



PROCESS BASED ON THE DIRECT STIFFNESS METHOD FOR EFFECTING SECOND-ORDER ANALYSES OF PLANE FRAME STRUCTURES HAVING ELEMENTS WITH VARIABLE RIGIDITY

Iara Souza Ribeiro

Francisco Célio de Araújo

Kátia Inácio da Silva

iarasribeiro90@gmail.com

dearaujofc@gmail.com

katia@em.ufop.br

Universidade Federal de Ouro Preto

R. Diogo de Vasconcelos, 122, Pilar, 35400-000, Ouro Preto, Minas Gerais, Brazil

Abstract. *This paper presents a strategy based on the Direct Stiffness Method (DSM) for carrying out geometrically non-linear analyses of plane frame structures. The strategy includes special options to model elements with arbitrary cross-sections and generic variation of rigidity along their axes. Herein, all the necessary geometrical properties are calculated based on their corresponding boundary-integral representations. And this considerably alleviates the modeling of elements with complex geometrical description. To determine the elastic and geometric stiffness matrices, the principle of virtual work (PVW) is applied. A system of compatibility equations is then generated, from which all of the coefficients of these matrices are obtained. As generic variation of rigidity is assumed, a numerical Gauss-Legendre quadrature is needed state the compatibility equations. Several types of variation of the rigidity along the element axis are available. Concerning the nonlinear analysis, one considers a standard incremental-iterative Newton-Raphson method. In it, a co-rotational approach that allows analyzing structures under large displacements is incorporated. The validation/performance of the computational code developed has been carried out by referring to results obtained employing the SAP2000.*

Keywords: *Direct Stiffness Method (DSM), second-order analysis, co-rotational referential, elements with arbitrary cross-sections, 2D frameworks.*

1 INTRODUÇÃO

Elementos reticulados com variação de inércia ao longo do comprimento são empregados com bastante frequência em sistemas estruturais. Dentre os objetivos de sua aplicação destacam-se: o uso racional dos materiais para minimizar custos, o apelo estético arquitetônico e a solução de algum problema específico de engenharia.

Com relação à minimização dos custos, sabe-se que o campo de tensões, ao qual está submetido um elemento estrutural, pode ser tão desuniforme dentro de seu volume que a utilização de material em algumas regiões passa a ser desnecessária ou pouco interessante. Ademais, a variação da seção transversal ao longo de um elemento pode ser bastante atraente também do ponto de vista estético, possibilitando a criação de formas suaves, naturais e arquitetonicamente mais interessantes. Citam-se ainda outras situações da aplicação prática de elementos com variação de inércia como: a necessidade da passagem de instalações elétricas e hidráulicas por uma viga furada, a distorção da seção de um pilar para se adequar ao espaço antropodinâmico e a variação de seção por motivos operacionais numa peça mecânica.

Ainda sobre o uso racional dos materiais, pode-se destacar a fabricação de materiais de alta resistência e, como consequência, a disseminação no uso de elementos reticulados esbeltos. Esses elementos são tendência em obras civis mais ousadas como pontes de grandes vãos e edifícios altos. O aumento da esbelteza dos elementos estruturais implica em sistemas geometricamente não-lineares, que usualmente apresentam grandes deflexões. Consequentemente, nestes casos, os efeitos de 2ª ordem devem ser considerados no dimensionamento.

A utilização da análise não-linear geométrica no cálculo estrutural possibilita o estudo de um sistema estrutural idealizado que se aproxime mais do real. Além disso, quando houver a necessidade de se modelar elementos não prismáticos, torna-se extremamente relevante o desenvolvimento e aplicação de uma formulação que considere de maneira precisa os efeitos causados pela variação de rigidez.

Neste trabalho, para a implementação computacional, desenvolve-se uma formulação baseada no Método da Rigidez Direta (MRD), que possibilita a modelagem de elementos estruturais de pórtico plano com rigidezes variáveis segundo leis quaisquer, inclusão de efeitos de deformação por cisalhamento, e com seções de formas geométricas quaisquer. Um processo para a derivação da matriz de rigidez geométrica de elementos com rigidez variável é também apresentado. Em relação à análise não-linear em si, adota-se um esquema incremental-iterativo de *Newton-Raphson* (com controle de carga) no qual a matriz de rigidez é atualizada, a cada iteração do processo. Neste algoritmo, adota-se uma formulação lagrangeana atualizada com variáveis descritas em relação a referenciais corrotacionais.

O conjunto de formulações implementadas foram incluídas no programa computacional NAESY – *Numerical Analysis of Engineering Systems*, cuja base foi desenvolvida por de Araújo (1994).

2 MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA (MRD)

No MRD as incógnitas do problema são os deslocamentos dos nós do modelo estrutural, os quais, em uma análise estática, se relacionam com as ações nodais a partir da equação:

$$\mathbf{K}_t \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

em que $\mathbf{K}_t$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura, $\mathbf{f}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes e $\mathbf{u}$ é o vetor de deslocamentos nodais

Para o caso de análise não-linear, os coeficientes da matriz de rigidez tangente são constituídos por termos lineares (efeitos de 1ª ordem) e de ordem superior, estes últimos dependentes do processo de deformação da estrutura. Nesta pesquisa, a matriz $\mathbf{K}_t$ constitui-se de duas partes apenas, que são a matriz de rigidez elástica, $\mathbf{K}_e$, e a matriz de rigidez geométrica, $\mathbf{K}_g$, que essencialmente inclui os efeitos geométricos de 2ª ordem em consequência de grandes deslocamentos.

As matrizes de rigidez $\mathbf{K}_e$ e $\mathbf{K}_g$ para um elemento de pórtico plano com variação genérica de rigidez são obtidas pelo processo descrito por de Araújo e Pereira (2017) e Ribeiro (2016), respectivamente. Aspectos genéricos dessa formulação são apresentados a seguir.

2.1 Matriz de rigidez do elemento de pórtico plano

As expressões genéricas dos coeficientes das matrizes de rigidez elástica (de Araújo e Pereira, 2017; Pereira, 2015) e geométrica (Ribeiro, 2016) foram calculadas utilizando uma formulação baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), considerando-se o elemento genérico de pórtico plano mostrado na Fig. 1.

