

Florianópolis - Santa Catarina - Brazil

OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA VIA MEF PARA O PROCEDIMENTO DECISÃO DO POSICIONAMENTO ÓTIMO DOS APOIOS

HEURISTIC OPTIMIZATION VIA FEM FOR PROCEDURE DECISION OF THE OPTIMAL POSITIONING OF THE SUPPORTS

Rafael Silva e Souza

rafael.silva.souza@usp.br

Aluno de Graduação de Engenharia Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)

São Paulo – SP-Brasil.

Valério Silva Almeida

valerio.almeida@usp.br

Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)

São Paulo – SP-Brasil.

Hélio Luiz Simonetti

helio.simonetti@ifmg.edu.br

Professor do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG)

Campus Betim, Rua Itamarati, 140, São Caetano Betim, MG-Brasil, 32677-564

Abstract.

Structural elements constituted of plates are widely used in structural engineering, and it is of great interest to obtain optimization methods for their design. This work aims to develop a program of computational optimization of the position of supports in smooth slabs, based on the finite element method, in order to minimize the steel area resistant to the bending moment, using genetic algorithms. These algorithms reproduce mathematically the mechanisms of natural selection of species. Methods like this have relative ease in finding the proximity of the global problem of great, however there is no guarantee that the global optimum is achieved with precision. At the end of this article, the results obtained using genetic algorithms will be compared with those obtained using the traditional method of armor sizing, verifying the applicability of this computational system.

Keywords: Plates, Optimization, Genetic Algorithms, position of supports, Finite Element Method.

INTRODUÇÃO

Estudos de soluções otimizadas sempre atraem a atenção da área de Engenharia Estrutural. Especificamente, na área de projetos de estruturas ou elementos em concreto armado, busca-se sempre obter baixo custo de produção, tal como economia no peso de aço, no volume de concreto, na área de formas, etc. Mas, respeitando as restrições impostas tais como os limites de segurança última e de serviço, conforme preconizadas pelas normas correntes de projeto em concreto armado no país.

Dentre os métodos de otimização existentes, pode-se classificá-los em métodos determinísticos e estocásticos. Os métodos determinísticos, para determinados problemas, apresentam eficiência e rapidez, nem sempre tendo um nível de garantia que o ótimo global será encontrado, uma vez que se podem obter ótimos locais em problemas de ordem superior, o que é comum para muitos problemas reais na Engenharia. Já os métodos estocásticos são capazes de localizar facilmente a proximidade do ótimo global, contudo, como é baseado na geração aleatória de cada variável - dentro de uma população estabelecida; à medida que as variáveis aumentam, sua análise cresce exponencialmente, o que inviabiliza em termos de tempo de processamento seu uso em problemas com um grande número de variáveis. Porém, para casos com poucas variáveis de interesse, em virtude de sua facilidade de inserção de seu modelo de busca dentro da formulação do problema de análise estrutural, bem como a fácil imposição de funções de restrição, sem a necessidade de intrincadas manipulações algébricas, faz com que seu uso seja interessante, face aos bons resultados apresentados.

Vários métodos de busca estocástica existem na literatura, mas, nesse trabalho foi empregado o método de otimização por meio de Algoritmos Genéticos (AG's), é um método estocástico de otimização e busca que faz uso de conceitos da Genética e é baseado nos mecanismos de evolução de populações de seres vivos. Foi inspirado no princípio da seleção natural e sobrevivência do mais apto estabelecido por Charles Darwin em seu livro "*The Origin of Species em 1859*". Os princípios básicos de AGs foram rigorosamente estabelecidos em Holland (1975) e podem ser encontrados em muitas referências bibliográficas como exemplo: Goldberg (1989) e Michalewicz (1996).

De modo que o objetivo deste trabalho, realizado como um projeto de iniciação científica durante o primeiro semestre de 2017, é o desenvolvimento de um modelo computacional de otimização da área de armadura resistente a flexão em lajes lisas ou cogumelos, ou seja, lajes apoiadas diretamente sobre pilares com ou sem capitéis, onde a placa é formulada pela teoria clássica de Kirchhoff-Love via o Método dos Elementos Finitos (MEF) com o uso do elemento DKT em conjunto com as bibliotecas de algoritmos genéticos da linguagem de programação de alto nível Python.

Por fim, apresentam-se resultados de exemplos numéricos para diferentes geometrias e posições dos pilares na laje, onde se avaliam as posições ótimas destes de modo a levar a menor quantidade de armadura à flexão nessa laje.

1 METODOS DE OTIMIZAÇÃO GLOBAL

Os métodos de otimização podem ser classificados como determinísticos, tais com indicados em Horst e Tuy (1990), Grossmann (1996), Pinter (1996), Esposito e Floudas (2000), e estocásticos, como apresentados em Guss *et al.* (1995), Ali *et al.* (1997), Törn *et al.* (1999). Métodos estocásticos para otimização global acabam por se basear em abordagens

probabilísticas. Dado que elementos aleatórios estão envolvidos, estes métodos têm apenas garantias teóricas fracas de convergência para a solução global.

Métodos determinísticos são aqueles que podem fornecer um nível de garantia de que o ótimo global será localizado. No entanto, é importante notar que, embora métodos determinísticos possam garantir o ótimo global para certos problemas Otimização Global (OG), nenhum algoritmo pode resolver problemas OG gerais com certeza em tempo finito (Guus *et al.* 1995). De fato, embora os métodos determinísticos tenham propriedades de convergência teórica sólidas, o esforço computacional associado aumenta rapidamente, frequentemente de forma exponencial, com o tamanho do problema.

Em contraste, muitos métodos estocásticos, também conhecidos como heurísticos, podem localizar a vizinhança de soluções globais com relativa eficiência, em contrapartida o custo a pagar por isso é que não existe a garantia que ótimo alcançado seja o global. A grande vantagem dos métodos estocásticos é que geralmente são bastante simples de implementar e usar, e eles não exigem a transformação do problema original, que pode ser tratada como uma caixa preta. A seguir serão apresentados métodos determinísticos e estocásticos mais populares.

