



ANÁLISE DE FLEXÃO DE PLACAS COM CONSIDERAÇÃO DAS HIPÓTESES DE REISSNER ATRAVÉS DO MÉTODO SEM MALHA LOCAL DE PETROV-GALERKIN

Danilo Hiroshi Konda

José Antônio Fontes Santiago

danilo.konda@gmail.com

santiago@coc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil, COPPE, UFRJ

Caixa Postal 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

José Claudio de Faria Telles

telles@coc.ufrj.br

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil, COPPE, UFRJ

Caixa Postal 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Abstract. *This paper presents a numerical analysis of bending plates considering Reissner's hypothesis. A truly meshless method designated Meshless Local Petrov-Galerkin Method is used to obtain a linear system of equation. In order to enforce essential boundary conditions a direct interpolation process is applied using the function shape obtained with the collocation method. The formulation is based on the equilibrium equation leading to the equation system in terms of displacement. Reissner's theory takes account the deformations in thickness of plates, which does not occur in Mindlin's theory. Results obtained by the application of the presented formulation are discussed in this work, considering plates with different geometries, loads and boundary conditions. Furthermore, results are compared with the Kirchhoff's hypothesis to assess the formulation.*

Keywords: *Reissner plate, Truly meshless method, Meshless Local Petrov-Galerkin, Local Moving Least Square*

1 INTRODUÇÃO

Uma característica vantajosa dos métodos sem malhas é a possibilidade de resolução de problemas de valores de contorno sem o uso de malhas ou células.

Como o desenvolvimento dos métodos sem malhas, (Zhu et al., 1998) apresentam o primeiro método classificado de “verdadeiramente sem malha” por não necessitar de nenhum tipo de elemento, seja no processo de interpolação ou no processo de resolução das integrais. Este método foi denominado Element Free-Local Boundary Integral Equation (EF-LBIE) e apresentou excelentes resultados para equação de Laplace e Poisson. Por outro lado, a principal dificuldade do método residia no tratamento de integrais singulares. No mesmo ano, (Atluri e Zhu, 1998) apresentam uma nova formulação de problema de potencial linear baseada na forma fraca simétrica local da equação diferencial, denominada Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG). O método das penalidades é utilizado para impor as condições de contorno essenciais e a aproximação das variáveis é feita com a utilização do método dos mínimos quadrados móveis.

Com o avanço das técnicas verdadeiramente sem malhas, em especial o MLPG, várias formulações surgiram para o estudo do comportamento de placas finas e espessas, cabendo destacar o trabalho de (Soric et al., 2004), no qual é apresentado uma formulação para análise de placas com consideração de deformação por cisalhamento através do uso da cinemática do contínuo tridimensional. Um processo de interpolação linear ao longo da espessura da placa para obter os deslocamentos no plano, enquanto uma interpolação quadrática é utilizada para os deslocamentos transversais com o objetivo de evitar o efeito de “locking”.

No trabalho de (Xia et al., 2011) o MLPG é utilizado para o desenvolvimento de uma formulação para o problema elasto plástico considerando a teoria de Mindlin. Os autores utilizam uma função de forma composta, formada por uma função de base radial e uma função de base polinomial, mantendo a propriedade do Delta de Kronecker e consequentemente não necessitando de tratamentos adicionais para a imposição das condições de contorno essenciais. Para a fase não linear, é utilizado o algoritmo iterativo incremental de Newton-Raphson.