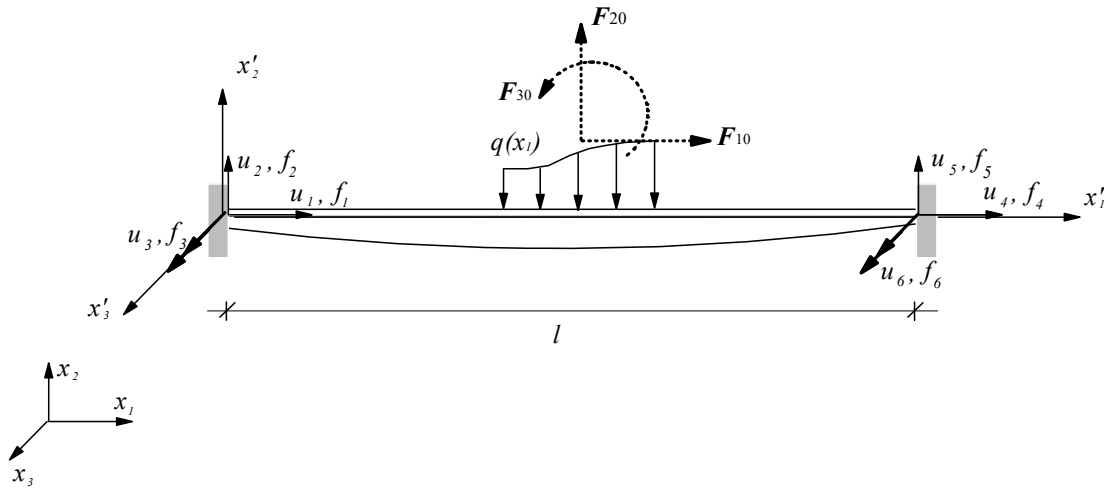


Figura 1. Elemento de pórtico plano

Aplicando-se o PTV, estabelece-se a seguinte equação de compatibilidade de deslocamentos:

$$\bar{f}_i u_i = \int_l \bar{M}_i d\theta + \int_l \bar{N}_i d\delta + \int_l \bar{Q}_i d\lambda \quad (2)$$

em que u_i são os deslocamentos incógnitos; $d\theta$ é a rotação flexional relativa; $d\delta$ corresponde ao deslocamento axial relativo e $d\lambda$ ao deslocamento transversal relativo; $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$, e $\bar{Q}_i$ são os esforços devidos ao estado de carregamento (Fig. 2) em que $\bar{f}_i = 1$, ou seja,

$$\bar{M}_i = M_i(\bar{f}_i), \quad \bar{N}_i = N_i(\bar{f}_i), \quad \bar{Q}_i = Q_i(\bar{f}_i) \quad (3)$$

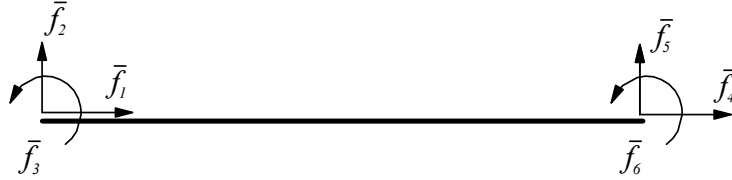


Figura 2. Estado de carregamento de um elemento de pórtico plano

A partir da Eq. (2), gera-se um conjunto de equações de compatibilidade que permite a obtenção dos valores de rigidez para elementos com variações quaisquer de inércia (de Araújo e Pereira, 2017). A seguir, apresentam-se detalhes dessa formulação.

2.1.1 Matriz de rigidez elástica de elemento de pórtico plano (K_e)

A obtenção da matriz de rigidez elástica é realizada a partir da consideração de dois sistemas principais, denominados caso I e caso II.

Caso I:

Neste caso considera-se o nó final (nó direito) como restringido, isto é $u_4 = u_5 = u_6 = 0$ (Fig. 3).

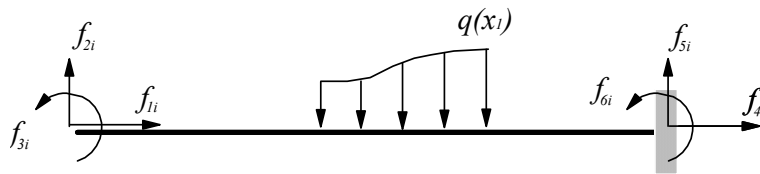


Figura 3. Elemento de pórtico plano considerado no caso I

Sendo assim, reescrevendo-se a Eq. (2) na forma matricial obtém-se:

$$\mathbf{A}_{II} \mathbf{f}_{II} = \mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{I0} \quad (4)$$

em que $\mathbf{f}_{II}$ é o vetor de ações na extremidade livre devido aos deslocamentos unitários impostos ($\mathbf{u}_I$),

$$\mathbf{u}_I = \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

sendo δ_{ki} o delta de Kronecker, e

$$u_{I0} = \int_l \frac{\bar{M}_i M'_0}{EI} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N'_0}{ES} ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i Q'_0}{GS} ds, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

de forma que

$$M'_0 = M(q), \quad N'_0 = N(q), \quad Q'_0 = Q(q) \quad (7)$$

Os coeficientes da matriz $\mathbf{A}_{II}$ resultam da equação:

$$\int_l \frac{\bar{M}_i M_j}{EI} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_j}{ES} ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i Q_j}{GS} ds = a_{ij} f_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (8)$$

para tanto, as expressões de $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$, e $\bar{Q}_i$ são obtidas considerando-se $\bar{f}_{ij} = 1$ e a ação no elemento, f_{ij} , embutida nas funções de esforços internos (M_j , N_j , e Q_j), é isolada.

Por fim, a matriz $\mathbf{A}_{II}$ é definida a partir de:

$$\mathbf{A}_{II} = \begin{bmatrix} \int_l \frac{1}{ES} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_l \frac{x_1^2}{EI} + \frac{\chi}{GS} dx_1 & \int_l -\frac{x_1}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_l -\frac{x_1}{EI} dx_1 & \int_l \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal; G o módulo de elasticidade transversal; S a área da seção transversal; I o momento de inércia à flexão em relação ao eixo principal local e χ é o fator de forma da seção para o cisalhamento em relação à direção x_2 .

Caso II:

No caso II considera-se o nó inicial (nó esquerdo) como restringido, isto é $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ (Fig. 4).