1.1 Métodos Determinísticos

Os métodos determinísticos, também denominados de métodos clássicos, em geral são baseados no cálculo de derivadas de primeira ordem ou em aproximações destas, ou também no cálculo de derivadas parciais de segunda ordem. A procura do ponto ótimo usa as coordenadas do ponto corrente (x_k) como ponto de partida para a próxima iteração ($k + 1$). Em geral, a resolução de problemas sem restrições consiste em se aplicar, de forma iterativa, a Eq. (1):

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k \quad (1)$$

Onde λ_k é o tamanho do passo e d_k é a direção de busca do ponto ótimo.

A seguir serão apresentados alguns dos métodos mais populares de otimização sem restrições: o método do Gradiente, o de Newton, o dos Gradientes Conjugados e os métodos Quase-Newton, e também métodos de minimização com restrição: o método das Penalidades, o das Barreiras e o método do Lagrangeano Aumentado.

1.1.1 Método do Gradiente

Também conhecido como método de Cauchy ou máximo declive (steepest descent), é um dos mais antigos e conhecidos métodos de minimização de funções. É bastante simples em termos computacionais, sua convergência é lenta. É um método que utiliza poucas informações e a convergência depende da forma da função ou do peso relativo de cada variável, exige apenas as derivadas de primeira ordem para o cálculo do gradiente e é definido pela Eq. (1) onde $d_k = -\nabla f(x_k)$ e λ_k é um escalar não negativo que minimiza a função $f(x_k + \lambda_k d_k)$.

1.1.2 Newton

A direção de busca dos métodos de Newton, segundo Nocedal e Wright (2000) é extraordinária já que o método converge rapidamente para a solução ótima quando é adotado um ponto de partida suficientemente próximo da solução. Essa convergência é tipicamente quadrática. Além disso, quando a vizinhança da solução é alcançada, a convergência geralmente ocorre em poucas iterações. A principal desvantagem da direção de Newton é a utilização da inversa da matriz Hessiana e os cálculos das derivadas de 2ª ordem dos elementos desta matriz, na maioria dos casos, é um processo caro e sujeito a erros.

O método mais comum de otimização sem restrições é o cálculo diferencial, neste tipo de otimização de uma função objetivo (FO) do tipo $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ com N variáveis de projeto $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$, tem o seu valor máximo ou mínimo dentro de um domínio de projeto R^N quando duas condições forem satisfeitas, em primeiro lugar, quando os pontos x^* em que as derivadas parciais N são todos iguais a zero, a Eq. (2) é válida.

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad (2)$$

A segunda condição é quando as segundas derivadas da FO nesses pontos x^* , denominada matriz hessiana de f (aqui representado por H), é positiva ou negativa definida. Este determina se a FO atinge um mínimo ou um máximo nesse ponto. Assim, a matriz hessiana é representada pela Eq. (3).

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^*) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x^*) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(x^*) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Este parece ser um método muito elegante, no entanto, as condições de H para ser positiva ou negativa definida pode não ser sempre satisfeita, exigindo derivadas de ordens superiores da FO para satisfazer estas condições. Embora possa ser usado para localizar o ótimo de sistemas estruturais simples, a FO deve ser duas vezes diferenciáveis, algo que pode não ser sempre possível, especialmente quando se lida com domínios estruturais discretos.

O procedimento iterativo é definido pela Eq. 4:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k [F(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (4)$$

Onde $d_k = [F(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$ é a direção de busca pelo ótimo e $[F(x_k)]^{-1}$ é a inversa de H é corrige a direção do ótimo.

Para garantir a convergência desse método a matriz H deve ser não singular e positiva definida. Assim, pode-se garantir que d_k seja uma direção de descida.

1.1.3 Multiplicadores de Lagrange

Para o problema de otimização restrita, que tem restrições de igualdade, uma vez que cada função $g_i(x) = b_i$, o problema não é afetado se a FO $f(x)$ for substituída pela função Lagrangeana $L(x, \lambda)$, Eq. (5).

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^M \lambda_i (g_i(x) - b_i) \quad (5)$$

Isto é verdadeiro para qualquer valor dos termos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_M$ que são denominados multiplicadores de Lagrange. O mais importante sobre os multiplicadores é que, se forem encontrados o ponto x tal que $L(x, \lambda)$ é minimizada todas as restrições do $g_i(x) = b_i$ são satisfeitas e o problema restrito original também é resolvido.

Para encontrar os pontos $x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_M$ que minimizam a Eq. (5), encontra-se a derivada e iguala com as restrições de igualdade, de tal modo que:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) - b_i = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, M \quad (7)$$

Existem agora um sistema de $N+M$ equações com $N+M$ incógnitas que na maioria dos casos pode ser resolvido.

1.1.4 Método Quase-Newton – (BFGS)

O mais popular dos métodos Quase-Newton é o BFGS, denominado dessa maneira para referir-se aos idealizadores da técnica: Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno. A ideia básica consiste em encontrar uma aproximação da matriz hessiana evitando o cálculo de sua inversa. Uma formulação do método BFGS é encontrada em Riberio e Karas (2013).

Métodos Quase-Newton, assim como o método de máxima de descida, necessitam que apenas o gradiente da função objetivo esteja disponível em cada iteração. Por não necessitar de segundas derivadas, métodos quase-Newton podem ser até mais eficientes do que métodos de Newton em alguns casos.

O procedimento iterativo do para otimizar a função f , considera as direções de busca dadas por:

$$d_k = -H_k \nabla f(x^k) \quad (8)$$

Onde $H_k \in R^{N \times N}$ é definida positiva.

