uma singularidade forte de ordem $o(1/r)$; já S_{ijk}^* contém uma hipersingularidade de ordem $o(1/r^2)$. Dessa forma, os núcleos com singularidade forte e hipersingular devem ser avaliados no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita de Hadamard, respectivamente.

Neste trabalho, o sistema algébrico de equações para solução do problema mecânico é determinado via MECD a partir da avaliação numérica da Eq. (3) e da Eq.(4). Para tanto, o contorno da estrutura é subdividido em elementos isoparamétricos com grau de aproximação polinomial qualquer. Os elementos de contorno contêm os pontos de colocação, cujos graus de liberdade são adotados como parâmetros nas aproximações das grandezas dentro de um elemento. Além disso, esses pontos são utilizados como pontos fonte das formulações integrais. Em seguida, a equação integral hipersingular é aplicada à discretização de uma das faces das fissuras, enquanto a equação integral singular é utilizada para os pontos de colocação da face oposta e do contorno externo.

A integração numérica ao longo de um elemento distante do ponto fonte é realizada por meio da quadratura de Gauss-Legendre padrão, uma vez que as integrais envolvidas são regulares. Já quando o ponto fonte está próximo ao elemento, as integrais tornam-se quase-singulares. Para melhorar a precisão da integração nessa situação, a transformação polinomial de terceiro grau proposta por Telles (1987) é utilizada. Nela, os pontos de Gauss ao longo do elemento são deslocados no sentido do ponto fonte, o que resulta em uma melhor resposta numérica. Por fim, caso o elemento integrado contenha o ponto fonte, as integrais envolvidas são singulares. Nesse caso, o método de subtração de singularidade é empregado (Aliabadi, 2002). Nesse método, ao núcleo de integração com algum tipo de singularidade é subtraído e somado outro núcleo com a mesma ordem de singularidade, dando origem a uma integral regular e a uma nova integral singular com resposta analítica conhecida. A integral regular pode ser avaliada pela quadratura de Gauss-Legendre padrão. Já a integral analítica fornece o valor principal de Cauchy ou a parte finita de Hadamard do núcleo original, a depender o tipo de singularidade tratada.

Elementos descontínuos ou semi-contínuos são utilizados para garantir a condição de contorno suave sobre os pontos de colocação e também para impor descontinuidades nas condições de contorno entre elementos adjacentes. Além disso, para a existência da parte finita de Hadamard na equação integral hipersingular, é necessária a continuidade da primeira derivada do deslocamento nos pontos de colocação, o que é garantido com o uso de elementos descontínuos. Portanto, as faces das fissuras são discretizadas com esse tipo de elemento.

Avaliando numericamente a Eq. (3) ou a Eq. (4) para todos os pontos de colocação utilizados na discretização do corpo, um sistema algébrico de equações é determinado conforme:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (5)$$

em que $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são matrizes $2n \times 2n$ contendo coeficientes de influência obtidos a partir dos núcleos P_{ij}^* e S_{ijk}^* e dos núcleos U_{ij}^* e D_{ijk}^* , respectivamente; $\mathbf{u}$ e $\mathbf{p}$ são vetores $2n$ com as componentes de deslocamento e força de superfície nos pontos de colocação; e n é o número de pontos de colocação utilizado na discretização do contorno.

O sistema final de equações pode ser determinado pela troca conveniente entre as colunas das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ para a imposição das condições de contorno do problema. Com esse procedimento, os valores incógnitos no contorno são isolados no primeiro membro da equação, enquanto os valores conhecidos são isolados no segundo, resultando em:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (6)$$

sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes contendo valores de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores com as grandezas desconhecidas e conhecidas no contorno, respectivamente. Resolvendo o sistema linear da Eq. (6), os valores desconhecidos no contorno são obtidos.

3 MODELOS DA MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO-LINEAR

A teoria da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL) assume que a Zona de Processos Inelásticos (ZPI) na região próxima à ponta de fissuras apresenta pequenas dimensões quando comparadas ao comprimento da fissura e às dimensões do corpo. Esse tipo de comportamento é típico de materiais com comportamento frágil, nos quais a formação de novas superfícies de fissura se dá sem a dissipação significativa de energia relacionada à evolução de deformações inelásticas. Desse modo, a maior parte do corpo apresenta comportamento elástico, inclusive em regiões próximas às pontas, porém fora da ZPI.

Conforme a MFEL, as componentes de tensão para a vizinhança da ponta para um problema bidimensional podem ser determinadas com o uso das funções de tensão complexas de Westergaard (1939). Em coordenadas polares, as componentes circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ e de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ (Fig. 1) são expressas por:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (7)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [K_I \sin(\theta) + K_{II} (3\cos(\theta) - 1)] \quad (8)$$

em que r e θ são as coordenadas polares do ponto considerado em relação à ponta (Fig. 1). Já K_I e K_{II} correspondem, respectivamente, aos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) associados aos modos básicos de fratura de abertura e de deslizamento (Fig. 2).

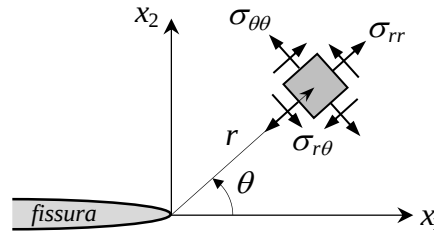


Figura 1 - Representação das componentes polares de tensão para região próxima à ponta.

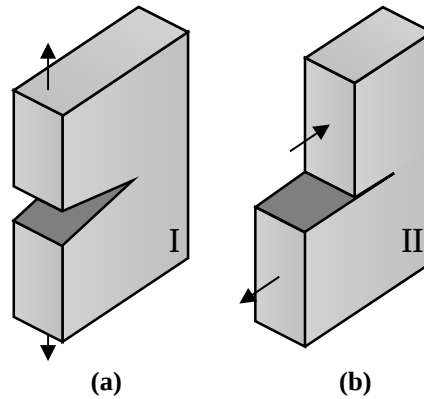


Figura 2 - Representação dos modos básicos de fratura para problemas bidimensionais: (a) modo de abertura e (b) modo de deslizamento.

