



UTILIZAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS NA ANÁLISE NÃO LINEAR ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS DE CONCRETO ARMADO

Bergson da Silva Matias^a

Evandro Parente Junior^a

Tereza Denyse Pereira de Araújo^a

bergson.sm@gmail.com

evandroparentejr@gmail.com

denyse@ufc.br

^a Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará

Campus do Pici, Bloco 728, 60440-900, Ceará, Fortaleza, Brasil

Resumo. *Este trabalho tem como objetivo a análise não linear estática de estruturas de concreto armado utilizando modelos constitutivos baseados na teoria da plasticidade e na mecânica do dano contínuo. Os modelos de Mazars original e atual são estudados e versões uniaxiais destes são implementados em um programa de elementos finitos. Utilizando uma formulação corrotacional com integração da seção através do método das fatias, são analisados exemplos de estruturas de concreto armado sob a ação de carregamentos monotônicos e cíclicos. O trabalho tem como objetivo o avanço na modelagem do concreto em estruturas de pórtico plano para que seja possível a obtenção de melhores resultados em problemas como o colapso progressivo. A sensibilidade de malha, presente em problemas que contenham materiais com amolecimento não foi verificada em nenhum dos exemplos apresentados. Isto se deve ao fato da localização de deformação em vigas de concreto armado estar associada a comportamentos que apresentem amolecimento. Os resultados mostram que a implementação dos modelos foi satisfatória, sendo este um passo importante para o estudo do colapso progressivo em estruturas de concreto armado.*

Keywords: *Colapso progressivo, Concreto armado, Análise não linear estática, Mecânica do dano contínuo, Não linearidade física, Localização de deformação.*

1 INTRODUÇÃO

O colapso progressivo é um evento caracterizado pela propagação de um dano localizado sobre uma parte maior de uma estrutura. O estudo do colapso progressivo é relativamente recente. Entretanto, nos últimos anos, muitos avanços foram dados com o crescimento da mecânica computacional. Os primeiros trabalhos relacionados ao fenômeno se deram no início dos anos 1970 devido ao colapso do edifício Ronan Point e a consequente necessidade de alterações nas normas de dimensionamento de estruturas do código britânico (Mohamed, 2006).

Dentre as metodologias utilizadas para a avaliação da resistência ao colapso progressivo, os procedimentos mais sofisticados consideram a não linearidade da estrutura e podem considerar os efeitos dinâmicos através de coeficientes de impacto ou mesmo com análises puramente dinâmicas. Diversos autores, como Tsai e Lin (2008), Kokot et al. (2012), Marjanishvili e Agnew (2006), Bao et al. (2008), Sasani e Sagiroglu (2010), Irribaren et al. (2011) e Arshian e Morgenthal (2016) desenvolveram modelos numéricos para o estudo do colapso progressivo em estruturas de concreto armado com o intuito de contribuir para o conhecimento do fenômeno.

No que diz respeito à não linearidade física considerada nos trabalhos citados, os modelos constitutivos para o concreto são, em sua maioria, aqueles formulados em experimentos (modelos empíricos). Os mais comuns são os modelos empíricos de Popovics (1973), de Chang e Mander (1994) e de Park et al. (1982). Para o aço, os modelos constitutivos adotados geralmente são baseados na teoria da plasticidade.

O uso de modelos mais formais que consigam simular fenômenos como a danificação do material, a abertura e o fechamento de microfissuras e a plastificação acoplada ao dano é bastante comum em problemas que envolvem sismos. Assim como no colapso progressivo, estruturas sob efeitos sísmicos sofrem reversões de tensões devido ao caráter cíclico do carregamento. Modelos baseados na mecânica do dano contínuo, como os de Mazars (1986), Lubliner et al. (1989) e Lee e Fenves (1997) são então bastante utilizados nas análises sísmicas por serem capazes de capturar tais efeitos.

A importância da correta consideração do comportamento de estruturas de concreto armado sob os efeitos do colapso progressivo leva a uma necessidade. A de compreender e, posteriormente, utilizar modelos constitutivos mais formais em análises não lineares estáticas e dinâmicas. Este trabalho, portanto, busca agregar conhecimento relativo ao comportamento não linear do concreto através do estudo do modelo clássico de dano de Mazars (1986) e da sua versão mais atual, conhecida como μ -Model (Mazars et al., 2015). O foco do trabalho é a implementação de versões uniaxiais dos modelos e a validação destes utilizando para isto uma formulação de elemento plano corrotacional e o método das fatias para a integração dos esforços na seção do elemento.

Este trabalho é dividido em seis capítulos. No primeiro, apresenta-se uma introdução e a motivação para o presente estudo. No segundo, são apresentados de forma resumida o elemento finito e o método de integração da seção utilizados no trabalho. O terceiro capítulo traz a formulação dos modelos constitutivos estudados e as considerações feitas para este trabalho. O quarto capítulo é dedicado ao problema de localização de deformação e

sensibilidade da malha em problemas envolvendo materiais quase frágeis. O quinto capítulo traz os exemplos feitos para a validação da implementação dos modelos e a discussão sobre os problemas de sensibilidade de malha encontrados. Por fim, o sexto capítulo apresenta os comentários finais e as conclusões do trabalho.

2 ELEMENTO FINITO NÃO LINEAR DE PÓRTICO PLANO

A formulação Lagrangiana Total (Bathe, 1996) é usual para a análise de estruturas na prática da Engenharia Civil, pois a hipótese de pequenas deformações é aceitável tendo em vista que o aço e, principalmente, o concreto têm limites de deformações baixos. Entretanto, para a análise de problemas com grandes rotações, como no colapso progressivo, é necessário um tipo de formulação que contemple isto.

Sendo assim, este trabalho adota a formulação corrotacional. Nesta formulação, adotam-se dois sistemas de coordenadas que objetivam desacoplar as deformações dos deslocamentos de corpo rígido no elemento (Crisfield, 1991). Assim, cria-se um elemento local ou interno que é, posteriormente, rotacionado para formar o elemento global ou externo. A Fig. 1 apresenta o modelo de um elemento de pórtico corrotacional.

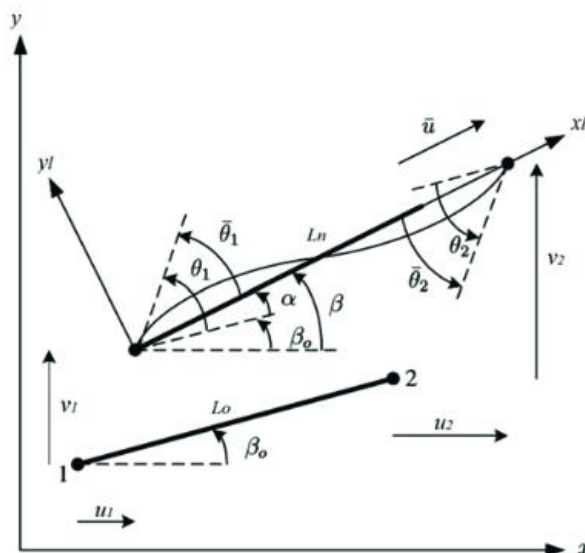


Figura 1. Elemento de pórtico plano corrotacional

Uma das vantagens desta formulação é que a consideração da não linearidade física se torna bastante simples (Parente et al., 2014). Na formulação corrotacional, as deformações são definidas no elemento local, de forma que ficam independentes dos deslocamentos de corpo rígido. Para uma maior facilidade do entendimento da formulação corrotacional, a discussão apresentada aqui se baseia no elemento de pórtico plano. O elemento local ou interno é definido independentemente da transformação local-global, de modo que há liberdade no seu tratamento, sendo possíveis a adoção de diferentes medidas de deformação (Parente et al., 2014). A ligação entre os dois sistemas é feita através da matriz de transformação $\mathbf{T}$, definida como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ -\sin\beta/L & \cos\beta/L & 1 & \sin\beta/L & -\cos\beta/L & 0 \\ -\sin\beta/L & \cos\beta/L & 0 & \sin\beta/L & -\cos\beta/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