A teoria de Mindlin, proposta por (Mindlin, 1951), também chamada de Teoria de Deformação de Cisalhamento de Primeira Ordem, é destinada a placas finas e moderadamente espessas. A principal diferença entre a teoria de Mindlin e a teoria clássica de Kirchhoff (Kirchhoff, 1850) está na composição do deslocamento transversal, uma vez que, na teoria de Mindlin o deslocamento transversal é composto por deformações oriundas do esforço de flexão e também do esforço de cisalhamento. Com frequência a teoria de Mindlin é confundida com a teoria de Reissner, apresentada em (Reissner, 1945) e (Reissner, 1947), e é chamada de teoria de Reissner-Mindlin, uma vez que, são teorias semelhantes e que conduzem a resultados semelhantes. Cabe ressaltar, conforme demonstrado em (Wang et al., 2001), que apesar da similaridade no equacionamento e nos resultados, as duas teorias foram propostas de forma independente e são essencialmente diferentes.

A teoria de Reissner é obtida a partir do princípio variacional da energia de deformação complementar, com a hipótese de distribuição linear das tensões devido à flexão e distribuição quadrática das tensões cisalhantes, ambas ao longo da espessura. Já a teoria de Mindlin é desenvolvida com a consideração da variação linear dos deslocamentos ao longo da espessura

da placa, tendo como consequência a inexistência de deformações na direção da espessura, ou seja, desprezando as tensões σ_{33} . Tal fato não ocorre na teoria de Reissner, uma vez que, devido as hipóteses assumidas, tem-se obrigatoriamente uma variação não linear dos deslocamentos ao longo da espessura e com isto, a formulação proposta por Reissner faz consideração de deformações que ocorrem na direção ortogonal ao plano médio da placa.

Neste trabalho a formulação desenvolvida em (Xia et al., 2011) é modificada para atender as hipóteses de Reissner com a utilização de uma região não convencional no processo de integração. Na nova formulação a função de interpolação do ponto base é utilizada para aproximar as variáveis em cada ponto de Gauss, diminuindo muito o custo computacional. A função de ponderação utilizada não apresenta a propriedade do delta de Kronecker, sendo que, para imposição das condições de contorno essenciais, utiliza-se um processo de interpolação direta. Desta forma, a própria função de interpolação, obtida no método dos mínimos quadrados móveis, é utilizada para modificar a matriz K no sistema de equações lineares.

2 EQUAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DE PLACAS DE REISSNER

O principal efeito da consideração das deformações por cisalhamento transversal é que, na placa deformada, o módulo da rotação da seção transversal ϕ_2 difere do módulo da inclinação da superfície média $w_{,2}$, conforme apresentado na Fig. 1.

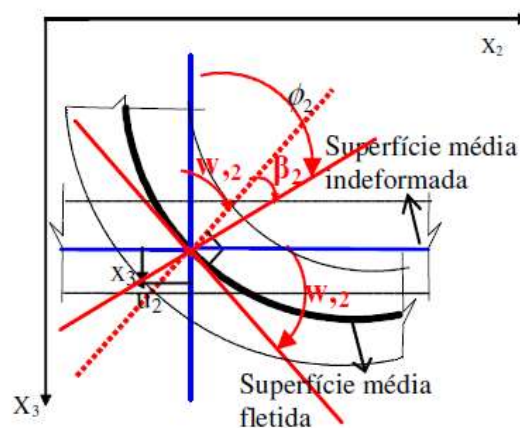


Figura 1. Representação da deformação por cisalhamento transversal (Konda,2008)

Na Fig. 2 é apresentado um elemento de placa, com identificação de sua superfície média e ainda a orientação do sistema de eixos coordenados juntamente com a orientação positiva dos deslocamentos generalizados.

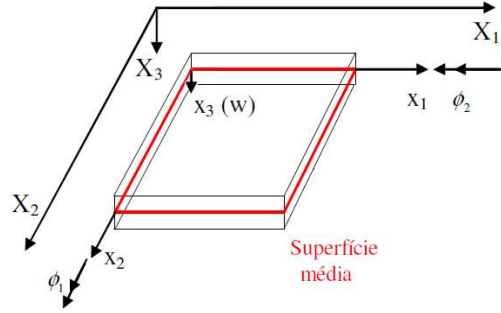


Figura 2. Sistema de coordenadas e orientação dos deslocamentos da placa

A base da teoria de Reissner é constituída por um sistema de oito equações diferenciais de primeira ordem, sendo três equações relativas ao equilíbrio de forças e cinco equações relativas às relações entre esforços e deslocamentos. A partir da Fig. (3), pode-se escrever as expressões para o equilíbrio de forças. Para a direção X_3 obtém-se:

$$Q_{i,i} + g = 0 \quad i = 1,2 \quad (1)$$

onde g é o carregamento distribuído sobre a superfície da placa.