A Eq. (7) e a Eq. (8) indicam que o campo de tensão próximo à ponta apresenta uma singularidade de ordem $r^{-1/2}$ à medida que r se aproxima de zero. Consequentemente, a análise de estabilidade à propagação baseada em critérios de resistência clássicos é ineficaz, visto que nenhum material é capaz de resistir a uma tensão infinita.

Como alternativa, os valores dos FIT são utilizados para a verificação da estabilidade à propagação, uma vez que eles fornecem uma medida da magnitude das tensões na vizinhança da ponta, as quais são traduzidas como balanços energéticos. No presente trabalho, os valores de K_I e K_{II} para uma determinada configuração em equilíbrio são obtidos a partir da integral J independente do caminho proposta por Rice (1968). Essa integral é avaliada ao longo de um caminho fechado Γ_J que engloba a ponta da fissura, sendo expressa por:

$$J = \int_{\Gamma_J} (W n_1 - p_j u_{j,1}) d\Gamma \quad (9)$$

sendo W a densidade de energia de deformação obtida por $\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$; p_j as componentes da força de superfície ao longo de Γ_j dadas por $\sigma_{ij}n_i$; u_j as componentes de deslocamento ao longo de Γ_j ; n_1 a componente do vetor unitário normal ao caminho na direção x'_1 .

Neste estudo, o caminho Γ_j é admitido como circular e centrado na ponta. Ele inicia em um ponto de colocação da discretização de uma das faces da fissura e termina no ponto de colocação correspondente na face oposta (Fig. 3). Além disso, o caminho não deve interceptar nenhuma outra fissura ou o contorno externo. Neste trabalho, um esquema adaptativo é utilizado para ajustar o tamanho do raio do caminho para que essas condições sejam satisfeitas.

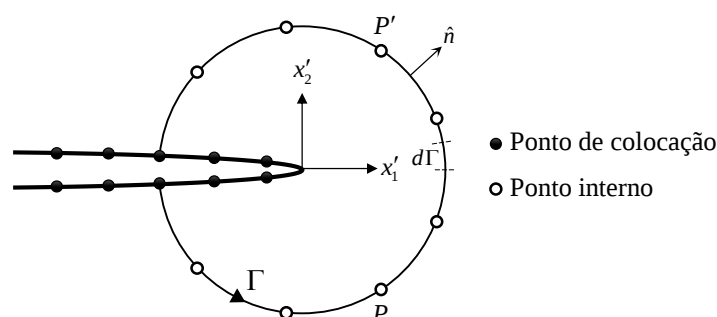


Figura 3 - Caminho utilizado para o cálculo da integral J.

Para a avaliação numérica da integral J no âmbito do MECD, um conjunto de pontos internos é disposto simetricamente em relação ao eixo da fissura ao longo de Γ_j . Após o problema mecânico ser analisado pelo MECD, os deslocamentos e as tensões dos pontos internos são obtidos em uma fase de pós-processamento. Para tanto, as formas discretizadas da Eq. (1) e da Eq. (2) são utilizadas. Em seguida, o vetor de deslocamento e o estado de tensão para cada um dos pontos internos são rotacionados para um sistema de coordenadas referenciado à ponta da fissura, conforme mostrado na Fig. 3. Para determinar K_I e K_{II} separadamente via integral J em um problema em modo misto, a técnica para decomposição de modos proposta por Kitagawa et al. (1978) é empregada. Nessa abordagem, as componentes de deslocamento e tensão ao longo do caminho de integração são separadas em uma parcela simétrica e de outra antissimétrica pelas relações mostradas na sequência:

$$u_j = u_j^I + u_j^{II} \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \quad (11)$$

em que os sobrescritos I e II indicam, respectivamente, as parcelas simétricas (relacionadas ao modo I) e antissimétricas (relacionadas ao modo II). Tais parcelas podem ser obtidas a partir da utilização dos valores dos campos em pontos simétricos em relação ao eixo da fissura (pontos P e P' na Fig. 3) por meio das seguintes equações:

$$u_j^I = \frac{1}{2} [u_j^P + u_j^{P'} (1 - 2\delta_{1j})] \quad u_j^{II} = \frac{1}{2} [u_j^P + u_j^{P'} (1 - 2\delta_{1j})] \quad (12)$$

$$\sigma_{ij}^I = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}^P + \sigma_{ij}^{P'} (2\delta_{ij} - 1)] \quad \sigma_{ij}^{II} = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}^P + \sigma_{ij}^{P'} (1 - 2\delta_{ij})] \quad (13)$$

Com a substituição da Eq. (10) e da Eq. (11) na Eq. (9), a integral J é também decomposta em dois termos, J^I e J^{II} , com expressão geral dada por:

$$J^M = \int_{\Gamma_J} (W^M n_1 - p_j^M u_{j,1}^M) d\Gamma \quad (14)$$

em que $M = I, II$ representa o modo de fratura analisado. O modo I ou o modo II são considerados se as parcelas simétricas ou antissimétricas dos campos elásticos forem adotadas na Eq. (14), respectivamente.

Discretizando Γ_J em elementos com uma aproximação polinomial para os valores nodais, sendo os nós os pontos ao longo do caminho, a integral na Eq. (14) pode ser calculada numericamente utilizando a quadratura Gauss-Legendre. Finalmente, com os valores de J^I e J^{II} , os FIT podem determinados por meio das seguintes relações:

$$K_I = \sqrt{E^* J^I} \quad (15)$$

$$|K_{II}| = \sqrt{E^* J^{II}} \quad (16)$$

em que E^* assume o valor do módulo de elasticidade longitudinal E em um estado plano de tensão e $E/(1-\nu^2)$ em um estado plano de deformação, sendo ν o coeficiente de Poisson.

O valor de K_I é sempre positivo e pode ser determinado diretamente da Eq. (15). Já da Eq. (16), obtém-se apenas a magnitude de K_{II} , uma vez que são possíveis tanto valores positivos quanto negativos. O sinal é positivo se o deslocamento ao longo do eixo x'_1 da face superior for maior que o da face inferior, e é negativo no caso contrário.