onde β é o ângulo de inclinação atualizado do elemento. Após serem definidos o vetor de forças internas $\bar{\mathbf{g}}$ e a matriz de rigidez tangente $\bar{\mathbf{K}}_T$ do elemento interno, determinam-se o vetor de forças internas global e a matriz de rigidez tangente global como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{g}}. \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_T \mathbf{T} + \bar{N} \frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L} + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T). \quad (3)$$

onde $\bar{N}$ é o esforço normal na seção do elemento, $\bar{M}_1$ e $\bar{M}_2$ são, respectivamente, os momentos nos nós inicial e final do elemento interno, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{z}$ são vetores que relacionam a variação do comprimento do elemento com a variação dos deslocamentos e com a variação da inclinação, respectivamente. O primeiro termo do lado direito da Eq. (3) representa a matriz de rigidez elástica global e os dois últimos termos representam a matriz de rigidez geométrica.

A determinação de $\bar{\mathbf{g}}$ e $\bar{\mathbf{K}}_T$ pode ser feita da forma clássica empregando medidas de deformações de engenharia ou de Green, por exemplo (Parente et al., 2014). Neste trabalho, é adotada a medida de deformação de Green para o elemento interno. O cálculo das tensões generalizadas $\bar{\mathbf{g}}$ é feito a partir de integração na seção transversal, de forma que:

$$\bar{\mathbf{g}} = [N \quad M]^T = \left[\int_A \sigma dA \quad - \int_A \sigma y dA \right]^T. \quad (4)$$

onde N e M são, respectivamente, o esforço normal e o momento fletor.

2.1 Método das fatias

A consideração da não linearidade física exige que os esforços internos ($\mathbf{g}$) sejam calculados através da integração na seção transversal, como apresentado na Eq. (4). Neste trabalho, a integração na seção é feita pelo método das fatias (Spacone et al., 1996). Este método consiste em discretizar a seção do elemento em camadas consideradas homogêneas e avaliar as tensões e deformações no centroide de cada camada. Assim, cada camada tem a sua própria lei constitutiva unidimensional. A integração dos esforços na seção é então calculada como o somatório das contribuições de cada camada considerando a hipótese de seções planas.

A Fig. 2 mostra uma seção retangular dividida em fatias com espessura Δy_i e largura b_i distantes de y_i do centroide. A integração da Eq. (4) pode ser substituída por um somatório finito:

$$\bar{\mathbf{g}} = [N \quad M]^T = \left[\sum_i \sigma_i b_i \Delta y_i \quad - \sum_i y_i \sigma_i b_i \Delta y_i \right]^T. \quad (5)$$

onde σ_i é a tensão calculada no centroide da camada i . O mesmo procedimento é aplicado ao cálculo da matriz constitutiva tangente ($\mathbf{C}_T$).

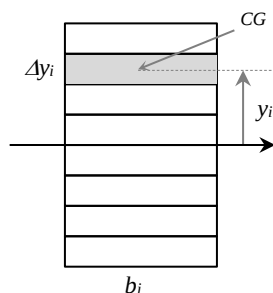


Figura 2. Seção discretizada pelo método das fatias

3 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

O modelo constitutivo para o concreto adotado aqui é baseado nos trabalhos de Mazars (1986), Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), Mazars et al. (2015) e Mazars e Grange (2015). Estes autores, entre outros, contribuíram para a formulação de modelos constitutivos para o concreto baseados na mecânica do dano contínuo (Kachanov, 1958, Rabotnov, 1963). Neste tipo de formulação, a perda de rigidez devida ao surgimento de microfissuras e microvazios é mensurada através de uma variável de dano D , a qual pode variar de 0 a 1. O dano D pode ser considerado isotrópico e ser relacionado com a perda de área ou volume de determinado corpo (De Borst et al., 2012). Através da garantia de continuidade do meio e da equivalência de deformações, define-se uma tensão efetiva $\bar{\sigma}$ dada por:

$$\bar{\sigma} = \sigma / (1 - D). \quad (5)$$

A partir da tensão efetiva, podem-se definir leis de evolução da variável de dano D utilizando conceitos de termodinâmica e procedimentos experimentais. Mazars (1986) desenvolveu um modelo de dano elástico baseado no conceito de deformação equivalente. Este modelo foi, posteriormente, aperfeiçoado por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989). As principais hipóteses do modelo de Mazars (1986) são a desconsideração de deformações plásticas, a isotropia da variável de dano D e a relação direta entre a evolução da variável de dano e as deformações longitudinais.

3.1 Modelo de dano de Mazars

O modelo 3D proposto parte da definição de uma variável de deformação equivalente:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}. \quad (6)$$

onde $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 1/2(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)$ é a parte positiva da deformação. O dano inicia quando ε_{eq} atinge o valor de ε_{d0} , valor conhecido como limiar de dano e obtido através de experimentos de tração. A superfície de carregamento é dada por:

$$f(\varepsilon_{eq}, D) = \varepsilon_{eq} - Y \leq 0. \quad (7)$$

onde Y é uma variável que armazena a máxima deformação atingida durante o histórico de deformações.

Antes do início do dano, a deformação equivalente é igual a ε_{d0} . Quando $D > 0$, a variável Y assume o máximo valor de ε_{eq} durante o histórico de carregamento, ou seja $Y = \max(\varepsilon_{eq})$. A variável de dano D é dada em termos da deformação equivalente através de uma média das variáveis de dano da tração e na compressão, D_t e D_c . Este dano médio é ponderado com os coeficientes de estado de tensão α_t e α_c :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c. \quad (8)$$

$$\alpha_t = \sum H_i \frac{\varepsilon_{t,i} (\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i})}{\bar{\varepsilon}^2}. \quad (9)$$

$$\alpha_c = \sum H_i \frac{\varepsilon_{c,i} (\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i})}{\bar{\varepsilon}^2}. \quad (10)$$

onde $\bar{\varepsilon}$ é a deformação, $\varepsilon_{t,i}$ e $\varepsilon_{c,i}$ são as componentes das partes positiva e negativa do tensor $\bar{\varepsilon}$ nas direções principais $i = 1, 2$ e 3 , $H_i = 1$ se $\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i} \geq 0$ e $H_i = 0$ se $\varepsilon_{t,i} + \varepsilon_{c,i} < 0$. D_t e D_c são dados por:

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_t}{e^{B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}}. \quad (11)$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_c}{e^{B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}}. \quad (12)$$

A Fig. 2 mostra a curva de tensão/deformação do modelo de Mazars (1986) para a compressão. Sendo um modelo elástico, não há o acúmulo de deformações residuais com o descarregamento. A degradação do material, dirigida pela variável de dano D_c , ocorre a partir de um limiar de dano indicado na Fig. 3.

