



DIMENSIONAMENTO DE PILARES SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA POR UM NOVO CRITÉRIO DE RUÍNA PARA ELEMENTOS LINEARES EM CONCRETO ARMADO VISANDO OTIMIZAÇÃO COMPUTACIONAL

Lemuel Domenicali da Silva

Marcelo Araujo da Silva

lemuel.domenicali@ufabc.edu.br

marcelo.araujo@ufabc.edu.br

Universidade Federal do ABC

Av. dos Estados, 5001, CEP 09210-580, SP, Santo André, Brasil

Resumo. Quando se tem elementos estruturais de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, em especial o elemento pilar, o qual devido as suas características de resistência e dada a não linearidade dos materiais, o seu dimensionamento na maioria das vezes necessita de processos aproximados ou ainda da utilização de ábacos de interação como recurso, que apesar de precisos, teoricamente ainda são complexos o que pode interferir diretamente na morosidade do processo. Uma análise feita entre os métodos de dimensionamento de pilares lecionados durante o curso de Engenharia de Estruturas motivou a busca de novos procedimentos que se utilizem de métodos simplificados e interativos, isto é, otimizados computacionalmente para obter resultados satisfatórios e que garantam os critérios mínimos, prescritos pela NBR 6118 (2014), favoráveis à segurança. Este artigo tem como principal objetivo demonstrar qual a maneira mais eficiente para o dimensionamento de pilares sujeitos a flexão composta oblíqua através de análises e comparações do método atualmente dispostos pela NBR 6118 (2014) com um Novo Critério de Ruína Para Barras de Concreto Armado Sujeitas à Flexão Oblíqua Composta proposto por Marcelo A. Silva, Reyolando M.L.R.F. Brasil, Jasbir S. Arora e Colbi C. (2000). Como ferramenta de otimização computacional, será utilizado o aplicativo P-Calc disponível em <www.pcalc.com.br>.

Palavra-chave: Pilares submetidos à flexão composta oblíqua, critério de ruína, método simplificado, otimização computacional.

INTRODUÇÃO

Uma dificuldade inerente ao concreto armado é que suas características de resistência dependem da disposição e quantidade de armaduras e, dada a não linearidade dos materiais utilizados, dos níveis de deformação em cada ponto das infinitas seções transversais de uma estrutura. Essa circunstância dificulta sobremaneira a definição das restrições a serem impostas no processo de otimização, especialmente em problemas de otimização dinâmica.

Quando se tem elementos estruturais de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, em especial o elemento pilar, o seu dimensionamento na maioria das vezes necessita de processos aproximados ou ainda da utilização de ábacos de interação como recurso, que apesar de precisos, teoricamente ainda são complexos o que pode interferir diretamente na morosidade do processo.

Segundo SANTOS (1994), não se conhece até hoje um processo direto e "exato" de dimensionamento de elementos lineares submetidos à flexão composta oblíqua, a não ser por via indireta, através de diagramas de interação ou por processos indiretos utilizando tentativas.

Atualmente a NBR 6118 (2014) têm-se utilizado de métodos aproximados para o dimensionamento de pilares em concreto armado sujeitos a flexão composta oblíqua, os quais muitas vezes não apresentam resultados satisfatórios, devido, na maioria das vezes, serem muitos conservativos a favor da segurança, o que limita o maior aproveitamento dos elementos dimensionados que são suficientes para atender a maiores carregamentos não ultrapassando a capacidade resistente da seção.

Um novo critério de ruína para vigas e colunas sujeitas à flexão oblíqua composta, apresentado por SILVA e BRASIL (2000), baseia-se em uma aproximação da superfície de ruptura real por uma superfície empírica, função de oito parâmetros. Quatro são as resistências em alguns pontos específicos na superfície e quatro são coeficientes exponenciais de sua equação. A função objetivo é o erro com que os momentos fletores são aproximados, enquanto que as variáveis de projeto são os coeficientes exponenciais. Como se vê, trata-se de um procedimento via técnicas numéricas de otimização para determinação de diagramas ou ábacos de interação.

Em busca de novos procedimentos que se utilizem de métodos simplificados e interativos, isto é, otimizados computacionalmente, foi realizada uma análise entre os métodos, comparando as áreas de aço, a resistência do concreto, os esforços solicitantes e os esforços resistentes e com os resultados foi possível demonstrar qual a maneira mais eficiente para o dimensionamento de pilares sujeitos a flexão composta oblíqua.

Como ferramenta de otimização computacional, foi utilizado o aplicativo P-Calc disponível em < www.pcalc.com.br >.

Demonstra-se que para uma mesma seção de concreto armado, mantidas a distribuição das armaduras e as características mecânicas dos materiais, o incremento da área total de armadura $A_{s,tot}$ se traduz numa expansão tridimensional da correspondente superfície de interação (Forni, 1980) [3].