Nos casos gerais de solicitação em modo misto, é necessária a definição de uma solicitação equivalente, representada por K_{eq} , que possa ser comparada à resistência ao fraturamento do material para verificar a estabilidade à propagação da ponta. O valor de K_{eq} é dado por uma combinação de K_I e K_{II} a partir de algum critério, usualmente baseado em métodos de tensão ou energia. Neste trabalho, o critério da máxima tensão circunferencial proposto por Erdogan e Sih (1963) é utilizado. Nele, assume-se que a fissura irá crescer na direção θ_p , que é perpendicular à direção na qual $\sigma_{\theta\theta}$ é máximo (ver Fig. 1). Portanto, essa componente de tensão será um valor principal e a componente de cisalhamento associada será nula. Assim, o valor de θ_p pode ser determinado igualando-se a Eq. (8) a zero e isolando θ , resultando na seguinte expressão:

$$\theta_p = \sin^{-1} \left(\frac{K_I K_{II} - 3K_{II} \sqrt{8K_{II}^2 + K_I^2}}{9K_{II}^2 + K_I^2} \right) \quad (17)$$

Com o valor de θ_p , a solicitação equivalente pode ser obtida por meio da Eq. (7) a partir de:

$$K_{eq} = \sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = \cos \left(\frac{\theta_p}{2} \right) \left[K_I \cos^2 \left(\frac{\theta_p}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta_p) \right] \quad (18)$$

O valor de K_{eq} calculado para determinada ponta é comparado à resistência ao fraturamento do material K_{Ic} para verificar a estabilidade à propagação. Essa resistência, também denominada tenacidade, é obtida a partir de ensaios de fraturamento em modo I puro. Dessa forma, admite-se que há crescimento da fissura caso a seguinte desigualdade seja verificada:

$$K_{eq} \geq K_{Ic} \quad (19)$$

4 TÉCNICAS NUMÉRICAS DE SOLUÇÃO

Após determinadas as matrizes **H** e **G** com a aplicação das equações integrais do MECD para os pontos de colocação da discretização adotada (item 2), o processo de obtenção da resposta da estrutura é iniciado. Neste trabalho, para a solução dos problemas de múltiplas fissuras, dois esquemas de análise são adotados: via processo incremental das condições de contorno e via controle do comprimento da fissura crítica. Detalhes sobre essas sequências de análises são apresentadas na sequência.

4.1 Processo de solução incremental

No processo incremental, inicialmente são definidos passos de carga a partir dos valores totais das condições de contorno impostas e do número estabelecido de etapas de carregamento. Em seguida, um passo de carga é aplicado sobre a configuração inicial do problema. A partir da solução do sistema linear representado na Eq. (6), os valores incógnitos do contorno para o equilíbrio são obtidos. Os deslocamentos e as forças de superfície determinados para pontos de colocação são então acrescentados a variáveis acumuladoras (**u_{acum}** e **p_{acum}**, respectivamente). Com os valores acumulados ao final de cada incremento, a estabilidade à propagação de cada uma das pontas das fissuras é verificada. Caso a desigualdade da Eq. (19) seja observada para uma ou mais pontas, inicia-se a fase de propagação. Caso contrário, um novo incremento de carga é considerado

Para as pontas que propagam, o comprimento de crescimento ΔL_f de cada fissura é determinado a partir de:

$$\Delta L_f = \Delta L \frac{K_{eq}}{K_{eq}^{m\acute{a}x}} \quad (20)$$

em que ΔL é o valor do incremento padrão definido na análise e $K_{eq}^{m\acute{a}x}$ é o máximo valor de K_{eq} na análise. Portanto, o tamanho do crescimento das fissuras é admitido como proporcional à sua sollicitação.

A partir do ângulo de propagação e do comprimento de crescimento, são definidos novos pontos de colocação ao longo do caminho de propagação que representam a discretização das novas faces criadas (Fig. 4a-b). As pontas que apresentam maior comprimento de crescimento possuem prioridade na definição das novas faces.

A cada novo ponto de colocação definido, duas novas linhas e colunas, correspondentes aos novos graus de liberdade criados, são adicionadas às matrizes **H** e **G**. Além disso, o comprimento de fissura adicionado pode interceptar um elemento preexistente. Nesse caso, o elemento original cruzado é modificado e um novo elemento é criado (Fig. 4b). Os coeficientes dos graus de liberdade do elemento modificado são alterados nas matrizes **H** e **G**, enquanto novos coeficientes referentes ao elemento criado são adicionados. Na Figura 4c é apresentado o esquema de alteração das matrizes do MEC com a adição e a modificação de elementos na malha da estrutura.

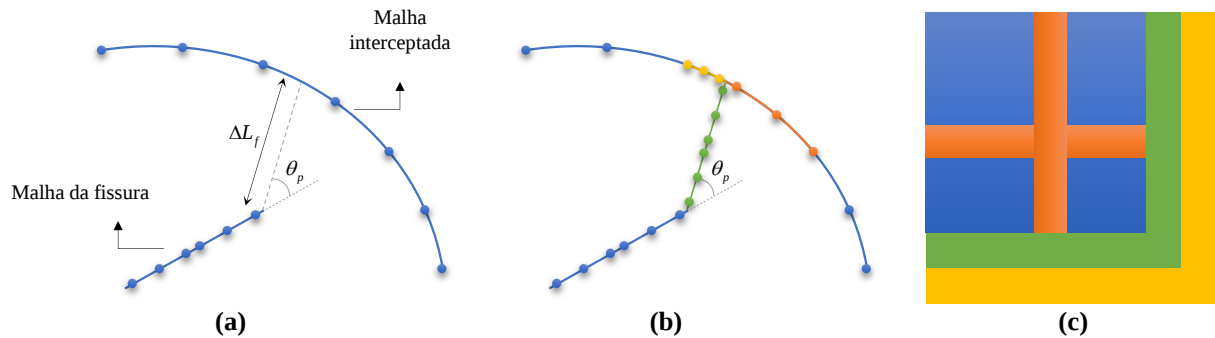


Figura 4 - Representação da (a) malha inicial, (b) do remalhamento na propagação e na interseção de algum elemento durante a propagação de uma fissura e (c) da alteração das matrizes **H e **G** com a criação e modificação de elementos durante a propagação.**

Os valores acumulados de deslocamento e de força de superfície para os pontos de colocação dos elementos modificados e dos elementos criados a partir da divisão de um elemento preexistente são obtidos a partir da interpolação dos valores acumulados dos pontos de colocação do elemento original (Fig. 5a). Já para a determinação dos valores acumulados para as novas faces de fissura, a estrutura é resolvida adotando os valores acumulados como condições de contorno conhecidas para o problema. Dessa forma, após a solução do sistema de equações, os valores acumulados desconhecidos de deslocamento e força de superfície para os pontos de colocação das novas faces, definidos como pontos com contato perfeito, são obtidos (Fig. 5b).