Do mesmo modo, através do equilíbrio de momentos nas direções X_1 e X_2 , obtemos:

$$M_{ij,j} - Q_i = 0 \quad i, j = 1,2 \quad (2)$$

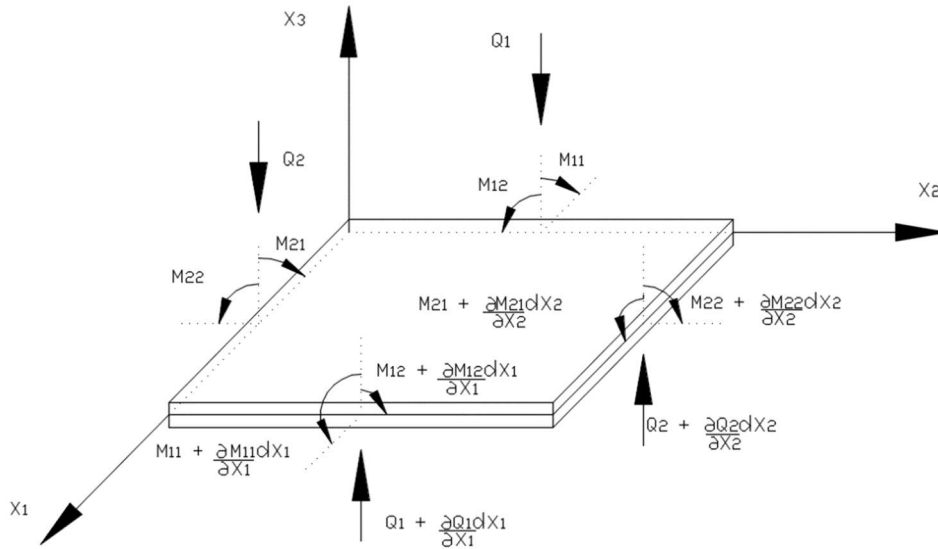


Figura 3. Esforços atuantes em um elemento de placa. Adaptado de (Konda,2008)

As relações entre os esforços e os deslocamentos são obtidas a partir da extremização de um funcional escrito em termos de tensões e deformações e são dadas por:

$$M_{11} = D(\phi_{1,1} + \nu\phi_{2,2}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g \quad (3)$$

$$M_{22} = D(\phi_{2,2} + \nu\phi_{1,1}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g \quad (4)$$

$$M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2}(\phi_{1,2} + \phi_{2,1}) \quad (5)$$

$$Q_1 = \frac{D(1-\nu)}{2}\lambda^2(\phi_1 + w_{,1}) \quad (6)$$

$$Q_2 = \frac{D(1-\nu)}{2}\lambda^2(\phi_2 + w_{,2}) \quad (7)$$

Onde D é a rigidez a flexão da placa e λ é uma constante característica da teoria de Reissner, sendo dados por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

Sendo E e ν , o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material que constitui a placa, respectivamente.