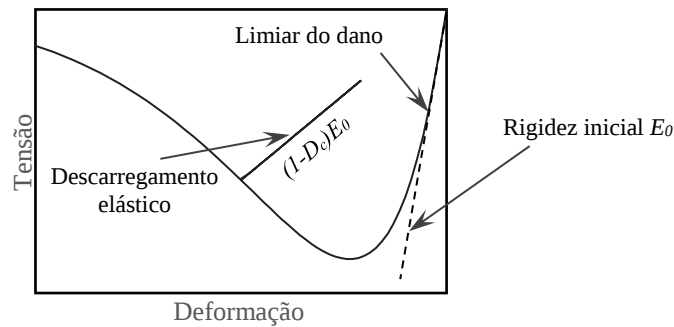


Figura 3. Curva de tensão/deformação na compressão para o modelo de Mazars (1986)

3.2 Efeito unilateral e μ -Model

O modelo original de Mazars (1986) passou por alguns ajustes principalmente em busca de melhorias no comportamento ao cisalhamento e à compressão biaxial. Estes ajustes, ainda assim, não eram capazes de capturar o chamado efeito unilateral. Este fenômeno é

caracterizado por uma recuperação de rigidez ocasionado pelo fechamento das fissuras abertas quando o concreto passa de um estado de tração para um estado de compressão, como mostra a Fig. 4.

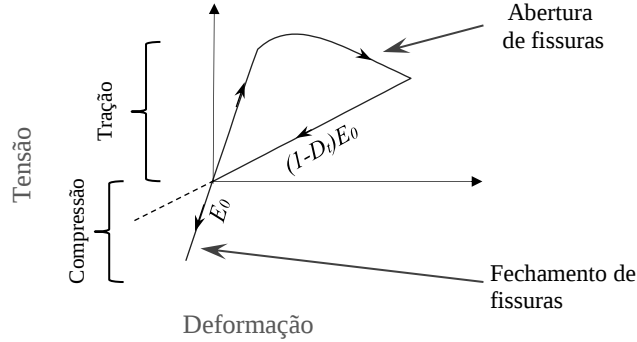


Figura 4. Efeito unilateral

Para contemplar o efeito unilateral, ao invés do dano médio apresentado na Eq. (8), Mazars et al. (2015) propuseram uma distinção entre o dano causado por tração e o dano causado por compressão. Assim, definem-se duas superfícies de carregamento independentes ao invés de apenas uma, como apresentado na Eq. (7):

$$f_t(\varepsilon_{eq,t}, D_t) = \varepsilon_{eq,t} - Y_t \leq 0. \quad (13)$$

$$f_c(\varepsilon_{eq,c}, D_c) = \varepsilon_{eq,c} - Y_c \leq 0. \quad (14)$$

onde $\varepsilon_{eq,t}$ e $\varepsilon_{eq,c}$ correspondem, respectivamente, às deformações equivalentes para a fissuração e o esmagamento do concreto:

$$\varepsilon_{eq,t} = \frac{I_\varepsilon}{2(1-2\nu)} + \frac{\sqrt{J_\varepsilon}}{2(1+\nu)}. \quad (15)$$

$$\varepsilon_{eq,c} = \frac{I_\varepsilon}{5(1-2\nu)} + \frac{6\sqrt{J_\varepsilon}}{5(1+\nu)}. \quad (16)$$

onde I_ε é o primeiro invariante do tensor das deformações e $J_\varepsilon = 1/2[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]$. As variáveis Y_t e Y_c assumem os valores máximos durante o histórico de carregamento. Assim:

$$Y_t = \max(\varepsilon_{eq,t}). \quad (17)$$

$$Y_c = \max(\varepsilon_{eq,c}). \quad (18)$$

A evolução de cada variável de dano é iniciada a partir de um respectivo limiar de dano, ε_{t0} para a tração e ε_{c0} para a compressão. Para a obtenção da tensão equivalente, determina-se uma variável de dano equivalente D correlacionada com a variável Y através lei de evolução:

$$D = 1 - \frac{Y_0(1-A)}{Y} - \frac{A}{e^{B(Y-Y_0)}}. \quad (19)$$

A variável Y é obtida através de uma correlação entre as variáveis Y_t e Y_c , assim como o limiar do dano Y_0 é obtido através de uma correlação entre os limiares ε_{t0} e ε_{c0} :

$$Y = rY_t + (1-r)Y_c. \quad (20)$$

$$Y_0 = r\varepsilon_{t0} + (1-r)\varepsilon_{c0}. \quad (21)$$

onde r é o coeficiente de triaxialidade que relaciona a deformação tridimensional com o estado puro de tração ($r = 1$) e o estado puro de compressão ($r = 0$). r é dado por (Lee e Fenves, 1998):

$$r = \frac{\sum \langle \bar{\sigma}_i \rangle_+}{\sum |\bar{\sigma}_i|}. \quad (22)$$

onde $\bar{\sigma}_i$ são as componentes da tensão equivalente nas direções principais $i = 1, 2$ e 3 . A e B são parâmetros do material relacionados com o formato da curva de dano. Estes são obtidos a partir de ensaios uniaxiais de tração e compressão onde se determinam os parâmetros de fissuração A_t e B_t e os parâmetros de esmagamento A_c e B_c . Mazars et al. (2015) propõe os seguintes valores para A e B :

$$A = A_t(2r^2(1-2k) - r(1-4k)) + A_c(2r^2 - 3r + 1). \quad (23)$$

$$B = r^{r^2-2r+2}B_t + (1-r^{r^2-2r+2})B_c. \quad (24)$$

O parâmetro k é um coeficiente de calibração para o caso de grandes deslocamentos de cisalhamento.

3.3 Versão uniaxial do μ -Model

Considerando a integração da seção através do método das fatias, cada fatia da seção do elemento finito de pórtico plano só pode estar tracionada ou comprimida. Desta forma, a consideração de uniaxialidade no caso do μ -Model faz o coeficiente de triaxialidade r valer 1 para tração e 0 para compressão. As consequências desta consideração, trazem simplificações importantes no μ -Model. Para a tração, $Y = Y_t$, $Y_0 = \varepsilon_{t0}$, $A = A_t$ e $B = B_t$ e para a compressão, $Y = Y_c$, $Y_0 = \varepsilon_{c0}$, $A = A_c$ e $B = B_c$. Assim, a evolução da variável de dano D pode ser desagregada em duas partes independentes:

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{t0}(1-A_t)}{Y_t} - \frac{A_t}{e^{B_t(Y_t-\varepsilon_{t0})}}. \quad (25)$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{c0}(1-A_c)}{Y_c} - \frac{A_c}{e^{B_c(Y_c-\varepsilon_{c0})}}. \quad (26)$$

A versão uniaxial do μ -Model apresentada por Mazars e Grange (2015) apresenta uma série de melhorias para o modelo, como a consideração de deformações permanentes,

amortecimento e deslizamento de armadura. Assim, o modelo apresentado neste trabalho é uma simplificação do μ -Model proposto pelos autores.

Pode-se fazer a mesma consideração para o modelo original de Mazars. Neste caso, os coeficientes de estado de tensão α_t e α_c valem, respectivamente 1 e 0 para a tração e 0 e 1 para compressão. Considerando o efeito do coeficiente de poisson ν , tem-se que as deformações equivalentes de tração e de compressão são, respectivamente:

$$\varepsilon_{eq,t} = \varepsilon_t. \quad (27)$$

$$\varepsilon_{eq,c} = \sqrt{2\nu} |\varepsilon_c|. \quad (28)$$

As variáveis de dano na tração e de dano na compressão passam a valer, respectivamente:

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\varepsilon_t} - \frac{A_t}{e^{B_t(\varepsilon_t - \varepsilon_{d0})}}. \quad (29)$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\sqrt{2\nu} |\varepsilon_c|} - \frac{A_c}{e^{B_c(\sqrt{2\nu} |\varepsilon_c| - \varepsilon_{d0})}}. \quad (30)$$

Os modelos uniaxiais têm a desvantagem de não considerarem efeitos de cisalhamento ou estados complexos de tensão. Por outro lado, estudos em estruturas de grande porte, como edifícios de concreto armado tornam computacionalmente inviável a utilização de modelos 3D, sendo este ponto uma das vantagens de modelos uniaxiais.