Após a atualização das variáveis acumuladoras para os pontos de colocação modificados e criados, uma etapa de verificação da abertura e do fechamento dos pares de pontos de colocação das fissuras é realizada. Terminada essa etapa, a estabilidade à propagação das

pontas é novamente examinada. Se houver propagação de uma ou mais pontas, uma nova fase de propagação é considerada. Caso contrário, um novo incremento das condições de contorno é aplicado sobre a estrutura.

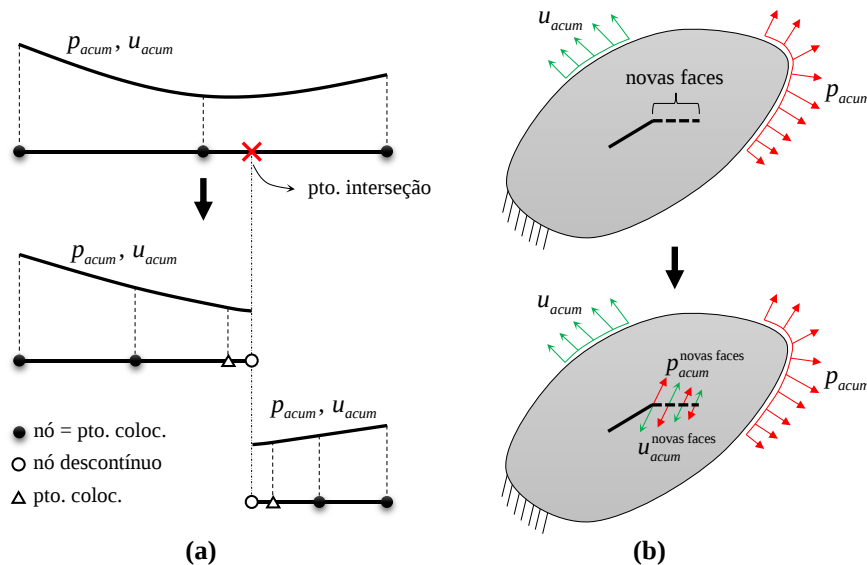


Figura 5 - (a) Interpolação dos valores acumulados de deslocamento e força de superfície para elementos criados a partir da divisão de outro. (b) Determinação dos valores acumulados para novas faces.

Cabe ressaltar que nesse tipo de análise é feito o controle do incremento apenas da força de superfície ou do deslocamento prescrito para um determinado ponto no contorno. Desse modo, situações de equilíbrio instáveis do tipo *snap-back*, no qual ocorre redução tanto da força quanto do deslocamento, não são representadas por esse esquema de solução.

4.2 Processo de solução com controle do comprimento da fissura

Neste processo de solução, é feito o controle sobre o comprimento da fissura crítica na análise, e não mais sobre as condições de contorno do problema. Como tal comprimento é uma função monotonamente crescente, é possível capturar numericamente o fenômeno de *snap-back* e obter uma resposta completa da estrutura. Esse esquema também foi utilizado por Carpinteri e Monetto (1999) na análise de fratura frágil em meios multifissurados.

Nesse esquema de análise, as condições de contorno sobre a estrutura são inicialmente aplicadas com seus valores totais e uma solução é então obtida. Na sequência, os valores de K_{eq} para cada uma das pontas são calculados. Com o máximo valor de K_{eq} relativo à ponta crítica, um fator multiplicador λ pode ser definido da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{K_{Ic}}{K_{eq}^{máx}} \quad (21)$$

Por se tratar de um problema elástico-linear, o princípio da superposição é válido. Dessa forma, multiplicando por λ as respostas obtidas anteriormente, é determinada uma solução na qual apenas para a ponta mais solicitada se verifica a desigualdade da Eq. (19). Em seguida, o

processo de propagação descrito anteriormente é realizado apenas para essa ponta. Outra ponta também pode crescer simultaneamente, desde que seu valor de K_{eq} também seja igual ao máximo na análise. Destaca-se que a fissura crítica que possui o comprimento controlado pode mudar no curso da solução devido à ocorrência de coalescência ou à influência de outras fissuras no modelo.

Esse processo de análise é novamente realizado para a nova configuração obtida a partir da propagação da ponta crítica e se repete até que não existam mais pontas ativas. Com esse esquema, a resposta completa da estrutura é determinada, incluindo situações de equilíbrio instáveis do tipo *snap-back*, sendo o fator λ responsável por recuperar um estado em equilíbrio no qual apenas a ponta crítica está prestes a crescer.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 1: Propagação em modo misto

A estrutura analisada no Exemplo 1 é ilustrada na Fig. 6. Ela consiste de uma chapa retangular de dimensões $20d \times 8d$, espessura $0.5d$, contendo três furos com diâmetro igual a $0.5d$ e um entalhe inicial com comprimento $a = 2.5d$. A dimensão d é adotada igual a 25.4 mm. Sobre o centro da face superior da estrutura é prescrito um deslocamento vertical $\bar{v} = 1.0795$ mm. O caminho de propagação da fissura para esse problema foi determinado experimentalmente no trabalho de Ingraffea e Grigoriu (1990), que será tomado como referência para avaliar a resposta obtida via MECD. Além disso, a evolução dos valores dos FIT e o caminho de propagação obtidos pelo esquema de solução incremental também são comparados com os resultados fornecidos pelo *software* baseado no MEF Franc2D (Wawrzynek; Ingraffea, 1994), que é reconhecidamente eficiente na solução de problemas de fratura. O problema também é resolvido com controle do comprimento da fissura para a obtenção da resposta estrutural completa.