As tensões tangenciais são consideradas nulas nas faces da placa e na ausência de forças normais nos bordos, para uma placa constituída de material elástico linear, homogêneo e isotrópico, pode-se concluir que a superfície média da placa é coincidente com a superfície neutra. Desta forma, as componentes de tensão σ_{ij} variam linearmente ao longo da espessura, sendo dadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{12}{t^3} M_{ij} x_3 \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

A partir da Eq. (9) é possível escrever a expressão para a tensão σ_{i3} e posteriormente a expressão para a tensão σ_{33} . Logo:

$$\sigma_{i3} = \frac{3Q_i}{2t} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{t} \right)^2 \right] \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

$$\sigma_{33} = \frac{g x_3}{2t} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{t} \right)^2 \right] \quad (11)$$

3 MLPG PARA O PROBLEMA DE FLEXAO DE PLACAS

O conceito geral do MLPG foi apresentado por (Atluri et al., 2002). A formulação apresentada neste trabalho é baseada no MLPG1, no qual a função de forma é obtida a partir do Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MMQM) e a função de ponderação é a mesma utilizada para ponderar o resíduo quadrático no MMQM.

A forma fraca local das equações de equilíbrio é obtida a partir do método dos resíduos ponderados aplicado às Eq. (1) e Eq. (2), para um subdomínio local Ω_s . Tem-se:

$$\int_{\Omega_s} w_L (Q_{i,i} + g) d\Omega = 0 \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

$$\int_{\Omega_s} w_L (M_{ij,j} - Q_i) d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (13)$$

Onde w_L é a função de ponderação utilizada para ponderar o erro quadrático no MMQM.

O desenvolvimento algébrico para obtenção do sistema de equações discretizado é análogo ao apresentado por (Xia et al., 2011) para a teoria de Mindlin, diferindo apenas pelos termos integrais que compõem o vetor de cargas nodal f_L , correspondente a um nó L

qualquer. A matriz de rigidez $\mathbf{k}_L$, obtida a partir das relações dadas pelas Eq. (3) a Eq. (7), é idêntica nas duas teorias e é dada por:

$$\mathbf{k}_L = \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{fL}^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f d\Omega + \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{qL}^T \mathbf{D}_q \mathbf{B}_q d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_q \mathbf{D}_q \mathbf{B}_q d\Gamma \quad (14)$$

O vetor de cargas nodal, para um nó L qualquer, para a teoria de Reissner é dado por:

$$\mathbf{f}_L = \int_{\Gamma_{s\sigma}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \bar{\sigma}_f d\Gamma + \int_{\Gamma_{s\sigma}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_q \bar{\sigma}_q d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{W}_L^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{fL}^T \mathbf{R} d\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \mathbf{R} d\Gamma \quad (15)$$

Sendo:

$$\mathbf{V}_{fL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_L}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W_L}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial W_L}{\partial x_2} & \frac{\partial W_L}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{V}_{qL} = \begin{bmatrix} W_L & 0 & \frac{\partial W_L}{\partial x_1} \\ 0 & W_L & \frac{\partial W_L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \varphi_n & 0 & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ 0 & \varphi_1 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & 0 & \varphi_n & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{n}_f = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{n}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_f = [M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12}]^T \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}_q = [Q_1 \quad Q_2]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{R} = \left[\frac{v}{(1-v)\lambda^2} \mathbf{g} \quad \frac{v}{(1-v)\lambda^2} \mathbf{g} \quad 0 \right]^T \quad (26)$$

A ênfase ($\bar{}$) faz referência aos valores dos esforços prescritos no contorno. n_1 e n_2 são as componentes da direção normal ao contorno, apontada para fora do domínio do problema. φ é a função de forma, obtida a partir do MMQM, utilizada para escrever os deslocamentos do nó L em função dos valores nodais dos pontos que compõem o subdomínio local do nó L. A ênfase ($\tilde{}$) refere-se aos valores aproximados e ($\hat{}$) refere-se aos valores fictícios nodais utilizados para aproximar os deslocamentos no ponto L.