Usando uma aproximação quadrática para f em torno de x_k tem-se

$$m_k(d) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \quad (9)$$

Onde $B_k \in R^{N \times N}$ é uma matriz simétrica que representa uma aproximação da matriz $\nabla^2 f(x^k)$.

Se B_k for definida positiva, o minimizador do modelo quadrático é dado por $-B_k^{-1} \nabla f(x^k)$, assim (8) é obtida fazendo $B_k = H_k^{-1}$.

Observa-se que a direção d_k é uma direção de descida para a função f se H_k for positiva definida.

1.2 Métodos Estocásticos

Durante as últimas décadas, tem crescido de forma considerável a implementação de métodos de otimização estocásticos. Estes métodos também são conhecidos como métodos heurísticos. Alguns exemplos dos métodos heurísticos são os métodos naturais que tentam simular os processos usados na natureza para resolver problemas complexos. Entre estes métodos pode-se citar: Simulated Annealing, Otimização por Colônia de Formiga, Computação Evolutiva, etc. Estas técnicas trabalham com um conjunto de pontos, necessitam de muitas avaliações da FO e sua maior desvantagem é o alto custo computacional.

1.2.1 Simulated Annealing (SA) - “recozimento simulado”

O Simulated Annealing (recozimento simulado) é um método popular e extremamente confiável na busca pelo ótimo global, isto é, tem uma probabilidade maior de encontrar o ótimo mesmo com um grande número de variáveis de projeto. Esse método foi criado na simulação de certos fenômenos naturais, por exemplo, no resfriamento de metais, onde os átomos adotam a configuração mais estável à medida que ocorre um resfriamento lento deste metal, Kirkpatrick *et al.* (1983), van Laarhoven e Aarts (1987).

1.2.2 Otimização por Colônia de Formigas (ACO)

A otimização por colônia de formigas (Ant Colony Optimization - ACO) foi proposta por Dorigo e Di Caro (1999). O ACO é inspirado no comportamento de formigas reais na busca de alimentos, onde mesmo com visão debilitada, podem encontrar o caminho mais curto entre a fonte de alimento e sua colônia. A formiga em geral começa sua busca por alimento de forma aleatória e deposita no solo uma substância química chamada feromônio, formando uma trilha. Quando uma formiga encontra uma trilha de feromônio, ela é atraída e tem preferência em seguir as trilhas com maior quantidade desta substância. Por ser uma substância volátil, o feromônio evapora com o passar do tempo. Quanto mais formigas seguem um determinado caminho, mais difícil é do feromônio evaporar e mais atrativo se torna para as próximas formigas que porventura passarem por este caminho. Desta maneira, caminhos longos e poucos utilizados são abandonados levando a definição de caminhos mais curtos entre a fonte de alimento e a colônia. Os parâmetros do ACO são: o peso relativo da trilha, a atratividade da trilha, o tamanho da população e a taxa de evaporação dos feromônios.

1.2.3 Computação Evolutiva (CE)

Computação evolutiva (CE), também conhecida como métodos biologicamente inspirados, ou métodos estocásticos baseados na população. Esta é uma classe muito popular de métodos baseados nas ideias de evolução biológica (Fogel, 2000), que é impulsionada

pelos mecanismos de reprodução, mutação e o princípio de sobrevivência do mais apto (Darwin, 1859). Da mesma forma que a evolução biológica, os métodos de computação evolutiva geram melhores e melhores soluções criando iterativamente novas "gerações" por meio desses mecanismos em forma numérica. Os métodos da EC são geralmente classificados em quatro grupos: Algoritmos Genéticos (AGs), Goldberg (1989), Holland (1992), Michalewicz (1996), Programação Evolutiva (PE), Fogel *et al.* (1966), Estratégias Evolutivas (EE), Schwefel (1995), Beyer e Schwefel (2002) e Programação Genética, Koza (1992). As diferenças entre os algoritmos são simples, porém significantes. Os AG's empregam operadores *crossover* e *mutação*, a PE e EE usam apenas *mutação* para o procedimento de otimização enquanto a PG é uma generalização dos AG's de forma a evoluir programas de computador. Os AG's, objeto de estudo deste artigo, é tratado com mais detalhe a seguir.

2 ALGORÍTMOS GENÉTICOS – AG'S

Os algoritmos genéticos (AG's) foram desenvolvidos por Holland (1992) e popularizados por Goldberg (1989), cujos objetivos principais dos autores foram investigar e projetar sistemas artificiais similares referentes aos princípios naturais das espécies.

Segundo Cheung e Reis (2001), os algoritmos genéticos iniciam o processo de busca criando um conjunto inicial aleatório de soluções possíveis denominado como "população", cujos indivíduos são denominados "cromossomos", o tamanho da população é preservado ao longo de cada geração. O cromossomo é uma string, cujas características ou "genes" podem ser codificadas através de representação binária, real, dentre outras. Os cromossomos tendem a evoluir-se gradativamente através de sucessivas iterações produzindo novas gerações de indivíduos mais aptos ou capazes em termos da função de aptidão.

A cada geração, os cromossomos são avaliados através da função aptidão, fazendo a classificação das soluções, para selecionar e formar a próxima geração, considerando que os cromossomos com altos valores da função objetivo têm elevada probabilidade de serem preservados para a próxima geração. Depois de várias iterações o algoritmo converge para uma solução do problema ótima ou subótima.

2.1 Etapas do Processo de otimização utilizando Algoritmos Genéticos (AG's)

A seguir serão descritas etapas realizadas pelos algoritmos genéticos no processo de otimização.

2.1.1 Representação dos Parâmetros

A codificação é a forma de representação de uma possível solução do problema, podendo ser feita por codificação binária, como feito nos trabalhos de Holland na década de 70, ou representação com números reais e inteiros, conforme tem sido realizado recentemente.

Os AG's trabalham com os códigos de espaço (cromossomos) e de solução. As operações genéticas trabalham no código de espaço, já as etapas de avaliação e seleção trabalham no espaço de solução.