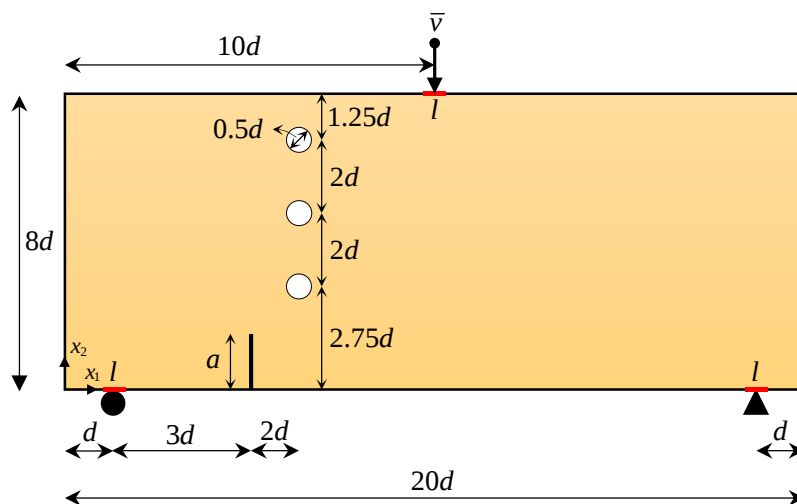


Figura 6 - Representação do problema analisado no Exemplo 1.

O material de composição da estrutura é o acrílico, com módulo de elasticidade $E = 3.1 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.37$ e tenacidade $K_{Ic} = 33.0 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$. O problema é assumido como um estado plano de tensão.

O contorno externo da estrutura é discretizado com 59 elementos quadráticos e 3 elementos lineares, sendo os últimos com comprimento $l = 0.1d$ e sobre os quais são aplicadas as condições de contorno. Para cada abertura (furos) são utilizados 8 elementos quadráticos, enquanto para cada face da fissura inicial são utilizados 14 elementos cúbicos.

Para a análise via controle do comprimento da fissura, um incremento padrão $\Delta L = 0.2d$ é adotado. Na Figura 7 é apresentada a curva força equivalente pelo deslocamento aplicado no ponto central do topo da estrutura. Como pode ser observado, o corpo possui comportamento elástico linear até uma força equivalente máxima de aproximadamente 1.8 kN. Em seguida, a fissura passa a propagar. Com o esquema de controle do comprimento, é possível representar o trecho de *snap-back* da estrutura, conforme mostrado na Fig. 7. As mudanças bruscas de comportamento da curva indicam proximidade da ponta com os furos no modelo. Após a fissura cruzar o furo superior, o deslocamento prescrito total sobre o corpo é imposto, sendo a força equivalente aplicada igual a 0.175 kN.

Já a análise incremental é realizada com controle de deslocamento admitindo 10 passos de carga. Durante a etapa de propagação, é empregado o mesmo incremento no comprimento da fissura utilizado anteriormente. A resposta estrutural para esse esquema também é apresentada na Fig. 7.

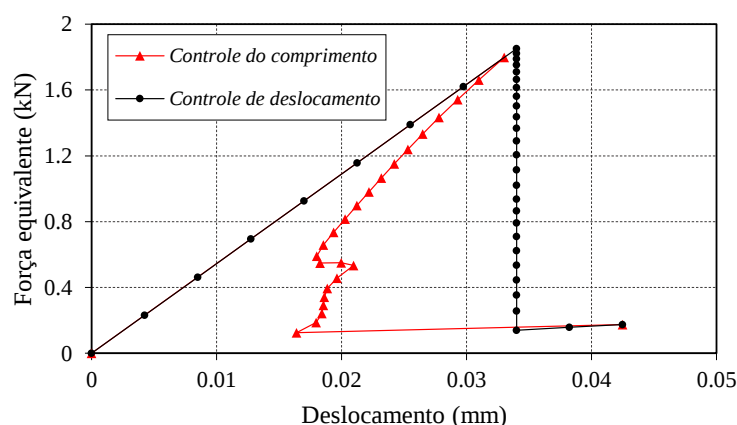


Figura 7 - Curvas força-deslocamento para o ponto central do topo da estrutura considerando as diferentes estratégias de solução utilizadas no Exemplo 1.

Como pode ser observado na Fig. 7, no oitavo incremento de deslocamento a propagação da fissura se inicia, sendo a força máxima equivalente aproximadamente igual a 1.8 kN. Nessa etapa, o deslocamento no topo é mantido constante, enquanto a força equivalente é reduzida pela redistribuição de esforços. A fissura cresce até cruzar a abertura superior e uma nova configuração em equilíbrio estável é recuperada. Os dois últimos incrementos são então prescritos sobre essa configuração, sendo obtida a mesma resposta determinada pelo processo de solução via controle do comprimento. Além disso, nota-se que a rigidez da estrutura, representada pela tangente à curva mostrada na Fig. 7, é bem inferior para a configuração final em relação à inicial devido à degradação material causada pela propagação da fissura.

O caminho de crescimento da descontinuidade determinado neste trabalho é apresentado na Fig. 8a. Nela também são mostrados os caminhos obtidos numericamente via Franc2D e experimentalmente por Ingraffea e Grigoriu (1990). Como pode ser observado, existe uma excelente correspondência entre as respostas. Além disso, o modelo desenvolvido foi capaz de simular a interseção da fissura com a abertura, da mesma forma como ocorre no resultado experimental. Na Figura 8b é apresentada a configuração deslocada final para o problema, destacando a superfície de separação que se forma ao término da análise.