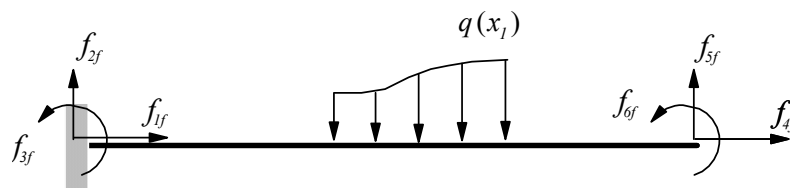


Figura 4. Elemento de pórtico plano considerado no caso II

Sendo assim, reescrevendo-se a Eq. (2) na forma matricial obtém-se:

$$\mathbf{A}_{FF} \mathbf{f}_{Ff} = \mathbf{u}_F \quad (10)$$

em que $\mathbf{f}_{Ff}$ é o vetor de ações na extremidade livre devido aos deslocamentos unitários impostos,

$$\mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} u_{4f} \\ u_{5f} \\ u_{6f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{4f} \\ \delta_{5f} \\ \delta_{6f} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

sendo δ_{kf} o delta de Kronecker, e

$$u_{F0} = \int_l \frac{\bar{M}_i M_0''}{EI} ds + \int_l \frac{\bar{N}_i N_0''}{ES} ds + \int_l \frac{\chi \bar{Q}_i Q_0''}{GS} ds \quad (12)$$

de forma que

$$M_0'' = M(q), \quad N_0'' = N(q), \quad Q_0'' = Q(q) \quad (13)$$

Os coeficientes da matriz $\mathbf{A}_{FF}$ são obtidos a partir da Eq. (8) para $i, j = 4, 5, 6$ resultando em:

$$\mathbf{A}_{FF} = \begin{bmatrix} \int_l \frac{1}{ES} dx_1 & 0 & 0 \\ 0 & \int_l \frac{(l-x_1)^2}{EI} + \frac{\chi}{GS} dx_1 & \int_l \frac{(l-x_1)}{EI} dx_1 \\ 0 & \int_l \frac{(l-x_1)}{EI} dx_1 & \int_l \frac{1}{EI} dx_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Impondo-se nas equações (4) e (10) a condição de $\mathbf{u}_{I0} = \mathbf{u}_{F0} = \mathbf{F}_0 = 0$, considerando os deslocamentos nodais prescritos $\mathbf{u}_I$ e $\mathbf{u}_F$ e estabelecendo-se o equilíbrio, obtém-se a matriz de rigidez elástica para os casos mais gerais de variação de rigidez.

2.1.2 Matriz de rigidez geométrica de elemento de pórtico plano ($\mathbf{K}_g$)

Para derivação da matriz de rigidez geométrica foram considerados os esforços gerados por cargas axiais e transversais em presença de deslocamento lateral do elemento. Como mostrado a seguir.

Caso I:

Baseado na Fig. 5 vê-se que o momento fletor adicional gerado pela carga axial (f_{li}) pode ser expresso por

$$M_1 = M(f_{li}) = -f_{li} [w(x) - u_2] \quad (15)$$

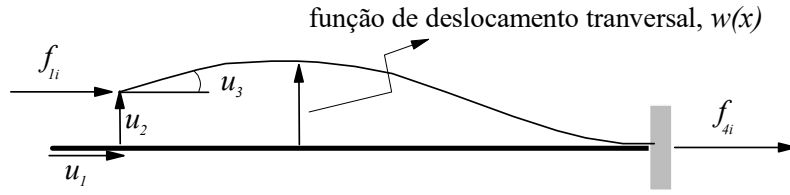


Figura 5. Elemento de pórtico plano deformado no caso I

Além disso, pela decomposição das forças f_{1i} e f_{2i} segundo as direções tangente, $\mathbf{t}$, e normal, $\mathbf{n}$, ao eixo deformado (Fig. 6), há o surgimento de um esforço cortante (Q_1) e de um esforço normal (N_2). Sabendo-se que a rotação u_3 em um ponto é dada pela derivada primeira da função deslocamento, escreve-se a equação dos referidos esforços na forma:

$$Q_1 = Q(f_{1i}) = -f_{1i}w'(x) \quad (16)$$

$$N_2 = N(f_{2i}) = f_{1i}u'(x) \quad (17)$$

em que $u(x)$ é a função que descreve os deslocamentos axiais.

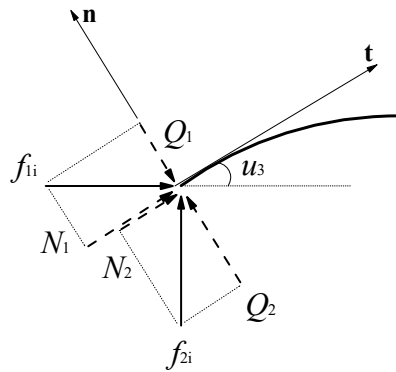


Figura 6. Decomposição das forças f_{1i} e f_{2i} no eixo deformado

Caso II:

Seguindo o mesmo procedimento do caso I, podem-se derivar as expressões para avaliação dos coeficientes de rigidez geométrica no caso II (Fig. 7).

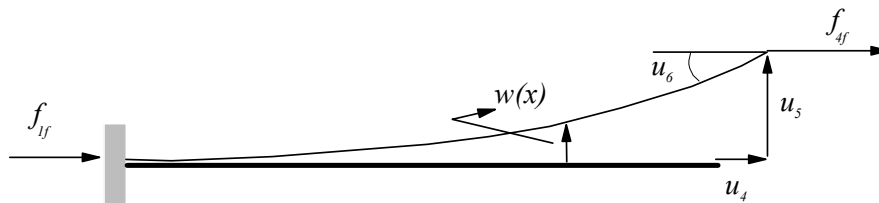


Figura 7. Elemento de pórtico plano deformado no caso II

O momento fletor adicional gerado pela carga axial (f_{4f}) é expresso por:

$$M_4 = M(f_{4f}) = -f_{4f} [u_5 - w(x)] \quad (18)$$

Assim como na determinação dos esforços Q_1 e N_2 , os esforços cortante (Q_4) e normal (N_5) adicionais referentes ao caso II são obtidos pela decomposição da carga axial (f_{4f}) e transversal (f_{5f}) no eixo deformado (Fig. 8), segundo as equações:

$$Q_4 = Q(f_{4f}) = f_{4f} w'(x) \quad (19)$$

$$N_5 = N(f_{5f}) = f_{5f} u'(x) \quad (20)$$

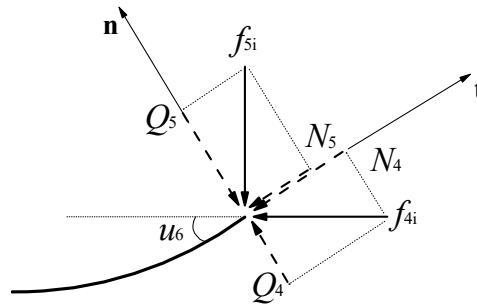


Figura 8. Decomposição das forças f_{4f} e f_{5f} no eixo deformado

Considerando-se as expressões de esforços adicionais dados nas Eqs. (15) a (20), na Eq. (2) e estabelecendo-se as condições de compatibilidade e de equilíbrio para o elemento, pode-se obter a matriz de rigidez geométrica do elemento de pórtico plano em situações quaisquer de variação de rigidez.