3.4 Modelo constitutivo para o aço

O modelo constitutivo adotado para o aço é baseado na teoria da plasticidade (Simo e Hughes, 1997), com a qual podem-se descrever alguns tipos de fenômenos em materiais dúcteis, como as deformações permanentes e o encruamento. Este último fenômeno não é considerado neste trabalho porque a análise do fenômeno de amolecimento tem maior relevância no concreto, que é o foco do trabalho. Desta forma, o modelo de aço adotado no trabalho é o elastoplástico perfeito.

4 EFEITO DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÃO

Um fenômeno comum em problemas envolvendo materiais quase frágeis ou que apresentem amolecimento é conhecido como localização de deformação. O concreto, portanto, é um material que está sujeito a isto. A localização de deformação, nada mais é do que um problema físico agravado por questões de instabilidades numéricas. No caso do concreto, a sua heterogeneidade induz a interações entre as fissuras formadas. Desta forma, as deformações se localizam dentro de uma região característica. Por causa desta interação, o estado de tensão de um ponto material não pode mais ser descrito apenas por características neste ponto, mas também deve levar em consideração a região vizinha ao ponto.

Matematicamente, a localização de deformação acarreta em um problema mal posto, pois o amolecimento gera uma perda de elipticidade das equações diferenciais que descrevem o processo de deformação (Bazant e Planas, 1998). Assim, as soluções numéricas não

convergem para as soluções corretas com o refinamento da malha de elementos finitos. Observa-se então uma dependência da solução à malha utilizada.

Muitos autores propõem abordagens distintas para contornar o problema de localização de deformação. Costuma-se distinguir tais abordagens em modelos não locais e modelos com parâmetros ajustados. No segundo caso, a fissuração pode ser formulada de maneira discreta (Hillerborg et al., 1976) ou distribuída (*smearred cracking*) (Bazant e Oh, 1983).

Bazant e Oh (1983) propõem uma teoria de bandas de fissuração. Estas bandas são finas regiões de largura h_c onde há uma maior interação entre as fissuras, as quais tendem a formar as microfissuras (Fig. 5). No modelo, a energia de fratura G_f é a energia consumida na formação e abertura de todas as microfissuras por unidade de área em um determinado plano:

$$G_f = h_c \int_0^\infty \sigma d\varepsilon^f = h_c \gamma_f. \quad (31)$$

onde γ_f é a densidade de energia de fratura da banda e ε^f diz respeito a deformação de abertura de fissuras. Assim, em uma análise por elementos finitos, a largura da banda h_c do material deve ser usada como tamanho característico do elemento para que a localização não ocorra. Algo que pode se tornar impraticável em casos onde as malhas não precisam ser tão refinadas.

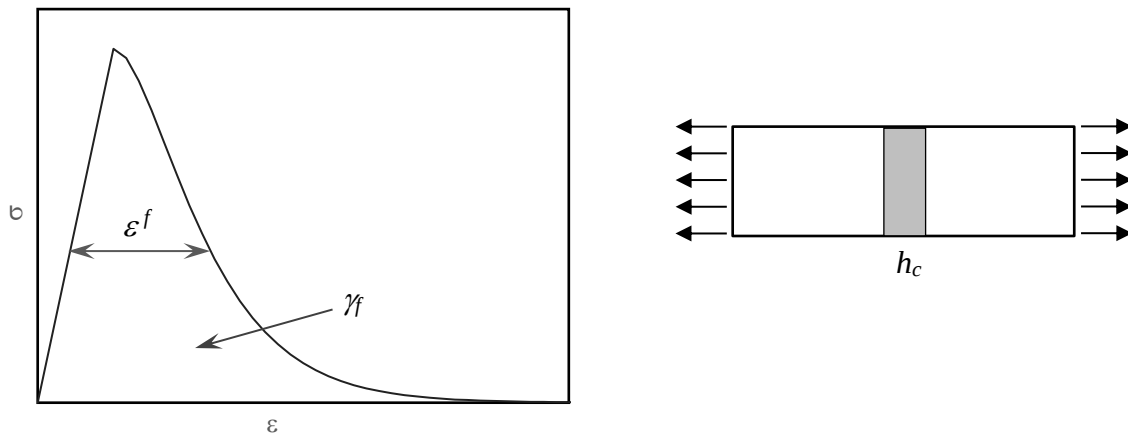


Figura 5. Representação da banda de localização da teoria de bandas de fissuração

Uma estratégia apresentada por Bazant e Oh (1983) para evitar o uso desnecessário de malhas muito refinadas se baseia na conservação da energia de fratura. Ajusta-se a curva de tensão/deformação para adequar o problema ao tamanho do elemento. Desta forma, tem-se que:

$$\gamma_f^{(e)} = \frac{h_c}{h^{(e)}} \gamma_f. \quad (32)$$

onde o superescrito (e) se refere ao elemento utilizado. Estudos posteriores em vigas de concreto mostraram que o tamanho característico $h^{(e)}$ possui um limite inferior, o qual é estimado em 3 vezes o tamanho do agregado. Outro limitante para o tamanho do elemento, entretanto, é encontrado ao se utilizar a teoria clássica de vigas. A curvatura de elementos

com tamanhos menores do que a altura h da viga não são corretamente capturados, sendo este na maioria das vezes o tamanho limitante.

5 EXEMPLOS

As versões uniaxiais apresentadas aqui foram implementadas no programa Finite Analysis Tool (FAST) desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará em linguagem C++. Foram feitos três exemplos com o modelo implementado com o intuito de validar a sua implementação.

5.1 Exemplo 1 - Comportamento uniaxial

Neste exemplo, um único elemento corrotacional é submetido a deslocamentos prescritos com o intuito da validação da versão do modelo uniaxial de Mazars (1986). O elemento contém apenas uma faixa na seção transversal, sendo a área da seção e o comprimento unitários. Os parâmetros utilizados para o modelo são apresentados na Tabela 1. Este exemplo pode ser encontrado nos tutoriais do programa de análise Code Aster (Fléjou, 2015). O controle de deslocamento foi feito de acordo com a Fig. 6, em um processo quase estático (sem a consideração de efeitos de inércia, viscosidade ou amortecimento).

A Fig. 7 apresenta os resultados obtidos com a implementação e compara com os resultados do Code Aster (Fléjou, 2015).