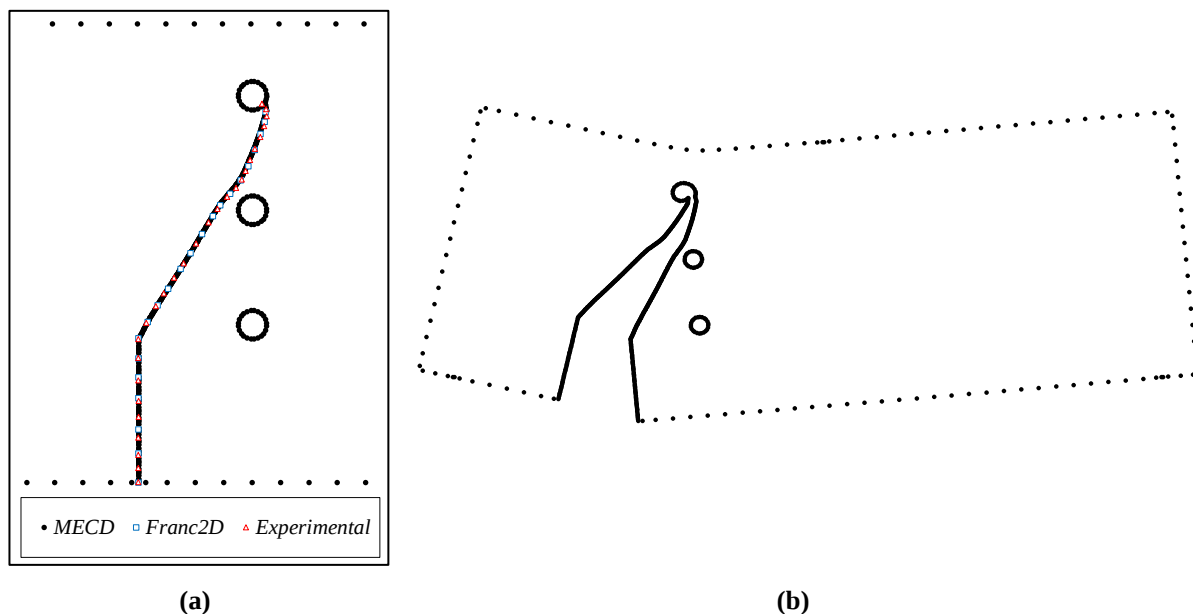


Figura 8 - (a) Representação das diferentes respostas para o caminho de propagação. (b) Configuração deformada da estrutura obtida ao fim da análise via MECD (deslocamentos ampliados em 20 vezes).

Já na Figura 9 é mostrada a evolução dos FIT à medida que a fissura cresce durante o oitavo incremento de deslocamento prescrito. As respostas determinadas via Franc2D também são apresentadas. Observa-se uma boa correspondência entre os valores, sendo que as pequenas diferenças decorrem das diferenças entre os métodos numéricos empregados. Essa boa relação justifica a semelhança entre os caminhos de propagação apresentadas na Fig. 8a, visto que o mesmo critério para a definição da direção de crescimento foi adotado.

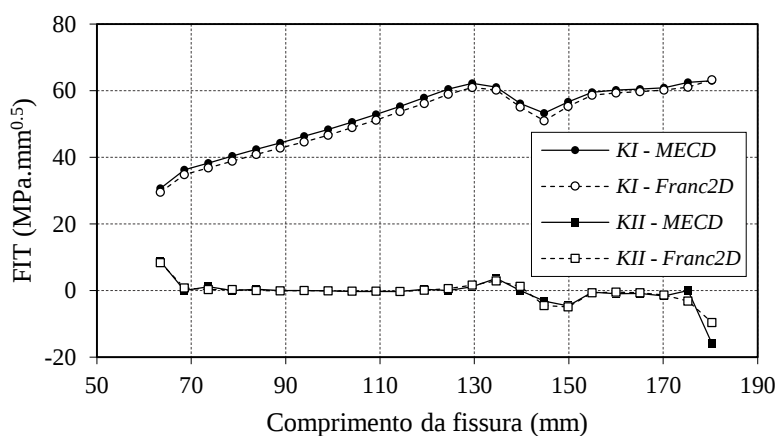


Figura 9 - Variação dos valores dos FIT com o comprimento da fissura obtidos via MECD e Franc2D.

Exemplo 2: Propagação de múltiplas fissuras

Neste exemplo é analisado colapso mecânico do domínio homogêneo multifissurado mostrado na Fig. 10. Essa estrutura também foi examinada por Budyn et al. (2004) via MEFG e por Azadi e Khoei (2011) via MEF. O material é assumido como vidro frágil com módulo de elasticidade $E = 689.5 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e tenacidade $K_{Ic} = 27.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$. O problema é analisado como um estado plano de deformação. A dimensão W é igual a 50.8 mm e o comprimento médio das fissuras é igual a 6.35 mm. A largura da estrutura é admitida como unitária.

A discretização do contorno externo é efetuada com 40 elementos quadráticos e 2 elementos lineares. Os elementos lineares são dispostos nas extremidades esquerda e direita da base da estrutura e possuem dimensão $l = 0.05W$. Ao longo deles são aplicadas as restrições em deslocamento apresentadas na Fig. 10. Já as faces das fissuras são discretizadas com 6 elementos quadráticos.

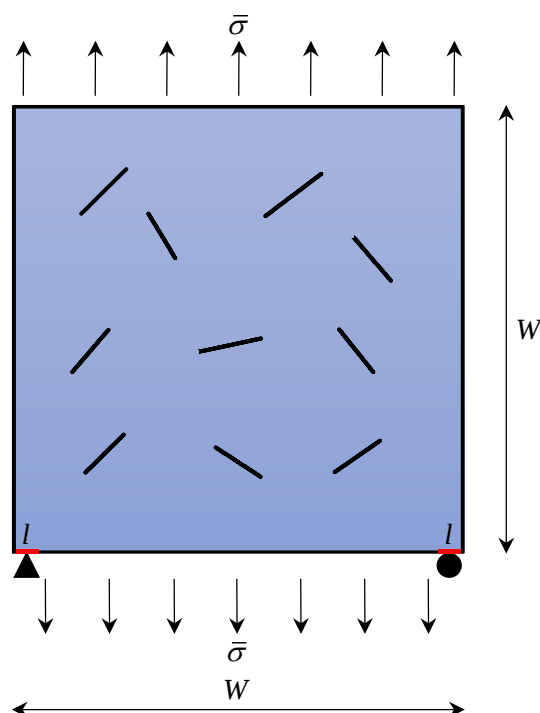


Figura 10 - Representação do problema analisado no Exemplo 2.