$$\tilde{\mathbf{u}}_L = \begin{Bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_{1(1)} \\ \hat{\phi}_{2(1)} \\ \hat{w}_{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{1(n)} \\ \hat{\phi}_{2(n)} \\ \hat{w}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Desta forma, obtém-se um sistema de três equações para o nó L, com três incógnitas relacionadas para cada ponto que constitua seu subdomínio. Ao escrever o sistema de equações para cada ponto que compõe o domínio do problema, obtém um novo sistema de equações lineares, que pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{K}_{(3N \times 3N)} \mathbf{U}_{(3N \times 1)} = \mathbf{F}_{(3N \times 1)} \quad (28)$$

A função adotada para ponderar o erro quadrático no MMQM foi a Gaussiana com consideração do raio do subdomínio. Desta forma, devido à ausência da propriedade do delta de Kronecker, decidiu-se pela imposição das condições de contorno essenciais, utilizando-se as funções de forma obtidas no MMQM. Assim, para cada condição de contorno essencial prescrita no nó, tem-se uma linha da matriz $\mathbf{K}$ alterada, referente ao nó que possui a condição de contorno essencial prescrita, de modo a atender uma ou mais das seguintes expressões:

$$\tilde{\mathbf{u}}_L = \bar{\mathbf{u}}_L = \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_{1(1)} \\ \hat{\phi}_{2(1)} \\ \hat{w}_{(1)} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{1(n)} \\ \hat{\phi}_{2(n)} \\ \hat{w}_{(n)} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A solução do sistema global, fornece resultados em termos de valores fictícios, sendo que, os deslocamentos reais aproximados são obtidos pela Eq. (27).

4 PROPOSTA DE INTEGRAÇÃO NÃO CONVENCIONAL

As integrais que compõem as Eq. (14) e Eq. (15) são resolvidas numericamente, em geral utilizando-se um processo de quadratura, sendo que as funções devem ser avaliadas em cada ponto de quadratura. No processo de integração usual, utilizado no MLPG, para cada ponto de quadratura, constrói-se uma função de forma à partir de do subdomínio do próprio ponto de quadratura, elevando consideravelmente o custo computacional, uma vez que, a quantidade de pontos de quadratura é muito superior à quantidade de nós para analisar o problema. Uma das alternativas para se evitar a construção de um subdomínio local para cada ponto de quadratura é a utilização do domínio de influência para a construção da função de forma para o ponto de quadratura.

Neste trabalho, utiliza-se para integração numérica a regra de quadratura Gaussiana. A função de interpolação, construída para o ponto base a partir do MMQM, é válida para qualquer ponto dentro do subdomínio do ponto base. Sendo assim, a função de forma do ponto base é utilizada para aproximar as variáveis em cada ponto de Gauss, dispensando a construção de uma nova função de forma específica para o ponto de Gauss. Com isto, tem-se um custo computacional muito menor quando comparado ao processo de integração convencional, inclusive quando feito a partir dos domínios de influência.

Da mesma forma que no processo de integração convencional, diversos fatores influenciam diretamente a precisão dos resultados, como por exemplo, o tamanho do subdomínio do ponto base, pontos utilizados na construção da função de forma, o tamanho do domínio de integração e outros.

Na Fig. 4, à esquerda é apresentado o processo de integração no qual cada ponto de Gauss possui um subdomínio local específico, utilizado para construir uma função de forma para o ponto de quadratura. Desta forma, cada subdomínio local do ponto de quadratura pode conter uma quantidade diferente de pontos para obtenção da função de forma. Neste processo de integração, obtém-se uma precisão maior na aproximação das funções nos pontos de quadratura, uma vez que, cada ponto de quadratura tem sua própria função de forma. Em contrapartida, devido à grande quantidade de pontos de quadratura, o custo computacional torna-se elevado na obtenção das funções de aproximação.