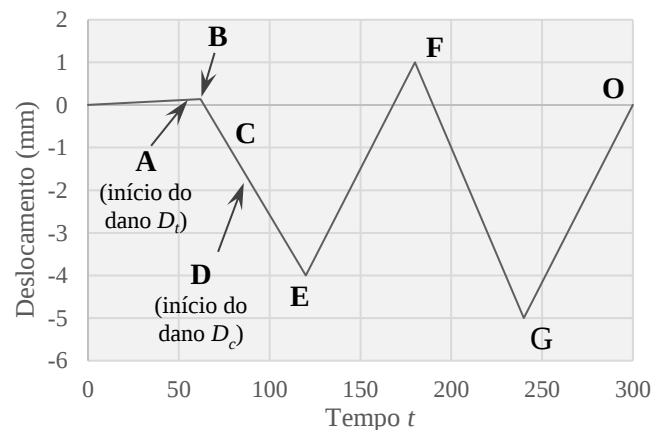


Figura 6. Deslocamentos prescritos do Exemplo 1

Tabela 1. Parâmetros do modelo uniaxial de Mazars (1986)

E (GPa)	ν	ε_{d0}	A_c	B_c	A_t	B_t
37,3	0,2	8,2e-5	1,71	2011,64	0,70	12189,24

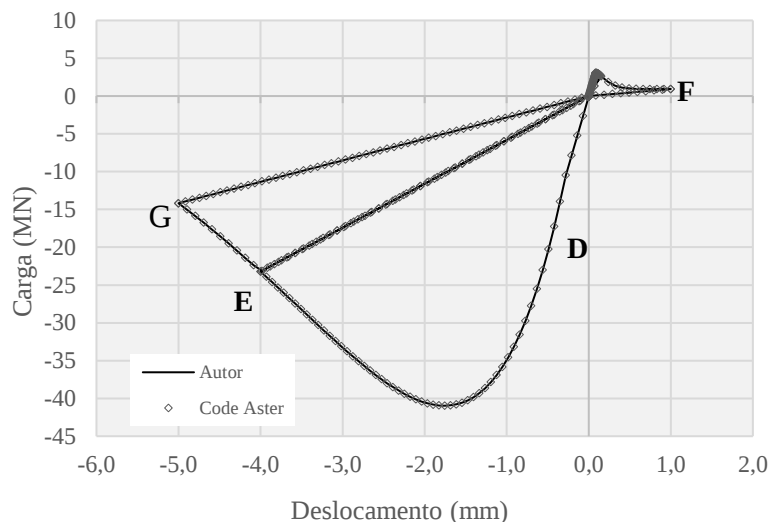


Figura 7. Curva de carga/deslocamento para o Exemplo 1

Também é possível avaliar a evolução das duas variáveis de dano ao longo dos deslocamentos prescritos. Este resultado é apresentado na Fig. 7. A evolução do dano de tração D_t tem início pouco antes de $t = 50$, enquanto o dano de compressão D_c continua nulo. A partir do início do primeiro descarregamento (ponto B), o dano de tração D_t se mantém constante e, instantes depois, o dano de compressão D_c começa a evoluir (ponto D). Os danos D_c e D_c nunca evoluem juntos neste caso, obviamente pelo fato de o modelo ser uniaxial.

Outro aspecto importante apresentado na Fig. 8 é que as variáveis de dano nunca diminuem. Este aspecto tem ligação com as leis da termodinâmica, já que a energia dissipada na degradação do material não pode ser recuperada. Em outras palavras, a danificação é um processo irreversível.

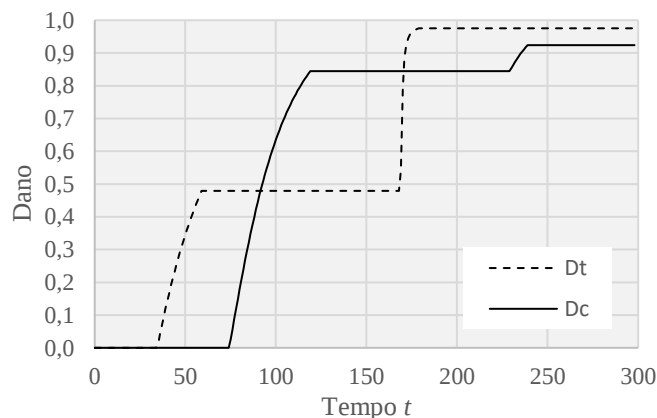


Figura 8. Evolução das variáveis de dano do Exemplo 1

O mesmo exemplo também pode ser utilizado para demonstrar a ocorrência do efeito unilateral. Como a Fig. 6 apresenta, é aplicado um deslocamento de tração até 0,14 mm (caminho OAB) e em seguida uma inversão de deslocamento (caminho BOC). A Fig. 9 mostra a primeira parte da curva, exibindo o momento em que a tensão na barra passa de tração para compressão. Nota-se que a rigidez reduzida por conta da presença de dano na

tração no caminho OAB é recuperada no caminho OC. Isto representa o fechamento das fissuras abertas no primeiro caminho.

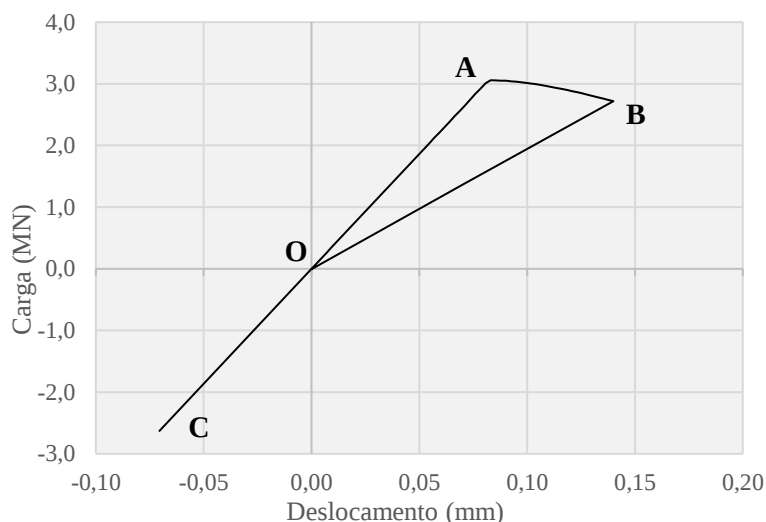


Figura 9. Efeito unilateral apresentado pelo Exemplo 1

5.2 Exemplo 2 – Pilar de concreto armado com carga excêntrica

Neste exemplo, um pilar de concreto armado é submetido a um carregamento excêntrico P aplicado no seu topo. É utilizado um método de deslocamentos prescritos. Este pilar foi testado experimentalmente por Espion (1993) e é um dos exemplos conhecidos na literatura como um *benchmark* para testes de modelos numéricos de concreto armado, como o trabalho de Bratina et al. (2004). Parente et al. (2014) usaram uma formulação corrotacional com método das fatias na integração da seção para validar a implementação de modelos constitutivos não lineares elásticos de concreto. Os modelos implementados são fornecidos por normas como o Eurocode 2:2014 e a NBR 6118:2007.

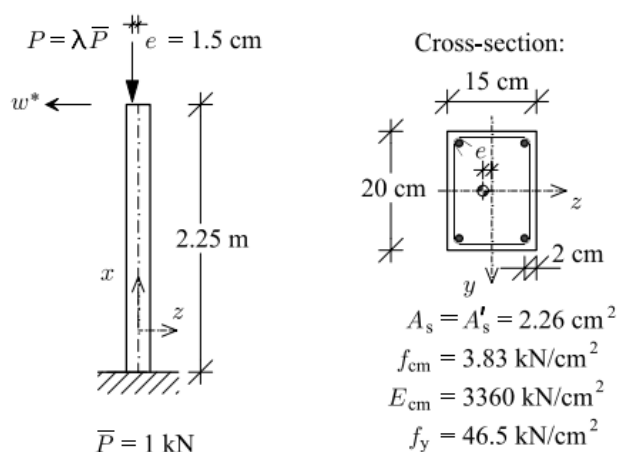


Figura 10. Pilar de concreto armado com carga excêntrica – Exemplo 2

Um dos modelos implementados por Parente et al. (2014) é encontrado no Eurocode 2:2014. A tração é considerada utilizando um modelo sugerido pelo CEB FIP 1990,

o qual captura o efeito de *tension stiffening*. A obtenção destas curvas é simples, pois requerem dados experimentais de fácil acesso. Para efeito de comparação, os parâmetros do μ -Model foram ajustados até se conseguir uma curva parecida com a apresentada por Parente et al. (2014). A Tabela 2 apresenta os parâmetros e a Fig. 11 apresenta as curvas de tensão/deformação.