Os "cromossomos" são, analogamente, estruturas de dados. Estas estruturas contém as possíveis soluções para o problema a ser maximizado ou minimizado.

2.1.2 População Inicial

A população inicial é criada, em geral, aleatoriamente, através de rotinas computacionais existentes nos compiladores. O número da quantidade de indivíduos da população inicial é definido a cada problema, contudo, se a população for pequena existe a possibilidade de criar alguns locais do espaço de busca podem não estar sendo representados.

2.1.3 Função aptidão

A função aptidão avalia a capacidade de sobrevivência de um indivíduo da população durante as iterações, classificando as soluções indicando as chances de reprodução de cada um. A classificação pode ser feita através de uma ordenação das soluções de forma decrescente ou crescente as suas aptidões, respectivamente ao problema de maximização ou minimização.

2.1.4 Seleção

A seleção dos indivíduos da população é baseada na “sobrevivência do mais apto”, onde as soluções com mais alta probabilidade de sobrevivência são mantidas para o conjunto que formará a próxima solução, chamada de população temporária, enquanto as soluções com baixa aptidão serão descartadas da próxima geração.

2.1.5 Reprodução

Na etapa de reprodução, o algoritmo genético tenta criar soluções novas e melhores, baseado na população da geração anterior.

Como primeiro passo, toda a população temporária é agrupada em pares, gerando um conjunto de progenitores potenciais.

Nessa etapa é aplicado um operador genético sobre os progenitores, de modo que sejam geradas novas soluções. O princípio dos operadores genéticos é transformar a população com as gerações, de forma a obter um resultado satisfatório no final do processo, sendo necessários para que a população se diversifique, mas mantenha as características adquiridas pelas gerações anteriores.

Os operadores genéticos podem ser utilizados de diversas maneiras, os mais comuns são: Cruzamento de um Ponto, Cruzamento Multipontos, Cruzamento Uniforme.

2.2 Estrutura básica de um AG's

A ideia básica do funcionamento dos AG's é tratar as possíveis soluções do problema como “indivíduos” de uma “população” que irá evoluir a cada iteração “geração”. Neste sentido, é necessário construir um modelo onde os indivíduos sejam as soluções do problema. A seguir, figura 1, está o fluxograma para representação do algoritmo descrito na seção 2.1.

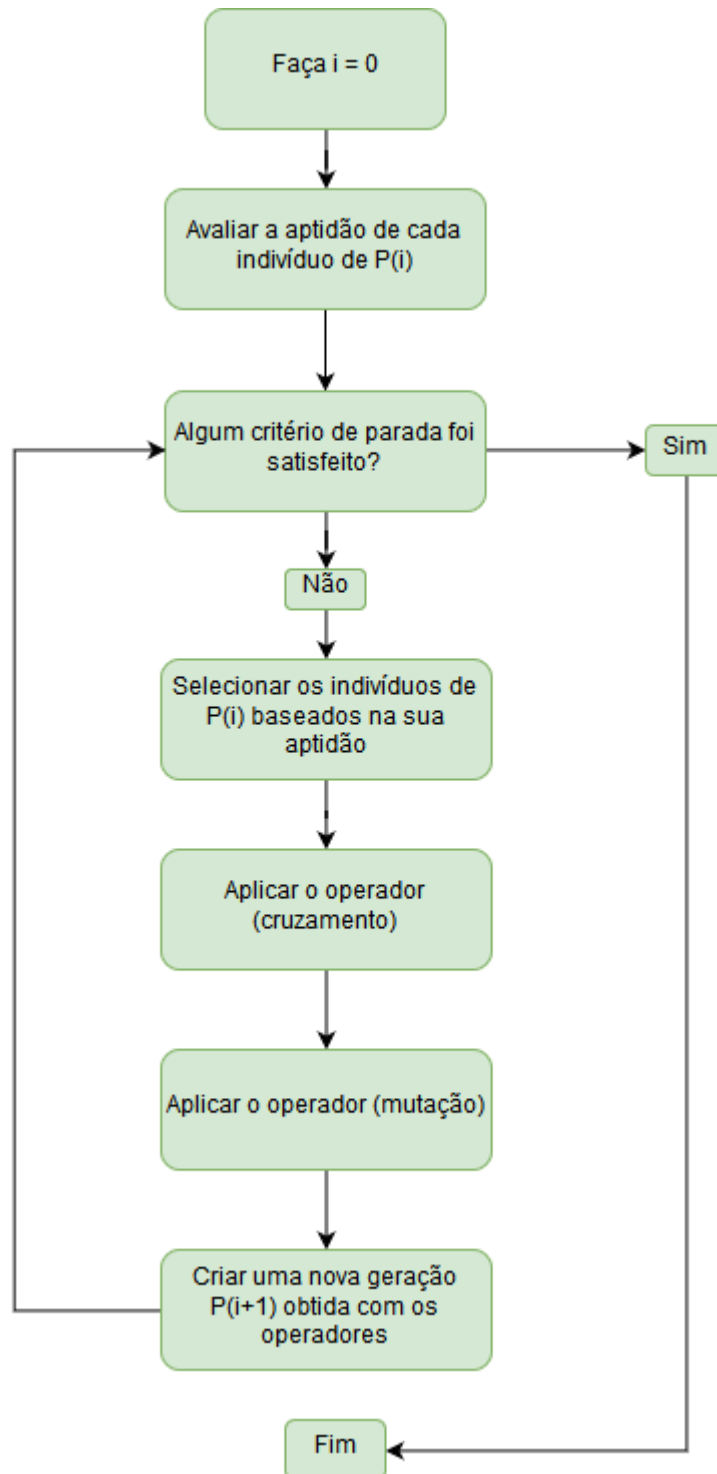


Figura 1-Fluxograma de um AGs.