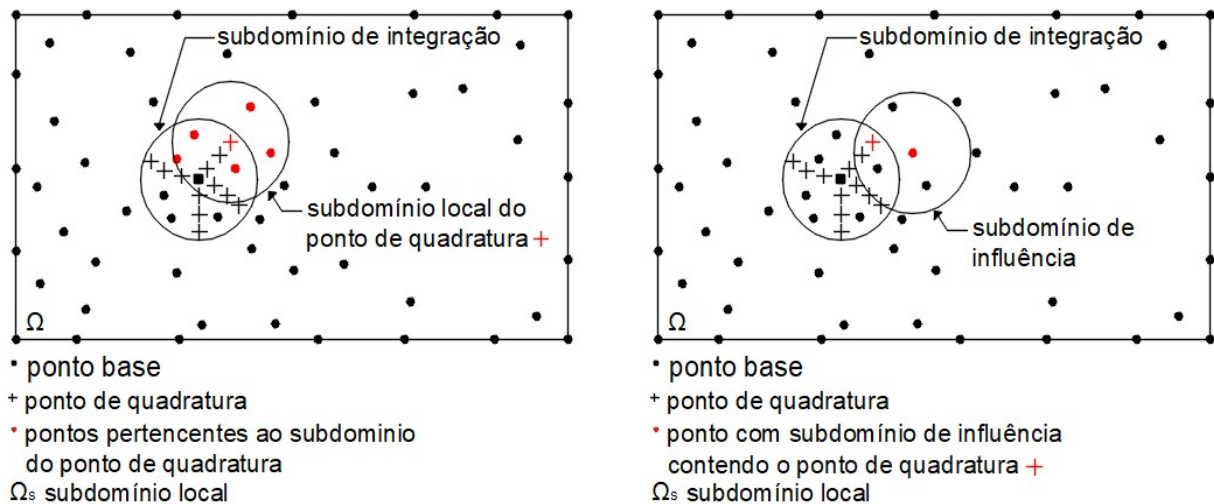


Figura 4. Processos de integração usuais.

Na Fig. 4, à direita tem-se um processo de integração semelhante ao descrito anteriormente. A diferença é que, ao invés de se construir um subdomínio local para cada ponto de Gauss, constrói-se um subdomínio de influência para cada ponto utilizado na discretização do domínio do problema. A função de forma para cada ponto de Gauss é construída à partir dos pontos cujos subdomínios de influência contenham o ponto de quadratura. Desta forma, pode-se construir uma função de forma específica para cada ponto de Gauss sem a necessidade de montar um subdomínio para cada ponto de Gauss. Como a quantidade de pontos utilizados para discretizar o problema é muito menor que a quantidade de pontos de quadratura, tem-se uma redução significativa no custo computacional sem afetar a precisão.

Sabendo que a função de forma é válida para um subdomínio local, na Fig. 5 é apresentado o processo de integração utilizado neste trabalho. Este processo de integração não convencional, emprega as funções de forma dos pontos utilizados para discretizar o domínio do problema, para aproximar também as funções nos pontos de quadratura.

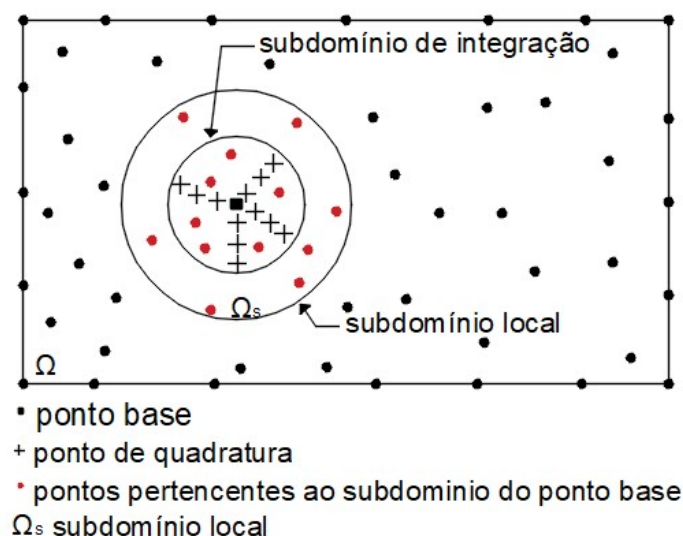


Figura 5. Modelo de integração utilizando a função de forma do subdomínio local.