Particularmente para elementos de rigidez constante, resulta:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{l} & 0 & 0 & \frac{f_4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f_1 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & \frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{f_4 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} \\ 0 & \frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & \frac{f_1 l (5\varphi_y + 8)}{60 (1 + \varphi_y)} & 0 & \frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} & \frac{f_4 l}{(1 + \varphi_y)} \left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi_y}{12} \right) \\ -\frac{f_1}{l} & 0 & 0 & -\frac{f_4}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_1 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & 0 & -\frac{f_4 (5\varphi_y + 6)}{5 l (1 + \varphi_y)} & \frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} \\ 0 & \frac{f_1}{10 (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_1 l}{(1 + \varphi_y)} \left(\frac{1}{30} + \frac{\varphi_y}{12} \right) & 0 & \frac{f_4}{10 (1 + \varphi_y)} & -\frac{f_4 l (5\varphi_y + 8)}{60 (1 + \varphi_y)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

com $\varphi_y = \frac{12EI\chi}{GSI^2}$, χ sendo o fator de forma ao cisalhamento segundo a direção y.

Nos casos em que haja variação das características geométricas e físicas ao longo do elemento, um processo de integração numérica segundo a quadratura de Gauss–Legendre (Bathe, 1996) é empregado para estabelecimento das equações de compatibilidade, que possibilitarão, por sua vez, a obtenção dos coeficientes de rigidez (Ribeiro, 2016).

2.2 Determinação das grandezas geométricas

Para o cálculo das rigidezes, é necessário o conhecimento de algumas grandezas geométricas da seção transversal como a área (S), fator de forma (χ) e inércia (I). As propriedades das seções usuais incorporadas ao programa computacional (retangular, I, H, circular, tubular circular, tubular retangular) são calculadas analiticamente. No caso, porém, da modelagem de seções arbitrárias, as suas propriedades geométricas são calculadas por uma formulação baseada em integrais de contorno. As expressões básicas utilizadas para esse cálculo são dadas pelas relações mostradas nas Eqs. (22) a (25), em termos das grandezas mostradas na Fig. 9.

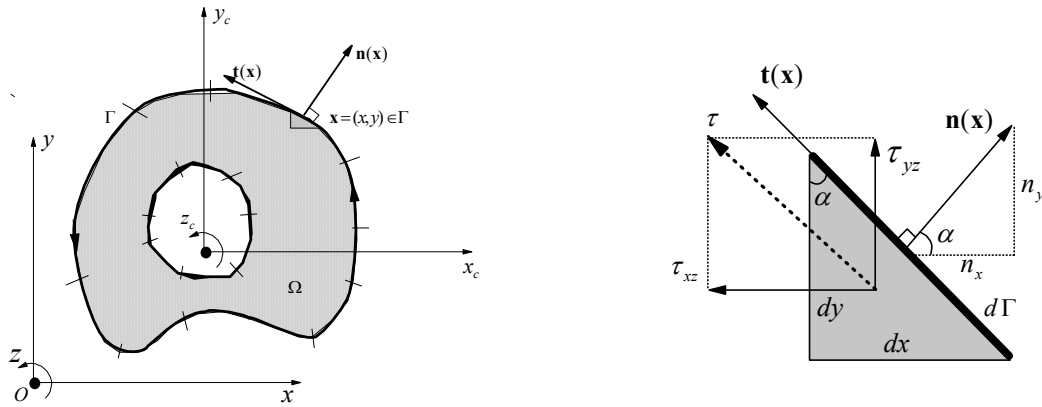


Figura 9. Seção transversal genérica e o detalhe do contorno (Pereira, 2015)

$$S = \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(x)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x n_x d\Gamma \quad (22)$$

$$I_x = \int_{\Omega} y^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} d\Omega = \oint_{\Gamma} x y^2 n_x d\Gamma \quad (23)$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{\Omega} x d\Omega = \frac{1}{S} \int_{\Omega} \frac{\partial(xy)}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} x y n_x d\Gamma \quad (24)$$

$$y_c = \frac{1}{S} \int_{\Omega} y d\Omega = \frac{1}{S} \int_{\Omega} \frac{\partial(xy)}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{S} \oint_{\Gamma} x y n_x d\Gamma \quad (25)$$

em que x e y são a abscissa e a ordenada do ponto nodal respectivamente, Ω é o domínio da área, Γ é o contorno, $\mathbf{n}_x$ é a componente na direção x do vetor normal $\mathbf{n}$ e x_c e y_c são as coordenadas do centroide.

É importante ressaltar que as Eqs. (22) a (25) são facilmente obtidas aplicando o Teorema de Green. Maiores detalhes podem ser encontrados em Hillessheim (2013).

3 SOLUÇÃO NÃO-LINEAR

No presente trabalho, o método iterativo utilizado para resolver o sistema não-linear de equações é o procedimento de *Newton-Raphson* padrão.

O referido método foi implementado de acordo com a formulação proposta por Yang e Kuo (1994) conforme o fluxograma da Fig. 10.