Tabela 2. Parâmetros do μ -Model – Exemplo 2

E (GPa)	ε_{c0}	ε_{t0}	A_c	B_c	A_t	B_t
33,6	1,5e-4	7,5e-5	1,20	452	0,45	5320

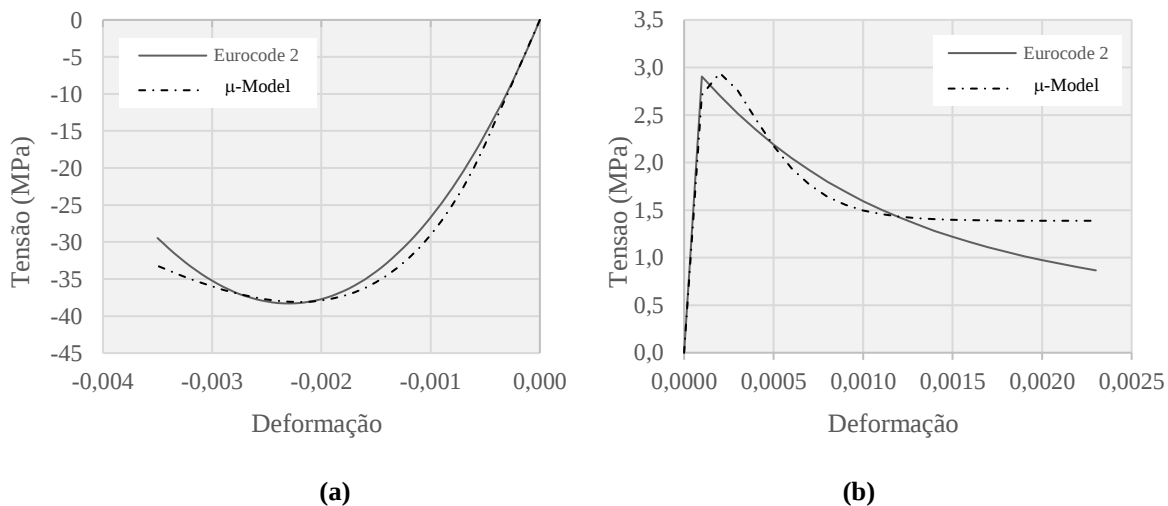


Figura 11. Curvas de tensão/deformação (a) na compressão e (b) na tração

As curvas apresentadas na Fig. 11 têm parâmetros em comum, como por exemplo os picos de resistência $f_t = 2,93\text{MPa}$ e $f_c = 38,3\text{MPa}$ e o módulo de rigidez inicial $E = 39\text{GPa}$. A obtenção dos parâmetros do μ -Model se mostra um pouco mais complexa, primeiramente pelo número de parâmetros utilizados, e em segundo lugar pelo seu formato implícito. A Fig. 12 apresenta a curva da carga P pelo deslocamento horizontal no topo do pilar obtida com a utilização do μ -Model e compara com os resultados numéricos obtidos por Parente et al. (2014) e experimentais obtidos por Espion (1993).

A curva obtida com o μ -Model apresenta uma rigidez um pouco maior do que o resultado obtido com o Eurocode 2:2004 (Parente et al., 2014). Este comportamento se justifica ao se observar os diagramas de tensão/deformação mostrados na Fig. 11. No trecho de compressão, o μ -Model perde rigidez mais lentamente do que a curva do Eurocode 2:2004. No trecho de tração, as curvas apresentam maiores discrepâncias, sendo o μ -Model também mais rígido, especialmente no trecho final mostrado na Fig. 11b.

A Fig. 13 apresenta o espectro de dano na compressão e na tração para o deslocamento final de 0,06m. Nota-se que não há localização de deformação para este exemplo.

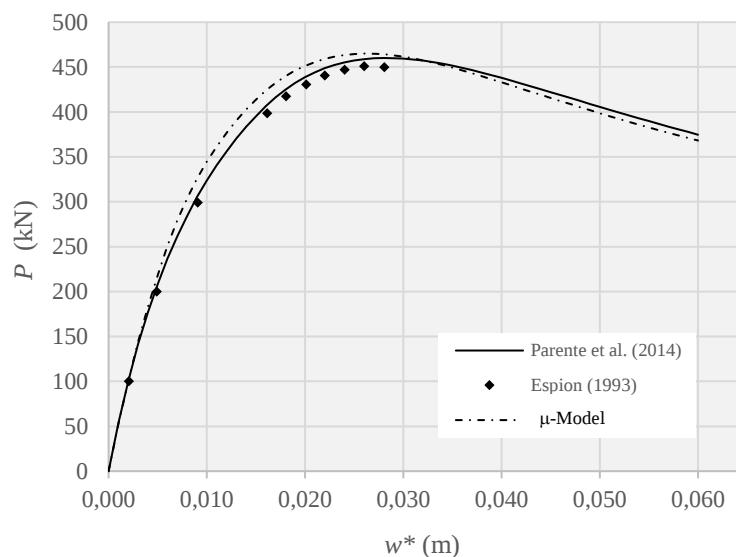


Figura 12. Curva de carga/deslocamento – Exemplo 2

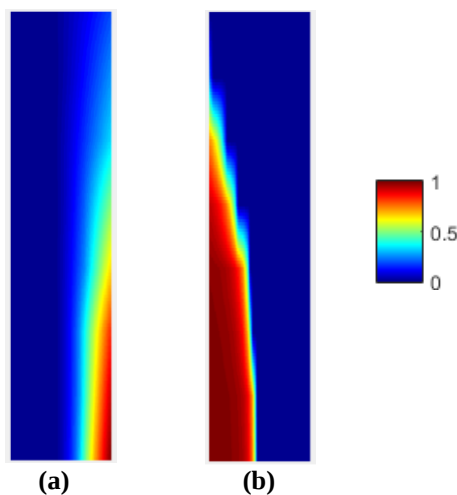


Figura 13. Distribuição do dano em $w = 0,06\text{m}$ (a) D_c e (b) D_t

5.3 Exemplo 3 – Viga biapoiada com carga transversal

Neste exemplo, uma viga de concreto armado biapoiada é submetida a um deslocamento prescrito vertical no centro do seu vão. Ensaios experimentais de carga cíclica desta viga podem ser encontrados em Ragueneau et al. (2010). No trabalho de Mazars e Grange (2015), os autores apresentam uma validação do μ -Model em sua versão 2D e simplificam o modelo para fins estruturais utilizando uma formulação uniaxial (método das fatias). Além disto, propõem melhorias para incluir efeitos de deformações permanentes, amortecimento e deslizamento de armadura.

A viga tem vão de 1,5m, seção transversal de 0,15m por 0,22m com armadura longitudinal 12mm de diâmetro e está submetida a uma carga P no centro do vão (Fig. 14). O aço foi modelado através de um modelo de plasticidade perfeita com patamar de escoamento

$f_y = 500\text{MPa}$ e módulo de elasticidade $E = 205\text{GPa}$. Para o concreto, foi adotado o μ -Model. Os parâmetros utilizados são apresentados na Tabela 3.