A estrutura é tracionada com a aplicação de um carregamento uniformemente distribuído $\bar{\sigma}$ sobre o seu topo e base. Considerando o valor padrão de incremento no comprimento da fissura durante a propagação igual a $\Delta L = 1.778 \text{ mm}$ e realizando o controle do comprimento da fissura crítica, a resposta estrutural apresentada na Fig. 11 é obtida. A deformação equivalente mostrada no gráfico refere-se à média dos deslocamentos no topo da estrutura dividida por W .

Na Figura 11 também são apresentadas as curvas determinadas nos trabalhos de Budyn et al. (2004) e Azadi e Khoei (2011). Como pode ser observado, os comportamentos das curvas são similares. Entretanto, há uma melhor correspondência da resposta obtida neste trabalho

com o resultado determinado por Azadi e Khoei (2011). Além disso, destaca-se a estabilidade da resposta fornecida pelo modelo proposto.

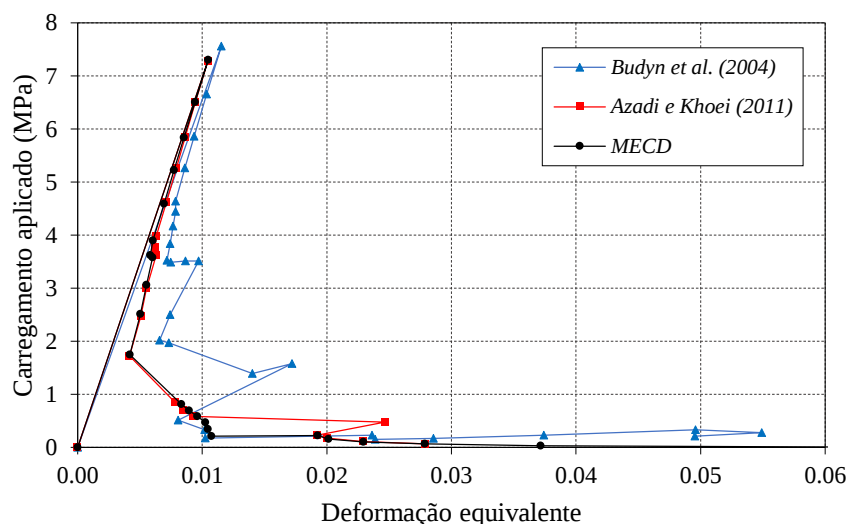


Figura 11 - Resposta estrutural para o problema de chapa com múltiplas fissuras.

Os caminhos de propagação determinados neste trabalho e nos estudos de referência são apresentados na Fig. 12a-c. Observam-se novamente pequenas diferenças entre o caminho determinado por Budyn et al. (2004) com os demais, o que reflete na desconformidade entre as respostas estruturais apresentadas na Fig. 11.

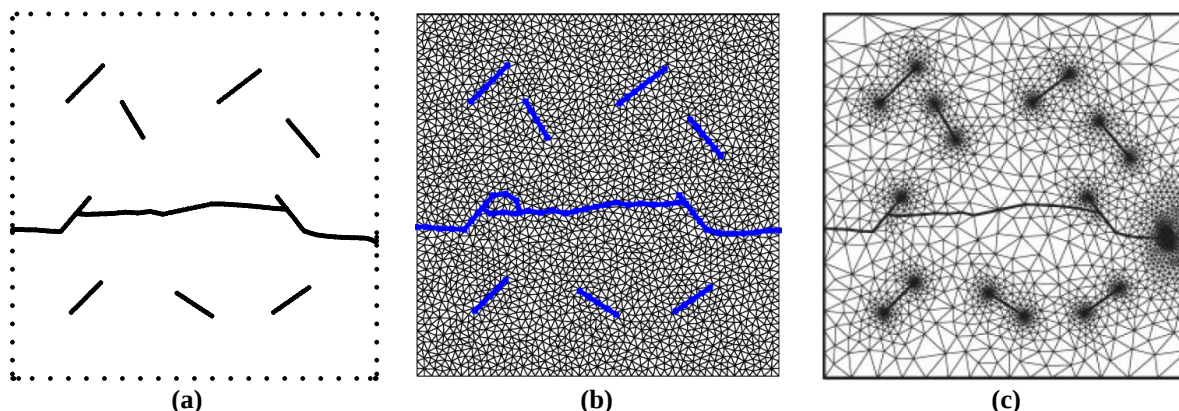


Figura 12 - Comparativo entre os caminhos de propagação determinados (a) neste trabalho, (b) por Budyn et al. (2004) e (c) por Azadi e Khoei (2011).

Por fim, na Fig. 13a-d é apresentada a sequência de evolução das fissuras no corpo. Na Figura 13a, na Figura 13b e na Figura 13c são representadas as interseções da ponta crítica com outras fissuras ou com o contorno externo da estrutura. Já na Figura 13d é mostrada a deformada final, obtida antes da estrutura ser dividida em duas partes. Do exposto, pode-se observar que o modelo proposto é capaz de simular satisfatoriamente o comportamento mecânico de corpos multifissurados, incluindo coalescência.

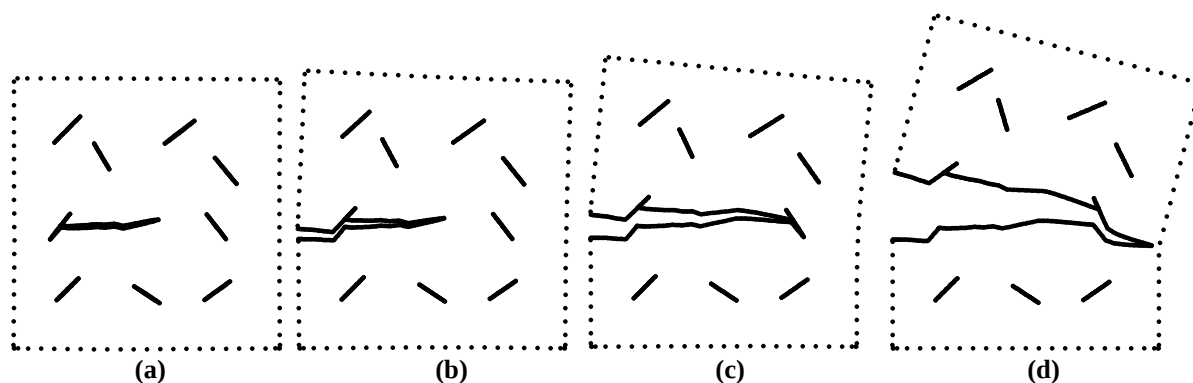


Figura 13 - Evolução das fissuras ao longo do domínio.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho, um modelo numérico baseado no MECD foi desenvolvido para a análise de problemas de propagação de múltiplas fissuras em domínios bidimensionais, homogêneos e isotrópicos. Dentre as vantagens observadas do método na solução desse tipo de problema destacam-se: a definição automática do caminho de propagação no decorrer da análise; a discretização apenas do contorno da estrutura, o que facilita o processo de remalhamento e de alteração do sistema de equações algébricas durante o crescimento das fissuras; e a precisa avaliação dos campos internos próximos às pontas, o que é fundamental para correta verificação da estabilidade à propagação. Problemas de fratura frágil foram avaliados utilizando os princípios da MFEL.