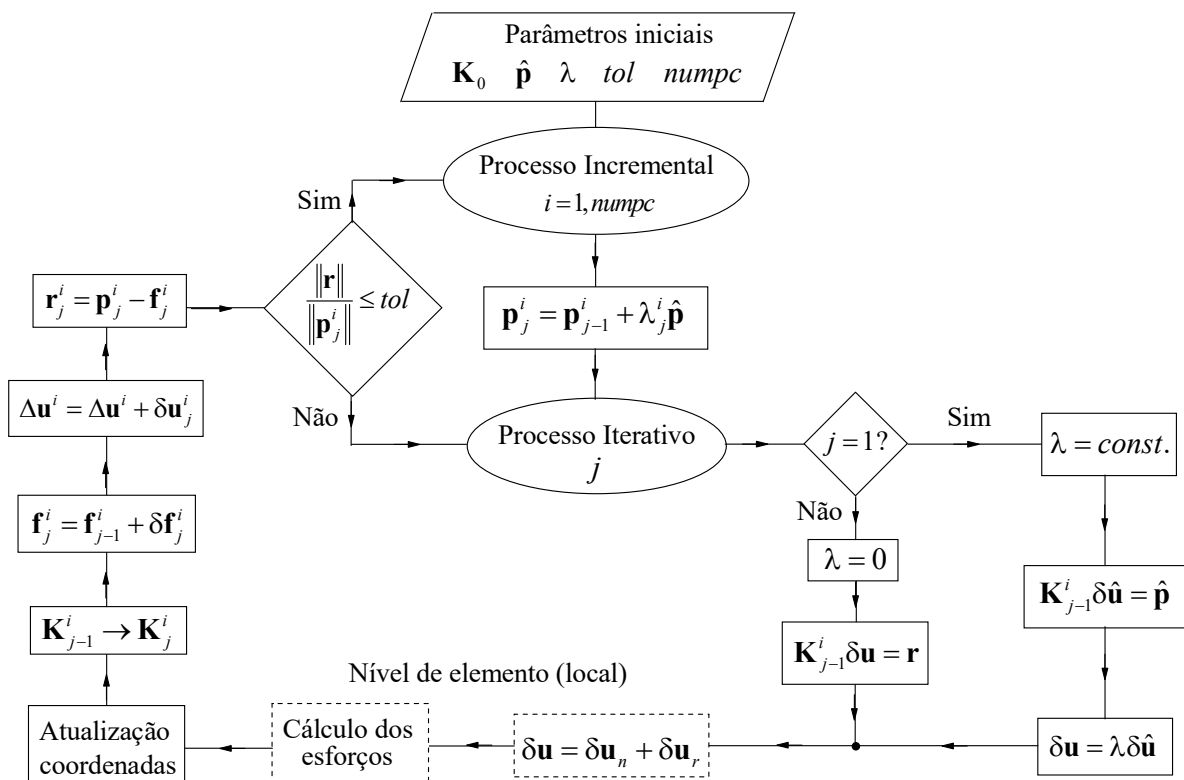


Figura 10. Fluxograma do Método de *Newton-Raphson* padrão

Através deste é possível verificar que a rotina de solução não-linear começa com o conhecimento prévio de algumas grandezas, a saber: a matriz de rigidez inicial, $\mathbf{K}_0$, calculada na configuração indeformada da estrutura, o vetor de forças externas de referência, $\hat{\mathbf{p}}$, o fator de carga, λ , a tolerância para se determinar a convergência do processo iterativo, tol , e o número de passos de carga, $numpc$.

A rotina então procede para a montagem do primeiro vetor de forças externas, $\mathbf{p}_1^1$, dando início ao primeiro passo do *loop* incremental ($i = 1$). Em seguida, o fluxo do algoritmo entra no processo iterativo, o qual busca encontrar o equilíbrio do sistema estrutural, na configuração deformada, em que as forças internas se igualem às externas segundo a

tolerância definida. Até que se atinja este objetivo, a rotina implementada passa, a cada iteração, pelos seguintes cálculos intermediários:

- 1) Determinação da correção de deslocamentos, $\delta \mathbf{u}$, pela solução de $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}$, e posterior multiplicação pelo fator de carga, λ , se $j=1$, ou pela solução direta de $\mathbf{K}_{j-1}^i \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}$ se $j > 1$;
- 2) Decomposição de $\delta \mathbf{u}$ em suas parcelas $\delta \mathbf{u}_n$ (deslocamentos naturais) e $\delta \mathbf{u}_r$ (deslocamentos de corpo rígido) utilizando a abordagem corrotacional, aplicada localmente em cada elemento;
- 3) Cálculo da correção de esforços internos associados a $\delta \mathbf{u}_n$ para cada elemento;
- 4) Atualização das coordenadas;
- 5) Atualização da matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_{j-1}^i \rightarrow \mathbf{K}_j^i$;
- 6) Cálculo do vetor de forças internas $\mathbf{f}_j^i = \mathbf{f}_{j-1}^i + \delta \mathbf{f}_j^i$;
- 7) Determinação do gradiente de forças através da equação $\mathbf{r}_j^i = \mathbf{p}_j^i - \mathbf{f}_j^i$;
- 8) Cálculo da norma relativa e verificação da tolerância $\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{p}_j^i\|} \leq tol$.

Alguns pontos dessa estratégia merecem especial atenção. Primeiramente, ressalta-se que a atualização das coordenadas é feita, a cada iteração, a partir da correção dos deslocamentos $\delta \mathbf{u}$, e posteriormente, com as coordenadas atualizadas, procede-se à atualização da matriz de rigidez tangente. Cita-se, também, que para a avaliação do vetor de forças internas, utilizaram-se somente os incrementos de deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$. A decomposição dos deslocamentos, como mencionado acima, consiste na denominada abordagem corrotacional, a qual é descrita a seguir.

4 DESCRIÇÃO CORROTACIONAL

As componentes do vetor de deslocamentos naturais, $\delta \mathbf{u}_n$, responsáveis pela deformação do elemento, são obtidas excluindo-se os deslocamentos de corpo rígido, $\delta \mathbf{u}_r$, do vetor deslocamentos, $\delta \mathbf{u}$, e constam em duas rotações naturais nos nós do elemento, θ_a e θ_b , e uma deformação natural, u_b , isto é:

$$\mathbf{u}_n^T = [0 \quad 0 \quad \theta_a \quad u_b \quad 0 \quad \theta_b] \quad (26)$$

Para tal dedução, considera-se que os deslocamentos de corpo rígido ocorrem previamente aos naturais. Um esquema da configuração deformada C_2 em relação à configuração C_1 é mostrado na Fig. 11.