2 MÉTODO SIMPLIFICADO

A NBR 6118 (2014, item 17.2.5), apresenta um método simplificado para processos aproximados no dimensionamento a flexão oblíqua simples ou composta. Este método simplificado, conhecido também como método da carga de contorno de Bresler (1960), é baseado na representação da superfície de ruptura por uma família de curvas, onde uma curva é criada para cada valor de $N_{Rd} = N_{Sd}$. A forma geral das curvas é representada por uma equação adimensional de interação escrita como [5]:

$$\left(\frac{M_{Rd,x}}{M_{Rd,xx}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_{Rd,y}}{M_{Rd,yy}} \right)^\alpha = 1 \quad (3)$$

onde $M_{Rd,x}$ e $M_{Rd,y}$ são as componentes do momento resistente de cálculo em flexão oblíqua composta, segundo os dois eixos principais de inércia x e y , da seção bruta, com um esforço normal resistente de cálculo N_{Rd} igual à normal solicitante N_{Sd} . Esses são os valores que se deseja obter; $M_{Rd,xx}$ e $M_{Rd,yy}$ são os momentos resistentes de cálculo segundo cada um dos referidos eixos em flexão composta normal, com o mesmo valor de N_{Rd} . Esses valores são calculados a partir do arranjo e da quantidade de armadura em estudo; α é um expoente cujo valor depende de vários fatores, entre eles o valor da força normal, a forma da seção, o arranjo da armadura e de suas porcentagens. Se adotados os valores de $\alpha = 1$, o critério de ruptura da Equação (3) é a favor da segurança, porém muito conservativo como mostra a Figura 2.

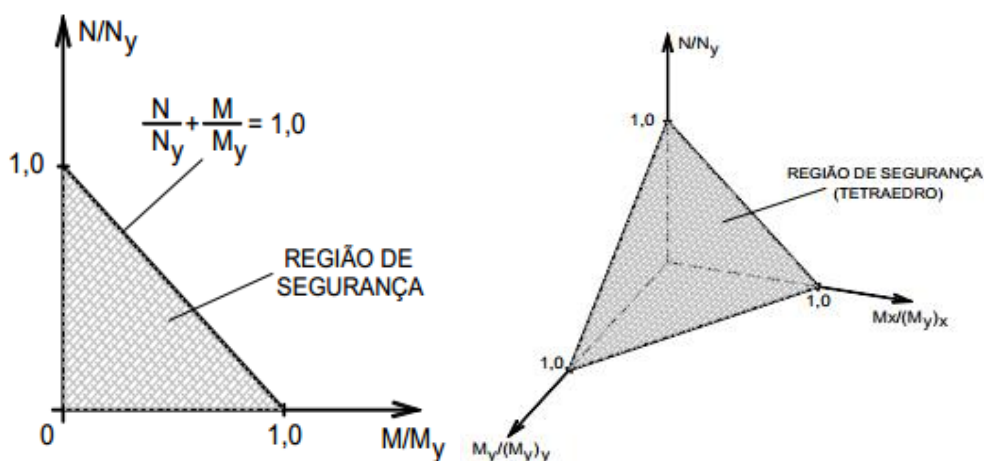


Figura 2. Superfície de ruptura limitada a um tetraedro a favor da segurança: aeasc (2008)

No caso de seções retangulares, pode-se adotar $\alpha = 1,2$. Cálculos efetuados por Bresler (1960), indicam que os valores de α variam entre 1,15 e 1,55 para seções retangulares como mostrado na Figura 3.

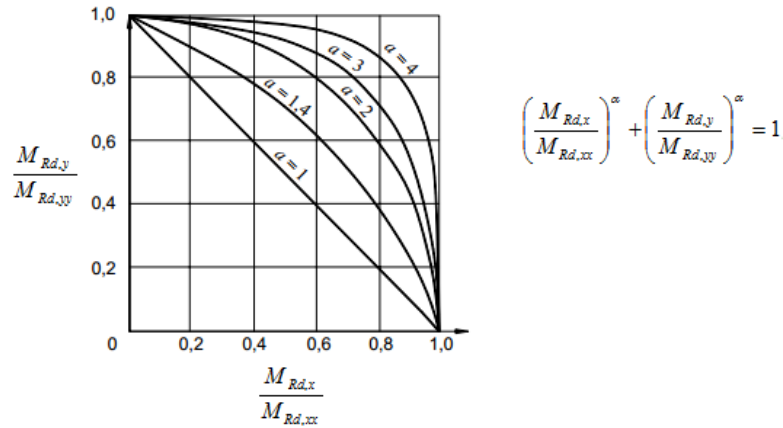


Figura 3. Contornos de interação para diferentes valores de α : Inti (CIRSOC, 2007)