3 FORMULAÇÃO DE PLACAS

Este artigo utiliza o código computacional já existente, desenvolvido na tese de Almeida (2003), que utiliza em sua formulação a teoria de Kirchhoff-Love de placas com elementos finitos triangulares, obtidos do trabalho de Batoz (1980).

Resumidamente, a teoria de Kirchhoff possui as seguintes hipóteses:

- A deformação longitudinal vertical, em qualquer ponto da placa, é nula;
- Para qualquer ponto na superfície média da placa existe apenas deslocamento vertical;
- Uma linha reta e normal ao plano à superfície média antes do carregamento em um ponto permanece reta e normal ao plano tangente à superfície média após o carregamento.

Sendo $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$ os vetores de tensão e deformação, respectivamente, para a situação bidimensional de placas, onde $\sigma_z = 0$, com os eixos x , y e z são indicados na figura 2.

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}] \quad (10)$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \quad (11)$$

A relação tensão-deformação é como:

$$\{\sigma\}^T = [D]\{\varepsilon\} \quad (12)$$

Onde $[D]$ é a matriz de elasticidade do material, com:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_b & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

Explicitando a matriz de elasticidade, tem-se:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{(1-\nu_{xy} \cdot \nu_{yz})} & \frac{E_y \cdot \nu_{xy}}{(1-\nu_{xy} \cdot \nu_{yz})} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_x \cdot \nu_{yx}}{(1-\nu_{xy} \cdot \nu_{yz})} & \frac{E_y}{(1-\nu_{xy} \cdot \nu_{yz})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xz} \cdot f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} \cdot f \end{bmatrix} \quad (14)$$

Sendo $[D_b]$ e $[D_s]$ as submatrizes que correspondem as parcelas de flexão e cisalhamento da matriz de elasticidade, com f o fator de correção por cisalhamento. Para o caso da placa ser ortótropa, E_x, E_y são os módulos de elasticidade longitudinal nas direções x e y , G_{xy}, G_{xz} e G_{yz} representam os módulos de elasticidade longitudinal nos planos xy, xz e yz e ν_{xy}, ν_{yz} e ν_{yx} os coeficientes de Poisson também em seus respectivos planos.

Para o presente caso, a placa é isótropa, de modo que os sub-índices podem ser supridos e considerando o fator de correção por cisalhamento unitário.

3.1 – Elemento Finito DKT: Teoria Discreta de Kirchhoff

Este elemento é deduzido explicitamente no trabalho de Batoz (1980), não sendo feito nesse artigo. O elemento finito utilizado corresponde a um elemento triangular de placa, com nove graus de liberdade (uma translação e duas rotações) localizados nos três vértices, figura 1. Mas, vale a pena destacar que se emprega na formulação também nós auxiliares no ponto médio de cada lado, com o grau de liberdade de rotação normal ao seu lado, os quais são interpolados para os vértices. A teoria de Reissner é aplicada na sua formulação inicial, mas a hipótese de Kirchhoff é aplicada nos vértices e nos pontos médios dos lados. De modo que as hipóteses adotadas para a construção do elemento são as seguintes:

- Rotações das seções sobre o elemento variam quadraticamente;
- A hipótese de placa fina de Kirchhoff é aplicada nos vértices e nos pontos médios dos lados;
- O deslocamento vertical ao longo de cada lado varia cubicamente;
- A rotação da seção varia linearmente à normal do lado do elemento.

Assim, desenvolvendo a formulação empregando a teoria do Método dos Elementos Finitos, chega-se a um sistema linear do tipo:

$$[k]_{DKT}^e \cdot \{u\} = \{f\} \quad (15)$$

Onde $[k]_{DKT}^e$ é a matriz de rigidez no sistema global de cada elemento finito “e”, de dimensão 9 x 9, onde cada termo pode ser visto explicitamente em Batoz (1980).

O termo $\{u\}$ é vetor de deslocamentos nodais do elemento “e” localizados nos nós, conforme indicado na figura 1, onde:

$$\{u\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}\} \quad (16)$$

E w , θ_x e θ_y são os deslocamentos transversais e rotações nas respectivas direções de cada nó do vértice do elemento “e”. E $\{f\}$ é o vetor de ações atuantes, dado por:

$$\{f\}^T = \frac{q \cdot A}{3} \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\} \quad (17)$$

Com q sendo o carregamento distribuído constantemente no elemento e A sua área.

Para a geração da matriz de rigidez da estrutura que possui “ne” elementos finitos, faz-se a soma de todas as matrizes, $[k]_{DKT}^e$ de modo a inserir a incidência de cada uma delas na sua devida posição nodal de apontamento. Da mesma forma, criam-se os vetores nodais incógnitos de deslocamentos e das forças atuantes, levando ao sistema linear a ser resolvido, após imposição de restrições, que leve a um problema equilibrado, e resolve-se o sistema linear:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (18)$$

Onde:

$$[K] = \sum_{i=1}^{ne} [k]_{DKT}^e \text{ e } [F] = \sum_{i=1}^{ne} \{f\} \quad (19)$$

Após a resolução do sistema linear da Eq. (18), obtém-se os esforços de cada elemento

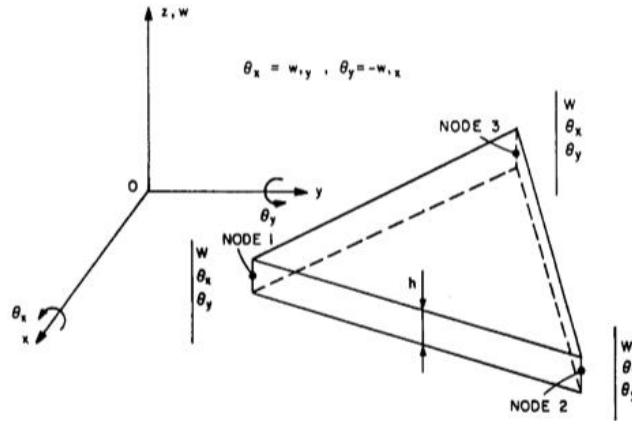


Figura 2 - Elemento DKT de nove graus de liberdade. Batoz (1980).