De forma bastante simples, pode-se determinar os de corpo rígido como:

$$\mathbf{u}_r^T = [u_a \quad v_a \quad \theta_r \quad u_b \quad v_b - \theta_r {}^1L \quad \theta_r] \quad (27)$$

e, portanto, facilmente calcular $\delta \mathbf{u}_n$ através da equação

$$\delta \mathbf{u}_n = \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_r. \quad (28)$$

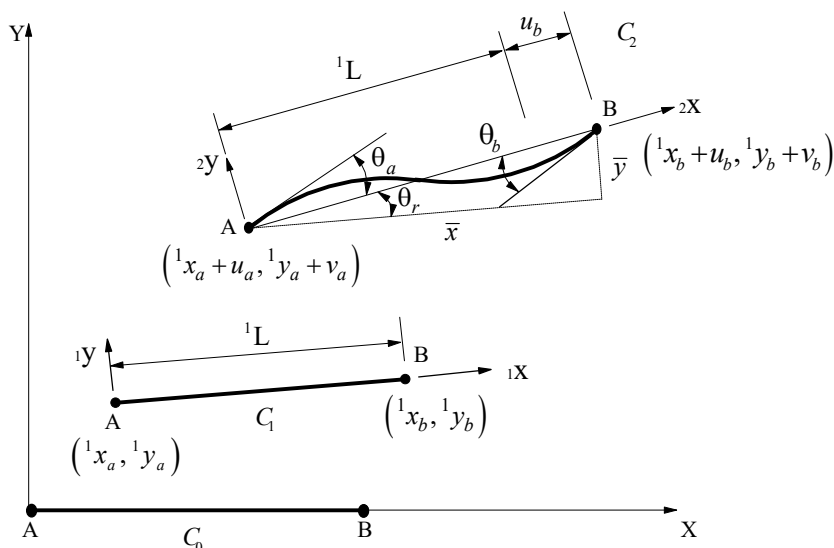


Figura 11. Deslocamentos naturais

5 APLICAÇÃO

O problema analisado, conhecido como Pórtico de Lee (Fig. 12), foi primeiramente estudado e resolvido analiticamente por Lee *et al.* (1968).

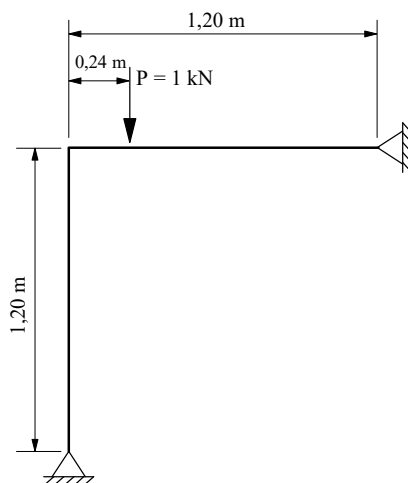


Figura 12. Pórtico de Lee

O pórtico é composto por um pilar e uma viga de comprimento $L = 1.20$ m e seção transversal com área $S = 6$ cm², inércia $I = 2$ cm⁴ e fator de forma $\chi = 1.2$. As propriedades físicas do material são: módulo de elasticidade $E = 720$ kN/cm² e coeficiente de *Poisson*

$\nu = 0.3$. O sistema estrutural está submetido ao carregamento de $P = 1$ kN aplicado à 24 cm do nó da extremidade esquerda da viga.

Para as análises, o modelo estrutural foi discretizado em 20 elementos (10 elementos pertencentes ao pilar e 10 à viga), o carregamento foi dividido em 100 passos de carga e utilizou-se $tol = 10^{-6}$ para verificação da convergência. Os resultados obtidos pela formulação implementada foram comparados com aqueles apresentados por Schweizerhof e Wriggers (1986) e com o resultado fornecido pelo programa SAP2000 (2013). Cita-se ainda que para modelagem realizada no SAP2000 (2013) foram adotados os mesmos parâmetros anteriormente descritos.

Nas Figuras 13, 14 e 15 mostram-se a trajetória de equilíbrio dos deslocamentos horizontal e vertical do nó 13 e da rotação do nó 6.