3 UM NOVO CRITÉRIO DE RUÍNA E UM PROCEDIMENTO VIÁVEL PARA A SUA IMPLEMENTAÇÃO

3.1 A nova superfície de ruína

O novo critério de ruína para vigas e colunas sujeitas a flexão oblíqua composta, baseia-se em uma aproximação da superfície de ruptura real por uma superfície empírica, função de oito parâmetros. Quatro são as resistências em alguns pontos específicos na superfície e quatro são coeficientes exponenciais de sua equação. A função objetivo é o erro com que os momentos fletores são aproximados, enquanto que as variáveis de projeto são os coeficientes exponenciais. A meta é determinar os coeficientes de tal forma que o erro global de aproximação seja mínimo, restringindo-se ainda os erros locais. Essa superfície pode ser criada considerando que a aproximação sempre é a favor da segurança. Por outro lado, a aproximação pode ser feita de forma que os erros possam se propagar livremente, sendo conservativa ou não. Este procedimento é uma ampliação do método dos mínimos quadrados, sendo que a diferença é a adoção de um limite para os erros locais. Como se vê, trata-se de um procedimento via técnicas numéricas de otimização para determinação de diagramas ou ábacos de interação [5].

Em geral, a máxima resistência à flexão oblíqua composta de um elemento estrutural resulta de hipóteses nas quais as deformações no aço e/ou no concreto assumem os valores máximos permitidos. A máxima deformação permitida para o aço ε_{smax} e o máximo encurtamento permitido para o concreto é ε_{cmax} . É válido ressaltar que as combinações possíveis dos valores máximos assumidos por ε_s e ε_c dependem do domínio no qual a seção está sendo dimensionada (SUSSEKIND, 1979).

As restrições dinâmicas, baseadas no método dos estados limites, relacionadas com a verificação da resistência à flexão oblíqua composta de elementos lineares num problema de dinâmica estrutural podem ser expressas por:

$$M_d(\mathbf{b}, t) - M_u(\mathbf{b}, \xi, N(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (4a)$$

$$N_{uc} \leq N_d(\mathbf{b}, t) \leq N_{ut} \quad \forall t \in [0, T] \quad (4b)$$

onde $M_d = \gamma_f M_r$ e $N_d = \gamma_f N$ são, respectivamente, o momento de flexão resultante de projeto e a força axial de projeto, fornecidos pela análise estrutural. Estes esforços são funções da geometria da estrutura, das propriedades dos materiais que compõem a estrutura, do carregamento externo e do tempo. O fator $\gamma_f (\geq 1)$ é o coeficiente de majoração dos esforços característicos. O momento M_u é o máximo momento resistido pela seção transversal em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade da seção e faz um ângulo ξ com a direção de M_d . Aquele momento (M_u) depende das variáveis de projeto b , da força axial N e dos ângulos ξ e ϕ , como mostra a Figura 4 [5].

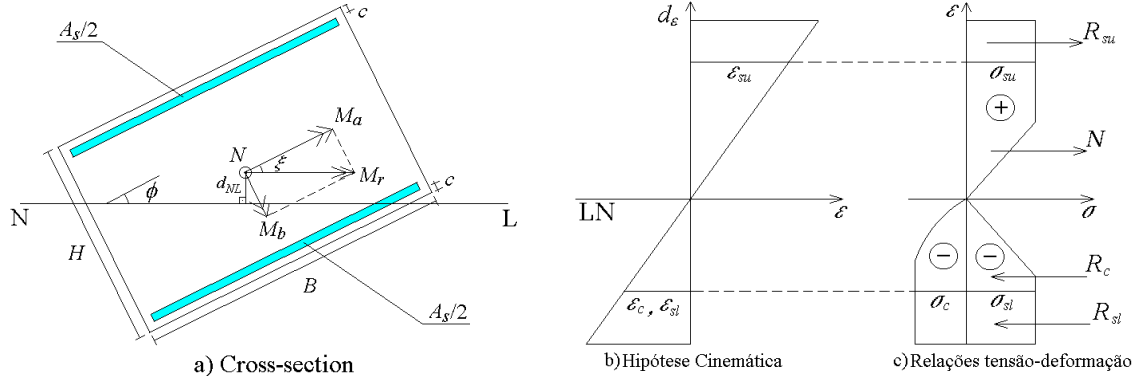


Figura 4. Típica seção transversal de um elemento linear em concreto armado submetido à flexão oblíqua composta: Marcelo A. Silva, Reyolando M.L.R.F. Brasil, Jasbir S. Arora e Colbi C. (2000).