E os momentos a flexão são:

$$M(x, y) = [D_b] \cdot B(x, y) \{u\} \quad (20)$$

Conforme Batoz (1980), para ações aplicadas sobre na superfície média considera-se o carregamento distribuído como forças concentradas sobre os nós, onde q é a carga uniformemente distribuída, e A é a área de cada elemento.

Sendo o vetor $\{u\}$ referente aos deslocamentos nos graus de liberdade do elemento, sendo dados por:

$$\{u\} = \{w_1 \quad q_{x1} \quad q_{y1} \quad w_2 \quad q_{x2} \quad q_{y2} \quad w_3 \quad q_{x3} \quad q_{y3}\} \quad (21)$$

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para validação do modelo computacional desenvolvido foram feitas otimizações de lajes retangulares considerando os casos para 4 e 6 pilares, com os seguintes parâmetros: discretização da malha de 800 elementos e 441 nós, espessura de $h = 20 \text{ cm}$, cobrimento $c = 1,5 \text{ cm}$, concreto C25 com $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, aço CA50 com $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$, carga distribuída sobre a laje de 10 kN/cm^2 , e os diâmetros das barras de aço nas direções x e y sendo $\phi_x = 10 \text{ mm}$ e $\phi_y = 8 \text{ mm}$, respectivamente.

Como função objetivo atribuída a otimização foi a minimização do valor da armadura total de aço considerando a armadura principal positiva (As_x), armadura principal secundária (As_y), armadura principal negativa (As'_x) e armadura secundária negativa (As'_y). Isto é minimizar o valor da função:

$$A = As_x + As_y + As'_x + As'_y \quad (22)$$

Sendo as áreas de aço dimensionadas pelas Eqs. de (23) a (31).

$$x = 1,25.d \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{M.d}{0,325.b.d^2 \cdot f_{cd}}} \right] \quad (23)$$

$$A_{sx} = \frac{M_{xd}}{f_{yd} \cdot (dx - 0.4.x)} \quad (24)$$

$$dx = h - c - \frac{\phi x}{2} \quad (25)$$

$$A_{sy} = \frac{M_{yd}}{f_{yd} \cdot (dy - 0.4.x)} \quad (26)$$

$$dy = h - c - \phi x - \frac{\phi y}{2} \quad (27)$$

$$A_{s'x} = \frac{M'_{xd}}{f_{yd} \cdot (dx - 0.4.x)} \quad (28)$$

$$A_{s'y} = \frac{M'_{yd}}{f_{yd} \cdot (dy - 0.4.x)} \quad (29)$$

$$f_{cd} = 1,4 \cdot f_{ck} \quad (30)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} \quad (31)$$

Eq. (23) representa a equação da linha neutra para um momento fletor de cálculo Md , assim como, Mxd o momento fletor positivo de cálculo para direção x, Myd o momento fletor positivo de cálculo para direção y, $M'xd$ o momento fletor negativo de cálculo para direção x e $M'yd$ o momento fletor negativo de cálculo para direção y.

4.1 Exemplo 1

Como primeiro exemplo de aplicação foi otimizado as posições de pilares para uma laje lisa de dimensões 5x10 metros utilizando 4 pilares de apoio, com 80 gerações e população de 20 indivíduos.

Como referência foi considerada uma configuração com os pilares posicionados a 1 metro dos vértices da laje, estando os pontos nas seguintes coordenadas: pilar 1 (1,0;1,0), pilar 2 (4,0;1,0), pilar 3 (4,0;9,0), pilar 4 (1,0;9,0). Na figura 3 apresentam-se as posições iniciais dos pilares em círculo em com interior em branco e o sistema de eixos adotado e os círculos em preto indicam as posições finais obtidas com 80 gerações.

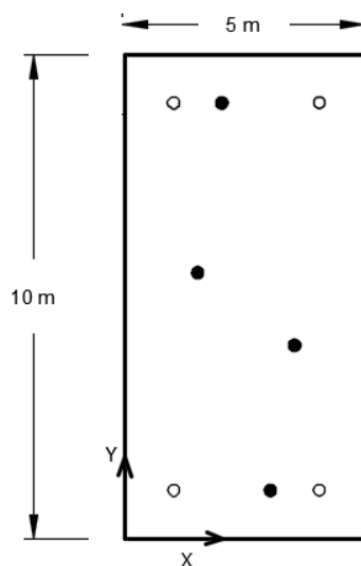


Figura 3 – Sistema de coordenadas e posições iniciais e finais dos 4 pilares.

As áreas de aço obtidas pelo processo de otimização, assim como as coordenadas das posições dos pilares conforme orientação já estabelecida, demonstrando a evolução das soluções junto as gerações, sendo estas: área de aço positiva na direção x (As_x), área de aço positiva na direção y (As_y), área de aço negativa na direção x (As'_x), área de aço positiva na direção y (As'_y), as quais são indicadas nas tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Evolução das áreas de aço para o exemplo 1

	As_x (cm ²)	As_y (cm ²)	As'_x (cm ²)	As'_y (cm ²)	A_{total} (cm ²)	Redução
Referência	5,00	4,46	11,77	12,72	33,95	-
10 gerações	0,87	0,89	9,37	8,76	19,89	41%
20 gerações	0,63	0,72	9,44	9,08	19,86	41%
40 gerações	0,73	1,08	7,99	9,18	18,98	44%
60 gerações	0,73	1,08	7,99	9,18	18,98	44%
80 gerações	0,85	1,14	7,69	9,12	18,79	45%

Tabela 2 – Coordenadas do posicionamento dos pilares otimizados com 80 gerações

	X	Y
Pilar 1	3,00	1,00
Pilar 2	3,50	4,00
Pilar 3	2,00	9,00
Pilar 4	1,50	5,50

Assim, nota-se uma redução significativa da área de aço total em comparação a configuração de referência desde as gerações iniciais da rotina, resultando em uma redução expressiva de 50% da área de aço ao final do processo de otimização.