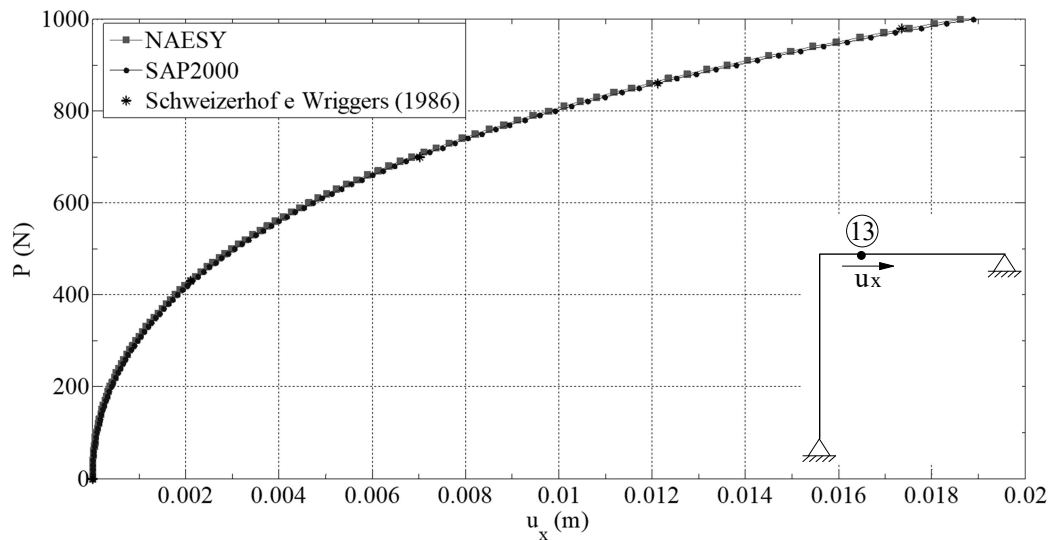


Figura 13. Trajetória de equilíbrio – deslocamento horizontal do nó 13

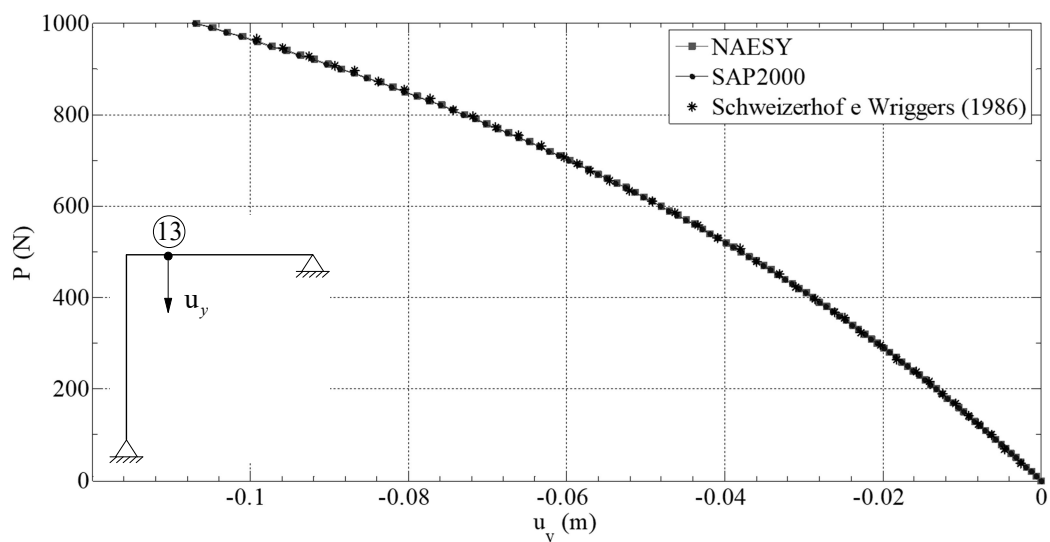


Figura 14. Trajetória de equilíbrio – deslocamento vertical do nó 13

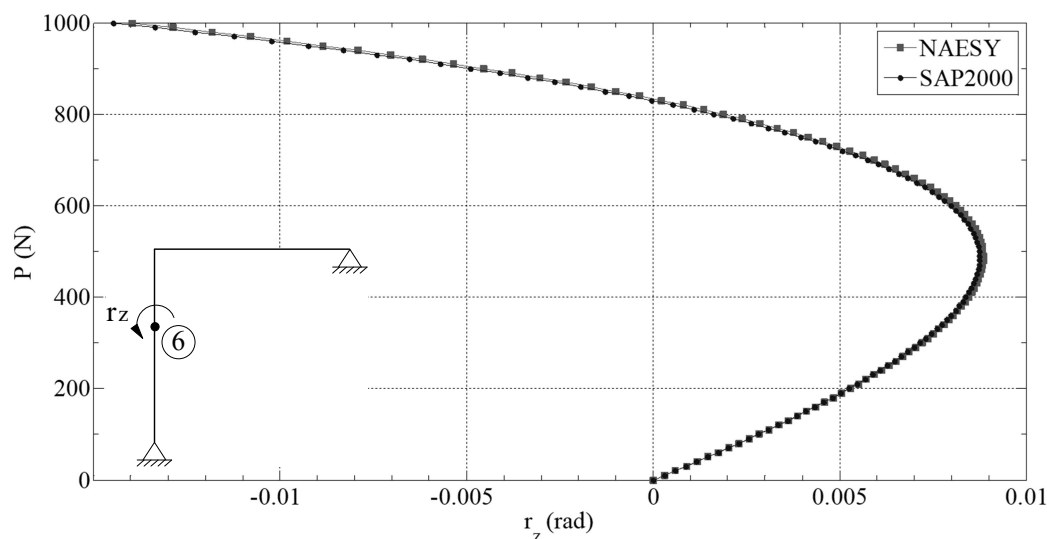


Figura 15. Trajetória de equilíbrio – rotação do nó 6

Em uma segunda análise alterou-se a geometria das seções transversais do pórtico. Neste modelo, a viga tem seção transversal retangular com altura $h = 2$ cm e base $b = 3$ cm, enquanto o pilar possui seção transversal com geometria arbitrária, cujos parâmetros variam linearmente ao longo do comprimento (Fig. 16). As dimensões da seção inicial e final são mostradas na Fig. 17 e na Tabela 1. As propriedades físicas, as condições de contorno e o carregamento do problema original foram mantidos.

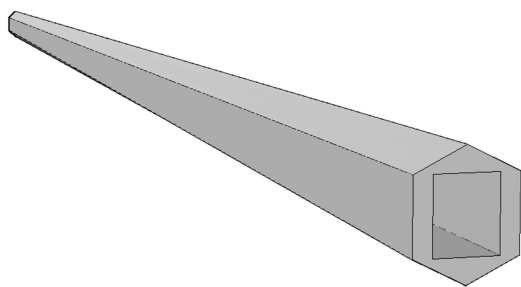


Figura 16. Pilar de seção arbitrária variável

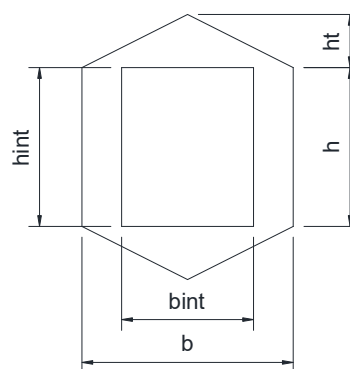


Figura 17. Seção transversal do pilar

Tabela 1. Variação nas dimensões da seção

	h (cm)	ht (cm)	b (cm)	hint (cm)	bint (cm)
seção inicial	3.0	1.0	4.0	3.0	2.5
seção final	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5

O elemento de seção variável foi modelado considerando-se variação cúbica da inércia. Adotou-se a mesma discretização e os mesmos parâmetros para realização da análise não-

linear. Para fins de comparação foi realizada, no NAESY, a modelagem do problema com a estratégia de variação discreta, denominada variação em salto, na qual a variação da seção é simulada utilizando-se elementos de seção constante. Para tanto, o pilar não-prismático foi discretizado em 20 elementos constantes.

Nos gráficos das Figs. 18 e 19 têm-se a trajetória de equilíbrio do deslocamento horizontal do nó 13 e da rotação do nó 9, respectivamente.