Uma aproximação da superfície de ruptura relacionada com a Equação (4a) pode ser obtida refinando a Equação (1) como:

$$G(N, M_a, M_b, \alpha) - 1 = 0, \quad (5a)$$

onde

$$G = \left(\frac{M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{N - N_c}{N_r} \right)^{\alpha_3} \text{ se } N > N_c; \quad (5b)$$

$$G = \left(\frac{M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{|N - N_c|}{N_r} \right)^{\alpha_4} \text{ se } N \leq N_c; \quad (5c)$$

Considere para condição de equilíbrio entre a ação externa e a força resistente em uma peça de concreto armado submetida à flexão composta oblíqua, as seguintes equações:

$$N_{ut} = A_s \cdot f_{sd} \quad (6a)$$

$$N_{uc} = N_{ut} + A_c \cdot 0,85 f_{cd} \quad (6b)$$

Considere também:

$$N_c = \frac{N_{ut} + N_{uc}}{2} \quad (7a)$$

$$N_r = \frac{N_{ut} - N_{uc}}{2} \quad (7b)$$

onde M_{ua} é o valor máximo que pode ser assumido por M_a quando $M_b = 0$ e $N = N_c$; e M_{ub} o valor máximo que pode ser assumido por M_b quando $M_a = 0$ e $N = N_c$; f_{cd} a resistência de cálculo do concreto; A_c a área de concreto comprimido; f_{sd} a resistência de cálculo do aço relativa a deformação de 0,2%; A_s a área da seção transversal da armadura longitudinal.

Considere que N_{ut} e N_{uc} denotam, respectivamente, o máximo valor de forças de tração e compressão que são resistidas pela seção transversal da Figura (5a) quando $M_a = M_b = 0$, com $N > 0$ para tração e $N < 0$ para compressão. Enquanto que o cálculo de N_{ut} e N_{uc} é trivial, o mesmo geralmente não é verdade para $M_u(b, \phi, \xi, N)$. Veja um esquema representativo na Figura 5.

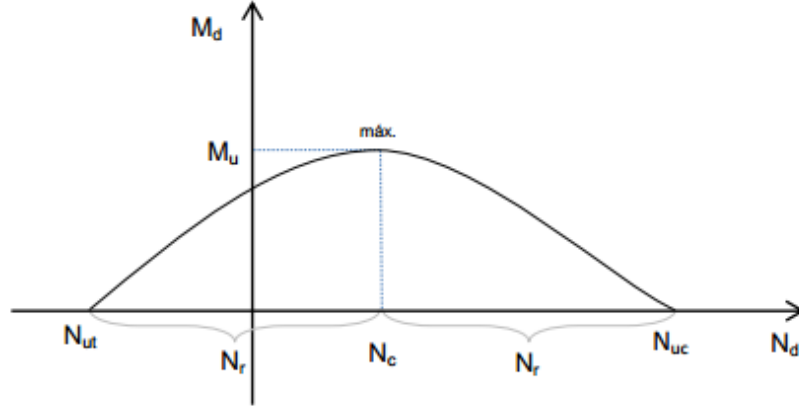


Figura 5. Superfície de ruptura e máximo valor de forças resistidas pela seção: Lemuel Domenicali (2016)

A adoção de duas equações diferentes (5b) e (5c) deve-se à observação em diversos exemplos que geralmente $\alpha_3 \neq \alpha_4$. Esta equação contempla qualquer ponto (N, M_a, M_b) da superfície de ruptura e uma vez que os parâmetros M_{ua} , M_{ub} , N_c , N_r , α_1 , α_2 , α_3 e α_4 são determinados, (5) pode ser facilmente computada. Os parâmetros M_{ua} , M_{ub} , N_c e N_r podem ser calculados diretamente, e o problema restante é então definir um procedimento para a determinação α_1 , α_2 , α_3 e α_4 .

Agora, supõe-se que o espaço viável de M_d na Equação (4a) pode ser aproximado como:

$$\left(\frac{\gamma_f M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{\gamma_f M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{N - N_c}{N_r} \right)^{\alpha_3} - 1 \leq 0, \quad (8)$$

onde α_1 , α_2 e α_3 são os coeficientes exponenciais, os quais dependem das dimensões da seção transversal, da quantidade e distribuição da armadura longitudinal, das relações tensão-deformação tanto do concreto quanto do aço, do cobrimento da armadura e o diâmetro dos estribos. Quando uma combinação de (N, M_a, M_b) satisfaz o critério regido pelas Equações (8) e (4b), a resistência do elemento estrutural não é excedida. Reciprocamente, se as Equações (8) e (4b) não são satisfeitas, o ponto (N, M_a, M_b) excede a capacidade de trabalho do elemento. Desde que os valores de N , M_a e M_b são fornecidos pela análise estrutural e uma vez que os valores de M_{ua} , M_{ub} , N_{ut} e N_{uc} são facilmente calculados, então as incógnitas do problema são os valores dos coeficientes exponenciais α_1 , α_2 e α_3 .

3.2 Determinação dos coeficientes exponenciais

Se os valores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ são assumidos, o critério de ruptura das Equações (5) é conservativo, como mostra a Figura 3, o que não é interessante em um problema onde o objetivo é minimizar o custo da estrutura [5].