Nos processos de integração usuais, os pontos do subdomínio de integração ou os pontos cujos domínios de influência contêm o ponto de integração, são responsáveis pelos elementos não nulos das linhas da matriz K . Já no processo utilizado neste trabalho, apenas os pontos que compõem o subdomínio local do ponto base são responsáveis pelos elementos não nulos da matriz K .

5 APLICAÇÃO NUMÉRICA

Um exemplo é apresentado agora para demonstrar o desempenho da formulação apresentada. Uma placa quadrada apoiada em todas as bordas é analisada. A solução analítica da estrutura em estudo está disponível para a teoria de placas finas e será utilizada para avaliar os resultados obtidos.

A placa possui aresta com dimensão de 4m, espessura de 0.08m e carga distribuída de 0.64KN/m² negativo. Um total de 289 pontos foram utilizados para representar o domínio e contorno do problema através de uma distribuição homogênea, ou seja, 64 pontos no contorno e 225 pontos no domínio. O coeficiente de Poisson adotado é 0,3 e o módulo de elasticidade longitudinal é 2000GPa. Para obtenção das funções de forma utilizou-se base monomial de ordem quadrática e um mínimo de 10 pontos para cada subdomínio local. O subdomínio de integração considerado foi coincidente com do subdomínio local de cada ponto.

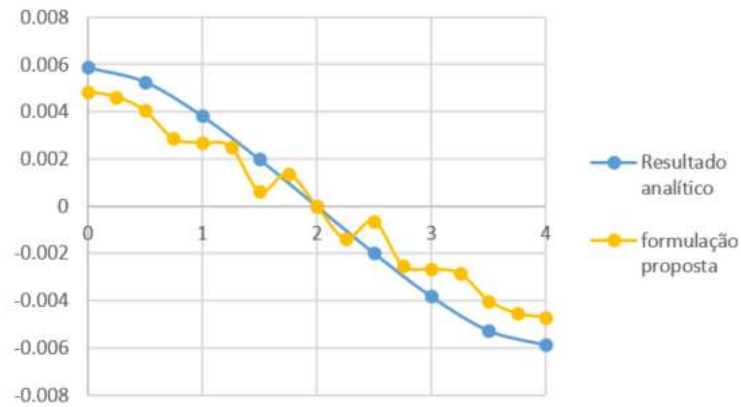


Figura 6. Rotação na direção 1

As rotações nas direções 1 e 2 são apresentadas nas Fig. 6 e Fig 7. Os valores se aproximam da solução analítica. Na Fig. 6 pode-se observar diversas regiões com oscilações que, em geral, ocorrem devido a matrizes mal condicionadas. Cabe destacar, que as mesmas matrizes são utilizadas na obtenção dos deslocamentos apresentados nas Fig. 7 e Fig. 8, e estas não apresentam nenhuma região com perturbação característica de matrizes mal condicionadas. As origens das perturbações na Fig. 6 ainda estão sendo estudadas.

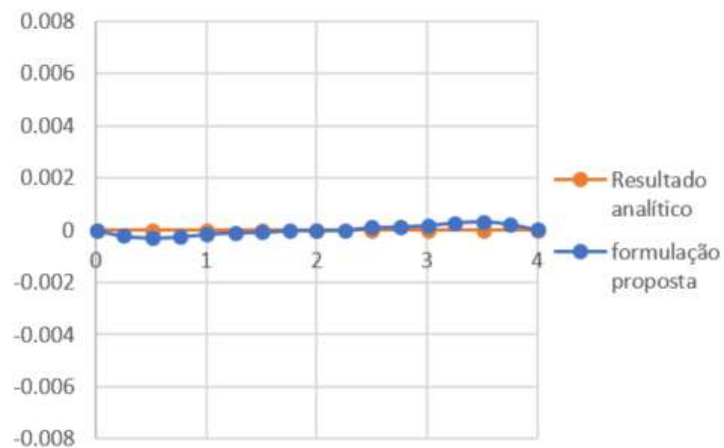


Figura 7. Rotação na direção 2

O deslocamento transversal, apresentado na Fig. 8, foi consideravelmente menor que a solução analítica, cabendo ressaltar que está a pesquisa que deu origem a este trabalho ainda está em andamento.