4.2 Exemplo 2

Como segundo exemplo foi otimizado as posições de pilares para a mesma laje do exemplo anterior, porém tendo 6 pilares de apoio, com 80 gerações e população de 20 indivíduos.

Para a configuração de referência foi considerado 4 pilares posicionados a 1 metro dos vértices da laje e 2 pilares 1 metro distante das bordas da laje e na metade do comprimento da laje, estando os pontos nas seguintes coordenadas: pilar 1 (1,0;1,0), pilar 2 (4,0;1,0), pilar 3 (4,0;5,0), pilar 4 (4,0;9,0), pilar 5 (1,0;9,0), pilar 6 (1,0;5,0).

Na figura 4 se ilustra o sistema de coordenadas e as posições dos pilares adotadas inicialmente indicadas em círculo com interior branco e as posições otimizadas em círculo em preto.

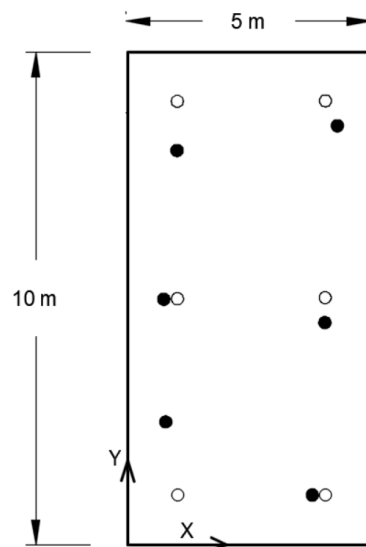


Figura 4 - Sistema de coordenadas e posições iniciais e finais dos 6 pilares.

Nas tabelas 3 e 4 estão indicadas, respectivamente, as áreas de aço e as coordenadas otimizadas obtidas pelo algoritmo genético, demonstrando a evolução das soluções junto as gerações.

Tabela 3 - Evolução das áreas de aço para o exemplo 2

	Asx (cm ²)	Asy (cm ²)	As'x (cm ²)	As'y (cm ²)	Atotal (cm ²)	Redução
Referência	1,11	0,98	5,23	6,09	13,41	-
10 gerações	0,90	1,11	4,79	5,97	12,76	5%
20 gerações	0,82	0,96	4,73	5,95	12,46	7%
40 gerações	0,82	0,96	4,73	5,95	12,46	7%
60 gerações	0,76	0,95	4,60	5,86	12,17	9%
80 gerações	0,80	0,87	4,86	5,32	11,85	12%

Tabela 4 - Coordenadas do posicionamento dos pilares otimizados com 80 gerações

	X	Y
Pilar 1	0,75	5,00
Pilar 2	4,00	4,50
Pilar 3	3,75	1,00
Pilar 4	0,75	2,50
Pilar 5	1,00	8,00
Pilar 6	4,25	8,50

Nesse exemplo, a otimização por algoritmo gerou reduções da área de aço total desde das gerações iniciais, porém, não apresentou resultados tão expressivos de otimização, uma vez que as posições otimizadas são muito próximas das configurações iniciais, conforme destacado na figura 3.

4.3 Exemplo 3

Por fim, no último exemplo realizado será otimizada as posições de pilares em uma laje semelhante aos casos anteriores, porém com uma alteração de sua geometria introduzindo um furo quadrado de dimensões 1x2m na laje, cujos vértices possuem as seguintes coordenadas: vértice 1 (2,0;4,0), vértice 2 (3,0;4,0), vértice 3 (3,0;6,0), vértice 4 (2,0;6,0).

Para a configuração de referência utilizou-se o mesmo arranjo de posição do primeiro exemplo, com os pilares estando nas seguintes coordenadas: pilar 1 (1,0;1,0), pilar 2 (4,0;1,0), pilar 3 (4,0;9,0), pilar 4 (1,0;9,0).

Segue abaixo uma figura demonstrando o sistema de coordenadas adotado, o furo quadrado na geometria da placa e posições dos pilares.

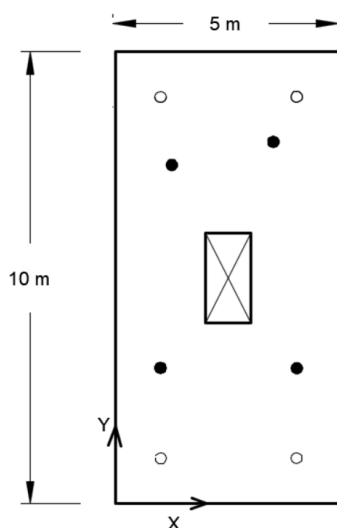


Figura 5 - Sistema de coordenadas da laje com furo e posições iniciais e finais dos 4 pilares.

Para esse caso considerou-se novamente uma otimização com 80 gerações e população

de 20 indivíduos.

Seguem nas tabelas 5 e 6 os resultados obtidos da área de aço e as posições finais obtidas para os pilares, com a evolução das soluções segundo as gerações.