Ao invés de selecionar valores arbitrários para os coeficientes exponenciais, problemas de otimização com ou sem restrições são formulados para determina-los. Na formulação destes problemas várias funções objetivo e restrições podem ser utilizadas para forçar que a superfície definida pelas Equações (5) seja a melhor aproximação possível da restrição definida em (4a) [5].

Se estes valores podem ser obtidos com uma certa facilidade, então a verificação da resistência à flexão oblíqua composta de elementos lineares em concreto armado torna-se consideravelmente simples. Métodos de otimização são adotados para estimar os coeficientes exponenciais. Duas formulações são apresentadas: uma baseada em processos de otimização sem restrições, onde os erros de aproximação são minimizados, podendo se espalhar livremente e assumir quaisquer valores; outra formulação baseada em otimização com restrições, onde os erros de aproximação são restringidos o que permitir definir com qual erro máximo contra a segurança se quer trabalhar [5].

Existem diversos métodos de otimização para problemas com restrições, tais como o método da programação seqüencial linear, o método da programação seqüencial quadrática e o método dos multiplicadores. No exemplo analisado deste artigo foi adotado inicialmente, permitido pela NBR 6118 (2014, item 17.2.5) para seções retangulares, $\alpha = 1,2$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1,5$ baseado em otimização com restrições a fim de verificar o quanto é possível delimitar o controle sobre o erro máximo pretendido.

4 VANTAGEM E DESVANTAGENS DOS MÉTODOS PARA A APROXIMAÇÃO DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA

As desvantagens do método apresentado com base na Equação (3) são: a) não se tem controle sobre os erros, podendo estes serem extremamente conservativos ou contra a segurança; b) para efeitos práticos eles recaem no problema de tempo computacional da Equação (4a), visto que para o cálculo de N_{ua} e N_{ub} ou $M_{ua}N$ e $M_{ub}N$ são necessários os processos de discretização da seção, integração de tensões, fazer o equilíbrio de forças normais, calcular o momento resultante, etc. para todos os valores de N (i.e. para todo elemento e para todo instante de tempo) [5].

A grande vantagem do método proposto pelo novo método de ruína, equação (8), é que uma vez determinados os quatro parâmetros do método M_{ua} , M_{ub} , N_c e N_r , e os coeficientes exponenciais, a verificação das restrições relacionadas com o momento de flexão oblíqua pode ser facilmente computada e com um baixo custo computacional [5].

5 OTIMIZAÇÃO DA VERIFICAÇÃO À FLEXÃO OBLÍQUA PELO P-CALC

O P-Calc é um Aplicativo para análise de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua. Este aplicativo se trata de uma versão educacional e está disponibilizado na página da internet < www.pcalc.com.br >. Suas principais características são: a) Verificação de pilares submetidos a flexão composta, normal ou oblíqua, quanto ao estado limite último de ruptura e instabilidade; b) Análise de pilares com concretos de alta resistência ($f_{ck} > 50$ MPa); c) Diagrama de interação Esforço normal em razão do Momento fletor (FCO e FCN);

d) Resultados gráficos para deformações e tensões na seção; e) Avaliação dos efeitos locais de 2ª ordem considerando a não linearidade física e geométrica, de acordo com todos os métodos presentes na norma ABNT NBR 6118; f) Envoltória de momentos mínimos; g) Memória de cálculo em formato PDF;

6 EXEMPLO ANALISADO

6.1 Dados numéricos

O exemplo numérico a seguir é de um pilar de canto, sem forças transversais atuantes. Este exemplo é semelhante aquele encontrado em Bastos (2005, p. 51), com a diferença de que será analisado apenas a seção do pilar. As seguintes informações são conhecidas: $N_d = 308 \text{ kN} = 30,8 \text{ tf}$; $M_{xd} = 2.695 \text{ kN.cm} = 2,70 \text{ tf.m}$; $M_{yd} = 1.183 \text{ kN.cm} = 1,18 \text{ tf.m}$; $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$; $\gamma_c = 1,4$; $\varepsilon_{smax} = 1\%$; $\varepsilon_{cmax} = 0,35\%$; $f_y = 500 \text{ MPa}$; $\gamma_s = 1,15$; o módulo de elasticidade longitudinal do concreto $E_c = 21,55 \text{ GPa}$; o módulo de elasticidade longitudinal do aço $E_s = 210 \text{ GPa}$; $C_{nom} = 2,0 \text{ cm}$; concreto com brita 1, sem brita 2. Para este exemplo não são considerados os efeitos de 2ª ordem nas direções x e y .