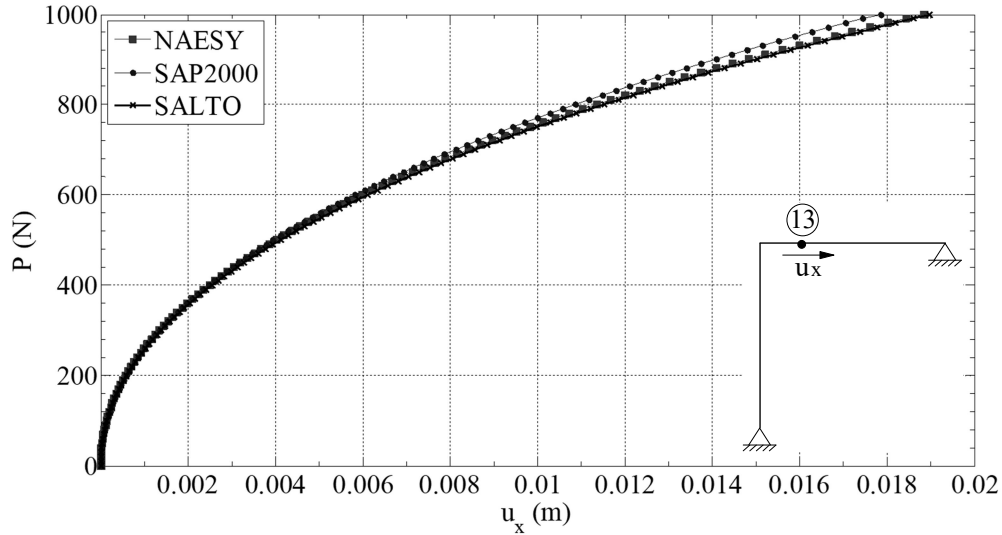


Figura 18. Trajetória de equilíbrio – deslocamento horizontal do nó 13

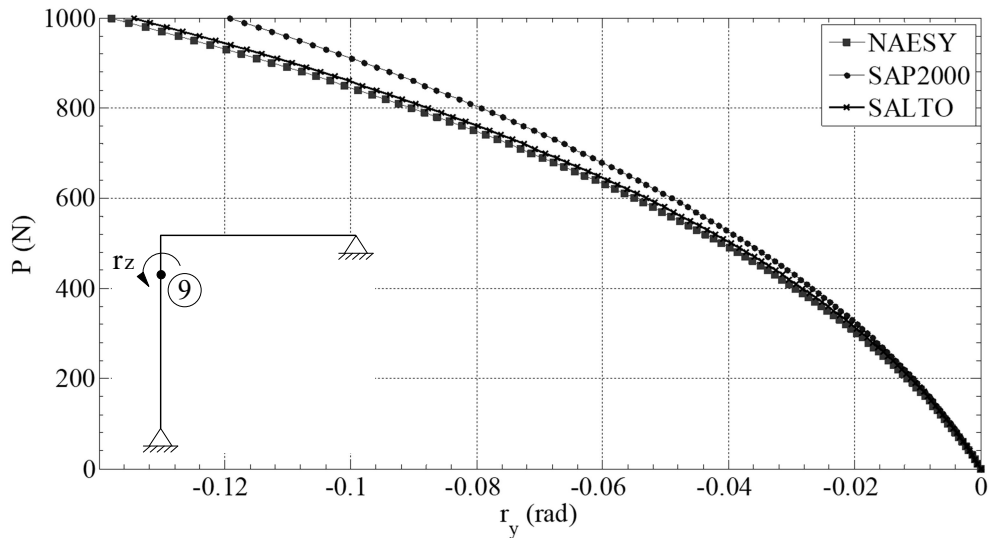


Figura 19. Trajetória de equilíbrio – Rotação do nó 9

6 CONCLUSÕES

Com relação aos resultados obtidos na aplicação original do Pórtico de Lee (Figs. 13, 14 e 15), verifica-se que a formulação implementada resolveu, com êxito, os problemas propostos, de forma a determinar o caminho de equilíbrio em concordância com as respostas

encontradas através do *software* SAP2000 (2013) e da referência (Schweizerhof e Wriggers, 1986). No entanto, deve-se observar que a estratégia apresentada pode descrever de forma mais completa a trajetória de equilíbrio quando acoplada a uma estratégia de controle de deslocamento.

Observando os gráficos das Figs. (18) e (19), pode-se notar que os resultados obtidos nas análises realizadas foram muito próximos. Verifica-se que a maior diferença entre os resultados obtidos no NAESY e no SAP2000 (2013) é em torno de 16%. Pode-se notar também a coincidência entre resultados obtidos através do NAESY utilizando-se variação cúbica de inércia e variação em salto. Pelo fato da modelagem do pórtico com variação em salto ter sido realizada considerando número elevado de elementos para o problema em questão, espera-se que ela proporcione resultados mais precisos. Sendo assim constata-se a eficácia da formulação apresentada para modelagem de elementos não-prismáticos com seções transversais arbitrárias.

Deve-se enfatizar ainda que a estratégia adotada na simulação da rigidez variável de elementos estruturais com seções geométricas quaisquer (usuais ou não) facilita a geração dos modelos, mesmo quando se faz comparação com o processo de geração desses modelos em *softwares* como o SAP2000 (2013). Isto se explica pelo fato de, no programa NAESY, empregarem-se processos baseados em formulações integrais de contorno para a criação das seções.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa tem sido fomentada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Agradecemos também a Universidade Federal de Ouro Preto, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PROPEC) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures in Eng. Analysis*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- de Araújo, F. C., 1994. *Time-domain solution of three-dimensional linear problems of elastodynamics by means of a BE/FE coupling process (in German)*, Ph.D. Thesis, Technical University of Braunschweig, Germany.
- de Araújo, F. C., Pereira, R. A. T., 2017. *Boundary-integral-based process for calculating stiffness matrices of space frame elements with axially varying cross section*. Engineering Analysis with Boundary Elements, n. 77, p.61-69.
- Hillesheim, M. J., 2013. *Análise de torção de Saint-Venant em barras com seção arbitrária via método dos elementos de contorno*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Lee, S., Manuel, F.S., e Rossow, E.C., 1968. *Large deflections and stability of elastic frames*. Journal of the Engineering Mechanics Division, EM2, 521–547.

Pereira, R. A. T., 2015. *Análise de estruturas reticuladas espaciais com barras de seções variáveis*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

Ribeiro, I. S., 2016. *Análise não-linear geométrica de sistemas aporticados planos com elementos de rigidez variável – aplicações em estruturas de aço e de concreto armado*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.

SAP2000, 2011. *Structural Analysis Program (SAP)*. Computers and Structures, Inc.

Schweizerhof, K.H., e Wriggers, P., 1986. *Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 59, pp. 269–279.

Yang, Y.B., e Kuo, S.B., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice Hall.