Tabela 5 – Evolução das áreas de aço para o exemplo 3

	Asx (cm²)	Asy (cm²)	As'x (cm²)	As'y (cm²)	Atotal (cm²)	Redução
Referência	5,00	4,46	11,77	12,72	33,95	-
10 gerações	1,35	1,31	11,01	11,68	25,34	25%
20 gerações	0,60	0,59	7,62	12,02	20,83	39%
40 gerações	0,78	0,94	7,41	9,39	18,53	45%
60 gerações	0,78	0,94	7,41	9,39	18,53	45%
80 gerações	0,80	0,91	7,69	7,77	17,17	49%

Tabela 6 - Coordenadas do posicionamento dos pilares otimizados com 80 gerações

	X	Y
Pilar 1	4,00	3,00
Pilar 2	3,50	8,00
Pilar 3	1,25	7,50
Pilar 4	1,00	3,00

Neste exemplo, a otimização obteve sucesso na redução de armadura já nas primeiras gerações, tendo uma redução de 25% da área de aço total inicialmente, e obtendo uma diminuição significativa de 49%, na solução final.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho, desenvolvido em uma iniciação científica voluntária, buscou desenvolver um modelo computacional para a decisão do posicionamento ótimo dos apoios em lajes empregando o método de otimização de algoritmos genéticos, de modo a minimizar a área de armadura resistente a flexão em lajes lisas ou cogumelos. Destaca-se que não se inseriu na função objetivo a verificação de esforço cortante nem as restrições devido ao estado limite de serviço e tão pouco as condições reais de projeto para o dimensionamento das regiões dos capitéis.

Foi desenvolvido um programa que permite a otimização de lajes de diferentes geometrias poligonais e um número qualquer de apoios, buscando tornar o modelo computacional criado o mais genérico possível.

Como resultados, a ferramenta computacional desenvolvida apresentou sucesso no objetivo de minimizar a área de aço necessária para a laje, apresentando reduções expressivas em determinados exemplos, como exemplificado neste artigo. Contudo, o método de

otimização empregado implica em um gasto computacional razoável, para a obtenção de resultados expressivos em determinados casos.

Por fim, o modelo aqui desenvolvido é bem simples, mas o potencial para explorar aplicações na área da otimização aplicada no posicionamento de pilares, ou vigas para simular pavimentos, ou mesmo de outros parâmetros relevantes do projeto podem ser explorados facilmente.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo seu apoio financeiro a esta pesquisa.

7 REFERENCIAS

- Ali, M.M., Storey, C., and Toörn, A. 1997. Application of stochastic global optimization algorithms to practical problems. *J. Optim. Theory Appl.* **95**: 545–563.
- Almeida, V.S. Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF, Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos, SP, 2003.
- Arora, J.S., “Introduction to Optimum Design”, Elsevier Inc., USA, 2004.
- Batoz, J.L. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, p. 1771-1812, 1980.
- Beale, E. M. L., 'Introduction to optimization,' *John Wiley & Sons*, 1988.
- Beyer, H.G. and Schwefel, H.P. 2002. Evolution strategies—A comprehensive introduction. *Natural Computing* **1**: 3–52.
- Brandão, M. A. L., Estudo de Alguns Métodos de Otimização Irrestrita, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- Brandão, M. A. L., e Silva, P. H. R., Alguns Métodos de Otimização, CNMAI – Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria, Caldas Novas, Goiás, 2014.
- Cheung, P.B.; Reis, L.F.R. 2001. Análise de Reabilitação de Redes de Distribuição de Águas para Abastecimento. Plano de Doutorado. Universidade de São Paulo – EESC.
- Darwin, C.R. 1859. *On the origin of species by means of natural selection*. J. Murray, London.
- Dorigo, M., Caro, G. Di. Ant colony optimization: a new meta-heuristic. In *Evolutionary Computation*, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on, volume 2. IEEE, 1999.
- Esposito, W.R. and Floudas, C.A. 2000. Global optimization for the parameter estimation of differential-algebraic systems. *Indust. Eng. Chem. Res.* **39**: 1291–1310.
- Fogel, D.B. 2000. *Evolutionary computation: Toward a new philosophy of machine intelligence*. IEEE Press, New York.

- Fogel, L.J., Owens, A.J., and Walsh, M.J. 1966. *Artificial intelligence through simulated evolution*. Wiley, New York.
- Foulds, L. R., Optimization Techniques, Springer-Verlag, New York, 1981.
- Goldberg, D.E. 1989. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison Wesley Longman, London.
- Grossmann, I.E. 1996. *Global optimization in engineering design*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Guus, C., Boender, E., and Romeijn, H.E. 1995. Stochastic methods. In *Handbook of global optimization* (eds. R. Horst and P.M. Pardalos), pp. 829–869. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Hatfka, R.T., Gurdal, Z., “Elements of Structural Optimisation – A survey”, *Kluwer Academic Publishers*, Netherlands, 1992.
- Hatfka, R.T., Gandhi, R.V., “Structural Shape Optimization – A survey”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 57, pp.91-106, 1996.
- Holland, J. H. [1975]. “Adaptation in Natural and Artificial Systems,” University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Horst, R. and Tuy, H. 1990. *Global optimization: Deterministic approaches*. Springer-Verlag, Berlin.
- Kirkpatrick, S., Gellatt, C.D., and Vecchi, M.P. 1983. Optimization by simulated annealing. *Science* **220**: 671–680.
- Koza, John R. Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1992.
- Michalewicz, Z. 1996. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*. Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Nocedal, J., Wright, S.J, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, 2000.
- Pinter, J. 1996. *Global optimization in action. Continuous and Lipschitz optimization: Algorithms, implementations and applications*. Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Querín, O.M., Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation. PhD dissertation, University of Sydney, (1997).
- Ribeiro, A. A.; Karas, E. W., Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Schwefel, H.P. 1995. *Evolution and optimum seeking*. Wiley, New York.
- Snyman, J. A., An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms, Springer, 2005.
- Timoshenko, S. “Theory of plates and shells”. Mcgraw-Hill, New York, 1940.
- Törn, A., Ali, M., and Viitanen, S. 1999. Stochastic global optimization: Problem classes and solution techniques. *J. Global Opt.* **14**: 437–447.

Van Laarhoven, P.J.M.; Aarts, E.H.L. 1987. *Simulated annealing: Theory and applications*. Reidel, Dordrecht, The Netherlands.