Foram computados $i = 46$ pontos $P_i \equiv (N_d, M_{xu}, M_{yu})$ em um quadrante da superfície de ruptura onde M_{xd} e M_{yd} são positivos. A distribuição de tensões no concreto é do tipo parábola retângulo (SUSSEKIND, 1979). Os valores para largura, altura, cobrimento nominal e área de aço adotada são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Seção transversal analisada

Projeto	$B \text{ (cm)}$	$H \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$d' \text{ (cm)}$
Pilar de Canto	20	30	3,2	2

6.2 Resultados para a otimização pelo método simplificado

Durante o processo de otimização foi adotado os seguintes valores iniciais para as variáveis exponenciais $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,2$. Os exemplos foram resolvidos considerando ambas as Equações (3) e (8) como função objetivo (delimitar os momentos resistentes e os erros local e global de aproximação). Apesar de os erros globais estarem dentro do limite permitido (≤ 1), favoráveis a segurança, os resultados obtidos com a Equação (8) não foram satisfatórios. Por exemplo, apenas para $i=25$ os momentos resistentes são maiores. Utilizando a Equação (3) como função objetivo, os resultados foram melhores. Os resultados obtidos, considerando então estas equações, são mostrados nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2. Resultados obtidos utilizando o método de Bresler (P-Calc)

i	$N_d \text{ (tf)}$	$M_{xu} \text{ (tf.m)}$	$M_{yu} \text{ (tf.m)}$	$M_{xd} \text{ (tf.m)}$	$M_{yd} \text{ (tf.m)}$	Observações
1	13,91	0,00	0,00	0,00	0,00	N_{ut}
7	0,00	1,09	1,73	0,00	0,00	$N_d \leq 0$
20	-30,80	2,67	4,23	1,18	2,70	Exemplo analisado
22	-32,03	2,68	4,25	1,41	2,53	Máximo M_{xu} e M_{yu}
25	-36,43	2,59	4,14	1,50	2,25	N_c
46	-85,67	0,00	0,00	0,00	0,00	N_{uc}

Tabela 3. Resultados obtidos utilizando o Novo Método de Ruína

i	N_d (tf)	M_{xu} (tf.m)	M_{yu} (tf.m)	R	R^2	M_{xd} (tf.m)	M_{yd} (tf.m)	Observações
1	13,91	0,00	0,00	0,000	0,0000	0,00	0,00	N_{ut}
7	0,00	1,04	1,65	0,322	0,1035	0,00	0,00	$N_d \leq 0$
20	-30,80	2,51	3,99	0,928	0,8609	1,18	2,70	<i>Exemplo analisado</i>
22	-32,03	2,56	4,06	0,946	0,8956	1,48	2,21	Máximo M_{xu} e M_{yu}
25	-36,43	2,68	4,25	1,000	1,0000	1,41	2,53	N_c
46	-86,77	0,00	0,00	0,000	0,0000	0,00	0,00	N_{uc}

As Figuras 6 e 7 mostram um esquema de comparação das superfícies de interação do métodos analisados.

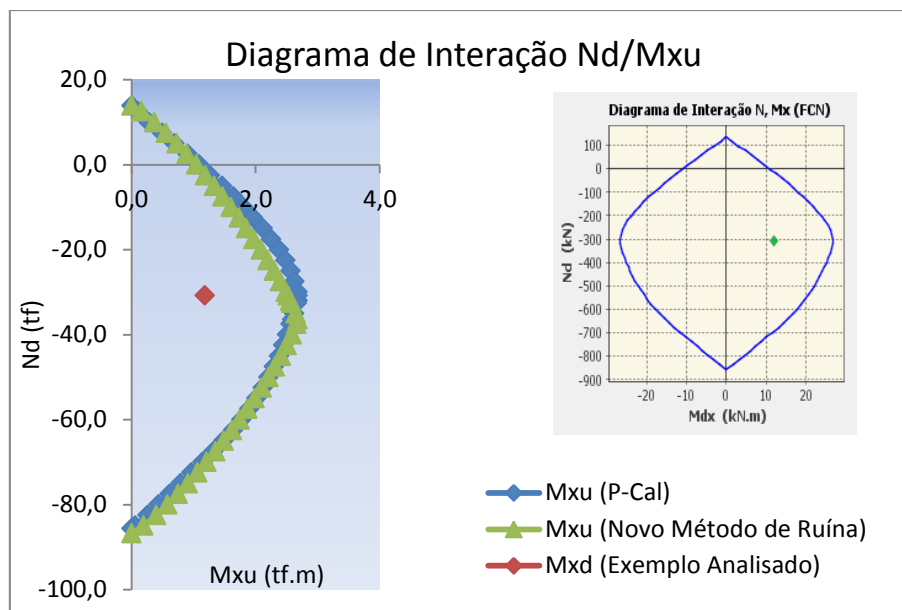


Figura 6. Esquema de verificação do ELU dos métodos analisados em Mxu

Basicamente, os resultados e verificações quanto ao estado limite último (ELU) se faz por meio do diagrama de interação, que são curvas envoltórias resistentes. Se um ponto, representado pelos pares de momentos solicitantes de cálculo, cair dentro do diagrama, a segurança estará garantida, pois os esforços solicitantes são inferiores aos esforços resistentes. Analogamente, se o ponto cair fora do diagrama, a segurança não estará garantida [10].