Para o primeiro exemplo analisado, houve uma boa correspondência entre os históricos dos valores dos FIT determinados pelo modelo desenvolvido e pelo Franc2D na situação de controle do incremento de deslocamento. Foi mostrado que o esquema de solução baseado no controle do comprimento da fissura é capaz de fornecer a resposta completa da estrutura, incluindo a região de *snap-back*. Além disso, o caminho de crescimento da fissura obtido numericamente apresentou boa correlação com o determinado experimentalmente.

Já no segundo exemplo, verificou-se uma boa relação entre a resposta estrutural obtida neste trabalho e as respostas de referência. As diferenças encontradas decorrem, principalmente, das diferenças entre os métodos numéricos empregados na solução do problema mecânico. Por meio deste exemplo também se observou a capacidade do código desenvolvido de representar satisfatoriamente o fenômeno de coalescência entre fissuras, o que é imprescindível na avaliação de corpos multifissurados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pela FAPESP, projeto de pesquisa nº 2016/23649-0, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

REFERÊNCIAS

- Aliabadi, M.H., 2002. *The Boundary Element Method: Application in solids and structures*. v.2. New York: Wiley.
- Azadi, H.; Khoei, A.R., 2010. Numerical simulation of multiple crack growth in brittle materials with adaptive remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.85, n.8, p.1017-1048.
- Barsoum, R.S., 1976. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.10, n.1, p.25-37.
- Belytschko, T.; Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.45, n.5, p.601-620.
- Blandford, G.E.; Ingraffea, A.R.; Liggett, J.A., 1981. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.17, n.3, p.387-404.
- Bouchard, P.O.; Bay, F.; Chastel, Y.; Toven, I., 2000. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.189, n.3, p.723-742.
- Budyn, É.; Zi, G.; Moës, N.; Belytschko, T., 2004. A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.61, n.10, p.1741-1770.
- Carpinteri, A.; Monetto, I., 1999. Snap-back Analysis of Fracture Evolution in Multi-Cracked Solids Using Boundary Element Method. *International Journal of Fracture*, v.98, n.3/4, p.225-241.
- Chan, S.K.; Tuba, I.S.; Wilson, W.K., 1970. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, v.2, n.1, p.1-17.
- Cruze, T.A., 1972. Numerical evaluation of elastic stress intensity factor by the Boundary-integral Equation Method. In: Swedlow, J.L. (ed.). *The surface crack: Physical problems and computational solutions*. New York: American Society of Mechanical Engineers.
- Duga, J.J.; Fischer, W.H.; Buxbaum, R.W.; Rosenfield, A.R.; Buhr, A.R.; Honton, E.J.; McMillan, S.C., 1983. The economic effects of fracture in the United States: Part 2. *National Bureau of Standards Special Publication*, n.647-2.
- Erdogan, F.; Sih, G.C., 1963. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*, v.85, n.4, p.519-527.
- Faria, L., 1991. *The economic effects of fracture in Europe*. Technical Report Study Contract No. 32105, Commission of the European Communities.
- Hong, H.K.; Chen, J.T., 1988. Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, v.114, n.6, p.1028-1044.
- Ingraffea, A.R.; Grigoriu, M., 1990. *Probabilistic Fracture Mechanics: A Validation of Predictive Capability*. Report 90-8 for AFOSR Project. Ithaca.

- Kitagawa, H.; Okamura, H.; Ishikawa, H., 1978. Application of J-integral to mixed-mode crack problems. *Transactions of the JSME*, n.780-4, p.52-54.
- Lee, K.Y.; Choi, H.J., 1988. Boundary element analysis of stress intensity factors for bimaterial interface cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, v.29, n.4, p.461-472.
- Leonel, E.D.; Venturini, W.S., 2010. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.34, n.12, p.1092-1099.
- Leonel, E.D.; Venturini, W.S., 2011. Multiple random crack propagation using a boundary element formulation. *Engineering Fracture Mechanics*, v.78, n.6, p.1077-1090.
- Melenk, J.M.; Babuska, I., 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.139, n.1-4, p.289-314.
- Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.46, n.1, p.131-150.
- Oliveira, H.L.; Leonel, E.D., 2013. Dual BEM Formulation Applied to Analysis of Multiple Crack Propagation. *Key Engineering Materials*, v.560, p.99-106.
- Portela, A.; Aliabadi, M.H.; Rooke, D.P., 1992. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.33, n.6, p.1269-1287, 1992.
- Portela, A.; Aliabadi, M.H.; Rooke, D.P., 1993. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers and Structures*, v.46, n.2, p.237-247.
- Reed, R. P.; Smith, J. H.; Christ, B. W., 1983. The economic effects of fracture in the United States: Part 1. *National Bureau of Standards Special Publication*, n.647-1.
- Rice, J. R., 1968. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v.35, n.2, p.379-386.
- Tan, C.L.; Gao, Y.L., 1990. Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, v.36, n.6, p.919-932.
- Telles, J. C. F., 1987. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.24, n.5, p.959-973.
- Warwzynek, P.; Ingraffea, A., 1994. *Franc2D: a two-dimensional crack propagation simulator* (Version 2.7 User's Guide). NASA Contractor Report 4572.
- Westergaard, H.M., 1939. Bearing pressures and cracks. *Journal of applied mechanics*, v.6, p.49-53.