Figura 14. Viga biapoiada - Exemplo 3

Tabela 3. Parâmetros do μ -Model

E (GPa)	ε_{c0}	ε_{t0}	A_c	B_c	A_t	B_t	G_f (N/m)
28	$3,6\text{e-}4$	$1,0\text{e-}4$	1,25	395	1,00	8000	30

Um primeiro estudo é feito fixando-se o número de 50 faixas e variando-se a discretização longitudinal da viga. A Fig. 15 mostra os resultados obtidos para o deslocamento vertical no centro do vão, juntamente com o resultado obtido por Mazars e Grange (2015). Verifica-se três estágios bem definidos nas curvas de carga/deslocamento. Um estágio inicial, onde não há danificação no concreto e o aço ainda está na região elástica. Um segundo estágio, onde o concreto começa a danificar, caracterizada por uma redução da rigidez da estrutura. E por fim, um estágio de perda quase completa da rigidez do concreto e entrada do aço no regime plástico.

O aumento do número de elementos (e conseqüente redução dos seus tamanhos) faz com que haja convergência até o deslocamento de 3,0mm. A partir deste ponto (Fig.15b), o que se verifica é uma decrescente variação do terceiro estágio.

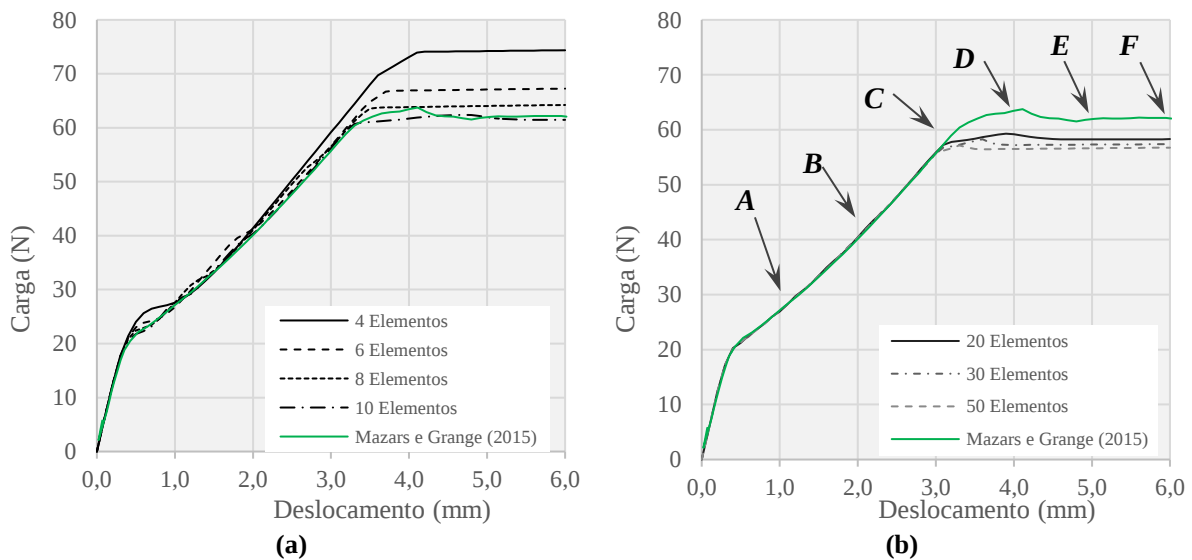


Figura 15. Curvas de carga-deslocamento para diversas malhas – Exemplo 3

A evolução da variável de dano D_t para o modelo com 20 elementos é apresentada na Fig. 16.

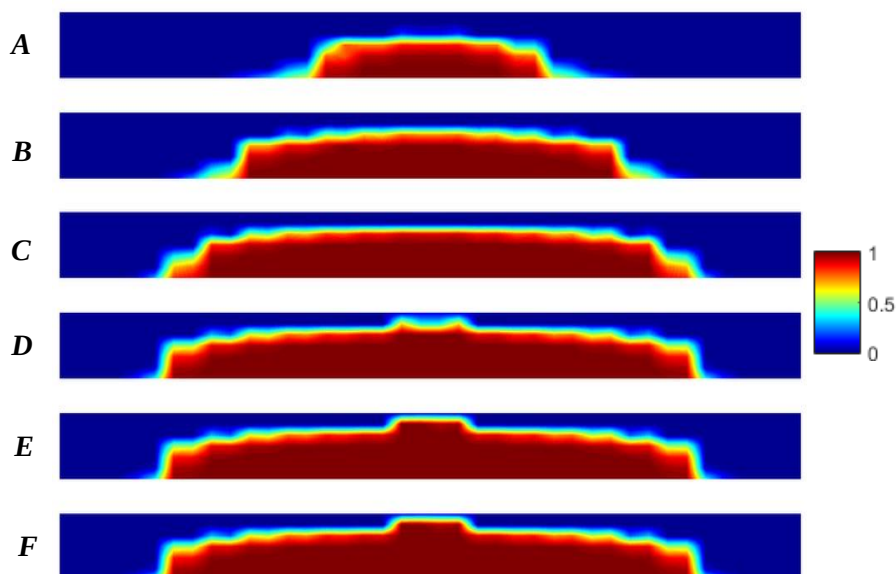


Figura 16. Evolução do dano D_t do Exemplo 3

O estudo do carregamento cíclico é feito através do controle de deslocamentos cíclico de amplitudes variáveis (máximo de $\pm 3\text{mm}$) apresentado na Fig. 17. Os resultados obtidos são comparados (Fig. 18) com trabalho experimental de Ragueneau et al. (2010). Nota-se que o μ -Model superestima a rigidez da viga, além de não representar bem o comportamento histerético e o efeito constritivo (ou efeito de estrangulamento) presente no experimento. Outra questão de relevância é o surgimento de deformações permanentes, as quais também ajudam a reduzir a rigidez da viga e que o modelo simples implementado neste trabalho não contempla.

Algumas melhorias no modelo podem aumentar significativamente o seu potencial para o comportamento cíclico, como as que Mazars e Grange (2015) sugerem para a versão uniaxial do μ -Model. Entretanto, qualitativamente, é possível ver que o modelo tem o comportamento esperado.

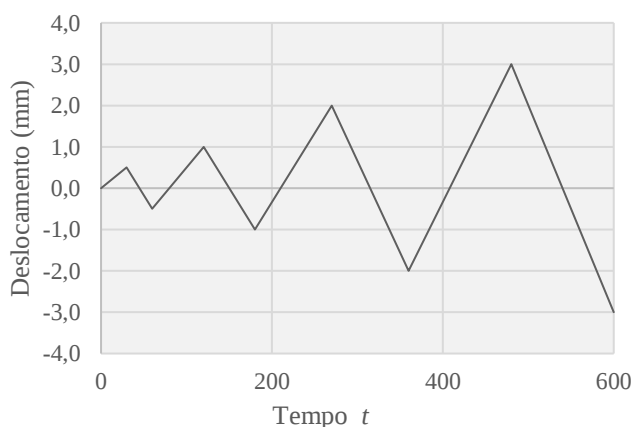


Figura 17. Controle de deslocamento cíclico do Exemplo 3

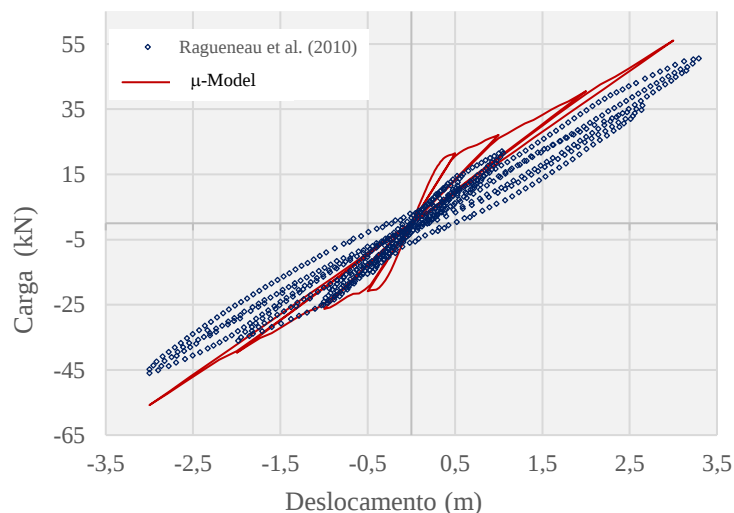


Figura 18. Carregamento cíclico – Exemplo 3

Um aspecto importante que pode ter levado a resultados mais rígidos é a não consideração do cisalhamento no modelo uniaxial. Aliado a isto, a falta de parâmetros bem definidos, como por exemplo o cobrimento da armadura e o módulo de elasticidade, podem ter influenciado na resposta rígida.