Para os valores variáveis exponenciais iniciais ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,2$), a parábola dos esforços resistentes do Novo Método de Ruína foi ajustada deslocando o seu momento máximo resistente ($N_c = 36,43$ tf; $M_{xu} = 2,68$ tf.m; $M_{yu} = 4,25$ tf.m) mais ao centro do eixo de solicitações de forças normais axiais (N_d) e manteve, praticamente, o mesmo estado limite último (ELU) do Método Simplificado utilizado pelo P-Calc.

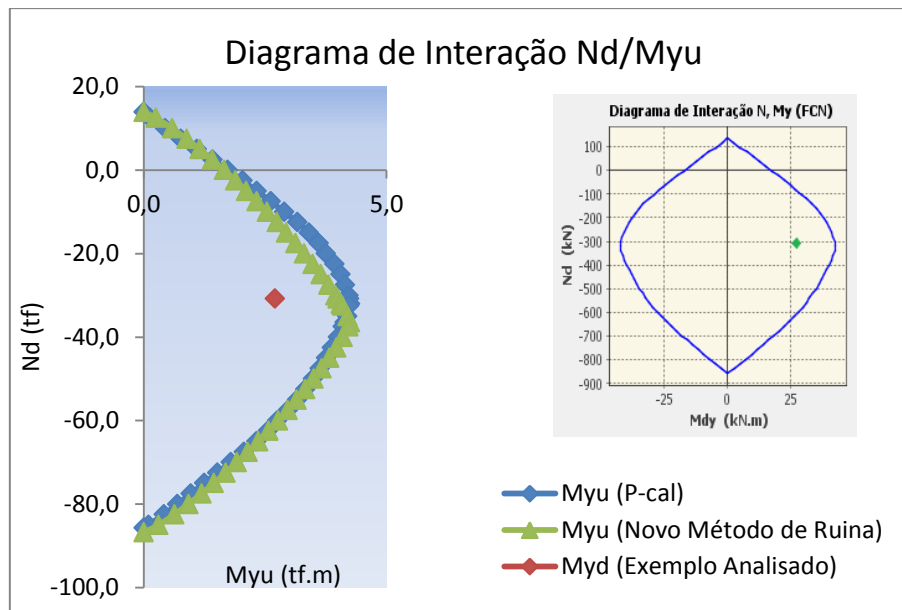


Figura 7. Esquema de verificação do ELU dos métodos analisados em Myu

Para a verificação da capacidade resistente da seção, considerando um valor fixo de esforço normal (N_d), os esforços solicitantes deverão ser iguais ou inferiores aos esforços resistentes. Observe que, para que a segurança esteja garantida, esta verificação deve ser feita considerando os esforços solicitantes de cálculo (N_d , M_{xd} e M_{yd}), assim como os esforços resistentes (N_u , M_{xu} e M_{yu}) para satisfazer as equações de equilíbrio (3) e (8). Uma vez obtido o diagrama de interação, a verificação quanto à segurança é imediata através dos pontos representados pelos pares de momentos solicitantes. Para a elaboração do estado limite último (ELU) foram utilizadas as Equações (3) e (8). Para cada análise foi determinado um total de $i = 20$ pontos onde a seção transversal da superfície está sujeita a uma força normal axial (N_d) fixa. Valores iniciais para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,2$. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4 à 6.

Tabela 4. Esforços resistentes gerados pelo P-Cal e pelo Novo Método de Ruína

i	$N_d (tf)$	Método Simplificado (P-Cal)				Novo Método de Ruína			
		$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2	$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2
1	-30,80	2,67	0,00	1,000	1,000	2,51	0,00	0,000	0,000
3	-30,80	2,39	0,75	1,000	1,000	2,25	0,71	0,000	0,000
5	-30,80	2,11	1,32	1,000	1,000	1,99	1,25	0,000	0,000
7	-30,80	1,83	1,83	1,000	1,000	1,72	1,73	0,000	0,000
8	-30,80	1,69	2,07	1,000	1,000	1,59	1,95	0,000	0,000
9	-30,80	1,55	2,30	1,000	1,000	1,46	2,17	0,000	0,000
10	-30,80	1,41	2,52	1,000	1,000	1,32	2,38	0,000	0,000
11	-30,80	1,27	2,73	1,000	1,000	1,19	2,58	0,000	0,000
12	-30,80	1,13	2,94	1,000	1,000	1,06	2,77	0,000	0,000
13	-30,80	0,99	3,14	1,000	1,000	0,93	2,96	0,000	0,000
14	-30,80	0,84	3,32	1,000	1,000	0,79	3,14	0,000	0,000
16	-30,80	0,56	3,68	1,000	1,000	0,53	3,47	0,000	0,000
18	-30,80	0,28	3,99	1,000	1,000	0,26	3,77	0,000	0,000
20	-30,80	0,00	4,23	1,000	1,000	0,00	3,99	0,000	0,000

Comparando os valores da Tabela 4, pode-se notar que, quando os coeficientes exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$) são restringidos a 1,2, para a Equação (3) os valores dos esforços resistentes são maiores, o que torna a seção muito conservativa.