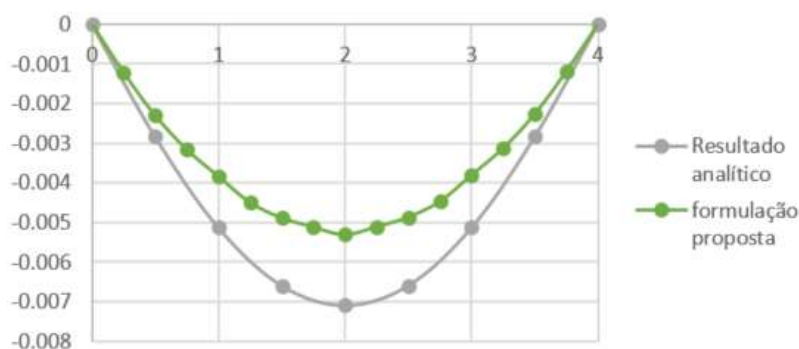


Figura 8. Deslocamento transversal

6 CONCLUSÕES

Avaliar as funções em cada ponto de Gauss a partir das funções de forma obtidas para cada ponto do problema, evita a construção de funções de forma para pontos de Gauss, permitindo assim, uma redução considerável do custo computacional. Ao final da fase de processamento, a formulação fornece os deslocamentos nodais fictícios e a obtenção dos deslocamentos reais fica condicionada à utilização da função de forma de cada ponto do problema. A desvantagem da formulação proposta é a instabilidade nos resultados quando da variação do tamanho do suporte de integração ou da quantidade de pontos utilizados na montagem do suporte local dos pontos do problema.

Vale dizer que mais estudos estão sendo realizados sobre esta formulação, incluindo o uso de nós de Chebyshev para distribuição de pontos e também diversas relações entre o tamanho do subdomínio local de cada ponto e o tamanho ou forma do domínio de integração na tentativa de se obter resultados mais estáveis e precisos.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPQ (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Atluri, S. N., Shen, S., 2002. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, vol. 3, n. 1, pp. 11-51.
- Atluri, S. N., Zhu, T., 1998. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 117-127.
- Kirchoff, G., 1850. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, n. 1, pp. 51-88.

- Konda, D. H., 2008. Análise de Pavimentos de Edifícios Através de uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno Baseada nas Hipóteses de Reissner. Msc dissertation, Universidade Estadual Paulista/Ilha Solteira.
- Mindlin, R. D., 1951. Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers*, vol. 18, n. 1, pp. 31-38.
- Reissner, E., 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers*, vol. 12, n. 1, pp. A68-A77.
- Reissner, E., 1947. On bending of elastic plates. *Quarterly of applied mathematics*, vol. 5, n. 1, pp. 55-68.
- Soric, J., Li, Q., Jarak, T., Atluri, S. N., 2004. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for analysis of thick plates. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 06, n. 4, pp. 349-357.
- Xia, P., Long, S. Y., Wei, K. X., 2011. An analysis for the elasto-plastic problem of the moderately thick plate using the meshless local Petrov-Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 35, n. 1, pp. 908-914.
- Wang, C. M., Lim, G. T., Reddy, J. N., Lee, K. H., 2001. Relationship between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Engineering Analysis*, vol. 23, n. 1, pp. 838-849.
- Zhu, T., Zhang, J.-D., Atluri, S. N., 1998. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, vol. 21, n. 1, pp. 223-235.