Neste exemplo, também não é verificada a presença de localização de deformação. É sabido que o efeito da localização de deformação em vigas de concreto só ocorre quando o comportamento da estrutura apresenta amolecimento. Desta forma, vigas submetidas à flexão com taxas de armadura elevadas (como é o caso deste exemplo) não apresentam problemas relacionados à sensibilidade de malha. Segundo Mazars e Grange (2015), a localização de deformação ocorre para vigas de concreto simples (sem armadura) submetidas a esforços tração ou de flexão, vigas de concreto armado submetidas a esforços de tração e vigas de concreto armado com taxas de armadura inferiores a um limite conhecido no Eurocode 2:2004 como taxa de fragilidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou as versões uniaxiais do modelo constitutivo de Mazars (1986) e uma versão simplificada do μ -Model (Mazars e Grange, 2015). O principal intuito foi propiciar avanços no estudo de pórticos planos de concreto armado submetidos ao fenômeno de colapso progressivo. As implementações feitas mostraram-se eficientes no caso de carregamentos monotônicos quando o comportamento estrutural não apresentou amolecimento, caso comum em vigas de concreto armado. A utilização do μ -Model para carregamentos cíclicos, entretanto, exige que melhorias no modelo sejam adotadas, principalmente a inclusão de deformações permanentes. Com relação à sensibilidade de malha, não se verificou em nenhum dos exemplos, a presença de localização de deformação. Este aspecto tem a ver com o comportamento global da estrutura, o qual não apresenta amolecimento.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem ao suporte financeiro da CAPES.

REFERÊNCIAS

- Arshian, A. H., Morgenthal, G. 2017. Three-dimensional progressive collapse analysis of reinforced concrete frame structures subjected to sequential column removal. *Engineering Structures*, v. 132, pp. 87-97.
- Bao, Y., Kunnath, S. K., El-Tawil, S., Lew, H. S. 2008. Macromodel-Based Simulation of Progressive Collapse: RC Frame Structures. *Journal of Structural Engineering*, v. 134, n. 7, pp. 1079-1091.
- Bathe, K. J. Finite element procedures. Prentice Hall, 1996.
- Bazant, Z., Oh, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. *Mater. Struct.*, v. 16, n. 3, pp. 155-177.
- Bazant, Z., Planas, J. 1998. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle structures. *CRC press*.
- Bratina, M., Saje, S., Planinc, I. 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures*, v.41, pp. 7181-7207.
- Chang, G., Mander, J. 1994. Seismic Energy Based Fatigue Damage Analysis of Bridge Columns: Part 1 - Evaluation of Seismic Capacity. *NCEER Technical Report No. NCEER-94-0006*; State University of New York, Buffalo, New York.
- Crisfield, M. 1991. Non-linear finite element analysis of solids and structures, vol. 1. Jhon Wiley & Sons.
- De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. C., Verhoosel, C. V. 2012. Non-linear finite element analysis of solids and structures. United Kingdom: Wiley.
- Espion, B. 1993. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs: creep and shrinkage of concrete. *TC 114 RILEM. E&FN Spon*.
- Fléjou, J. L. 2015. Relations de comportement non linéaires 1D. *CODE-ASTER*.
- Hillerborg, A., Modeer, M., Petersson, P. E. 1976. Analysis of crack formation and growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement Concrete Res.*, v. 6, pp. 773-782.
- Iribarren, B. S., Berke, P., Bouillard, P., Vantomme, J., Massart, T. J. 2011. Investigation of the influence of design and material parameters in the progressive collapse analysis of RC structures. *Engineering Structures*, v. 3, n. 10, pp. 2805-2820.
- Kachanov, L. M. 1958. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk*, v. 8, pp. 26-31.
- Kokot, S., Anthointe, A., Negro, P., Solomos, G. 2012. Static and dynamic analysis of a reinforced concrete flat slab frame building for progressive collapse. *Engineering Structures*, v. 40, pp. 205-217.

- Lee, J., Fenves, G. L. 1998. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Solids and Structures*, v. 124, p. 892.
- Lublinter, J., Oliver, J., Oller, S., Oñate, E. 1989. A plastic-damage model for concrete. *Journal of Solids and Structures*, v. 25, n. 3, pp. 299-326.
- Marjanishvili, S., Agnew E. 2006. Comparison of various procedures for progressive collapse analysis. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, v. 20, n. 4, pp. 365-374.
- Mazars, J. 1986. A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 25, n. 5, pp. 729-737.
- Mazars, J., Grange, S. 2015. Modeling of reinforced concrete structural members for engineering purposes. *Computers and Concrete*, v. 16, n. 5, pp. 683-701.
- Mazars, J., Hamon, F., Grange, S. 2015. A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loading. *Mater. Struct.*, v. 48, pp. 3779-3793.
- Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G. 1989. Continuum damage theory – Application to concrete. *J. Eng. Mech.*, v. 115, pp. 345-365.
- Mohamed, O. A. 2006. Progressive Collapse of Structures: Annotated Bibliography and Comparison of Codes and Standards. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, v. 20, n. 4, pp. 418-425.
- Parente, E., Nogueira, G. V., Meireles Neto, M., Moreira, L. S. 2014. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 7, n. 5.
- Park, R., Priestley, M. J. N., Gill, W. D. 1982. Ductility of square-confined concrete columns. *Journal of the Structural Division-ASCE*, v. 108, n. 4, pp. 929- 950.
- Popovics, S. 1973. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 3, n. 5, pp. 583-599.
- Rabotnov, Y. N. 1963. On the equations of state for creep. *Progress in Applied Mechanics (Prager Anniversary Volume)*, New York: MacMillan.
- Ragueneau, F., Lebon, G., Delaplace, A. 2010. Analyse expérimentale du comportement cyclique de poutres en béton armé. *LMT Internal report*.
- Sasani, M., Sagioglu, S. 2010. Gravity load redistribution and progressive collapse resistance of a 20-story RC structure following loss of an interior column. *ACI Struct. Journal*, v. 107, n. 6, pp. 636-644.
- Simo, J., Hughes, T. 2000. Computational inelasticity, v. 7, New York: Springer.
- Spacone, E., Filippou, F. C., Taucer, F. F. 1996. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, v. 25, p. 711-725.
- Tsai, M. H., Lin, B. H. 2008. Investigation of progressive collapse resistance and inelastic response for an earthquake-resistant RC building subjected to column failure. *Engineering Structures*, v. 30, n. 12, pp. 3619-3628.