Para a Tabela 4, o diagrama de interação dos esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) correspondentes ao esforço solicitante axial fixo ($N_d = 30,80 \text{ tf}$) submetido à seção da superfície, é apresentado na Figura 8.

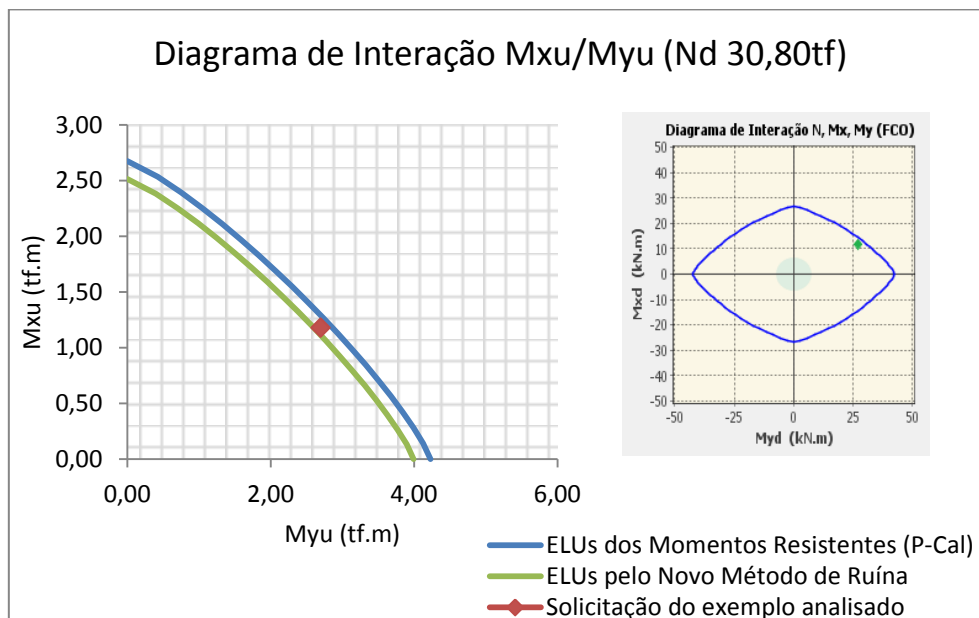


Figura 8. Diagrama dos esforços resistentes obtidos pelos métodos analisados

Para a seção transversal da superfície sujeita a uma força normal axial fixa $N_d = 32,03 \text{ tf}$ e para $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1,2$, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5. Esforços resistentes gerados pelo P-Calc e pelo Novo Método de Ruína

i	$N_d (tf)$	Método Simplificado (P-Cal)				Novo Método de Ruína			
		$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2	$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2
1	-32,03	2,68	0,00	1,000	1,000	2,56	0,00	0,000	0,000
3	-32,03	2,39	0,75	1,000	1,000	2,29	0,72	0,000	0,000
5	-32,03	2,11	1,33	1,000	1,000	2,02	1,27	0,000	0,000
7	-32,03	1,83	1,84	1,000	1,000	1,75	1,76	0,000	0,000
8	-32,03	1,69	2,08	1,000	1,000	1,61	1,99	0,000	0,000
9	-32,03	1,55	2,31	1,000	1,000	1,48	2,21	0,000	0,000
10	-32,03	1,41	2,53	1,000	1,000	1,35	2,42	0,000	0,000
11	-32,03	1,27	2,75	1,000	1,000	1,21	2,62	0,000	0,000
12	-32,03	1,13	2,95	1,000	1,000	1,08	2,82	0,000	0,000
13	-32,03	0,99	3,15	1,000	1,000	0,94	3,01	0,000	0,000
14	-32,03	0,85	3,34	1,000	1,000	0,81	3,19	0,000	0,000
16	-32,03	0,56	3,70	1,000	1,000	0,54	3,53	0,000	0,000
18	-32,03	0,28	4,01	1,000	1,000	0,27	3,83	0,000	0,000
20	-32,03	0,00	4,25	1,000	1,000	0,00	4,06	0,000	0,000

Comparando os valores da Tabela 5, pode-se notar que, quando os coeficientes exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$) são restringidos a 1,2, para a Equação (3) os valores dos esforços resistentes são maiores, o que mantém a seção ainda conservativa.

Para a Tabela 5, o diagrama de interação dos esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) correspondentes ao esforço solicitante axial fixo ($N_d = 32,03 \text{ tf}$) submetido à seção da superfície, é apresentado na Figura 9.

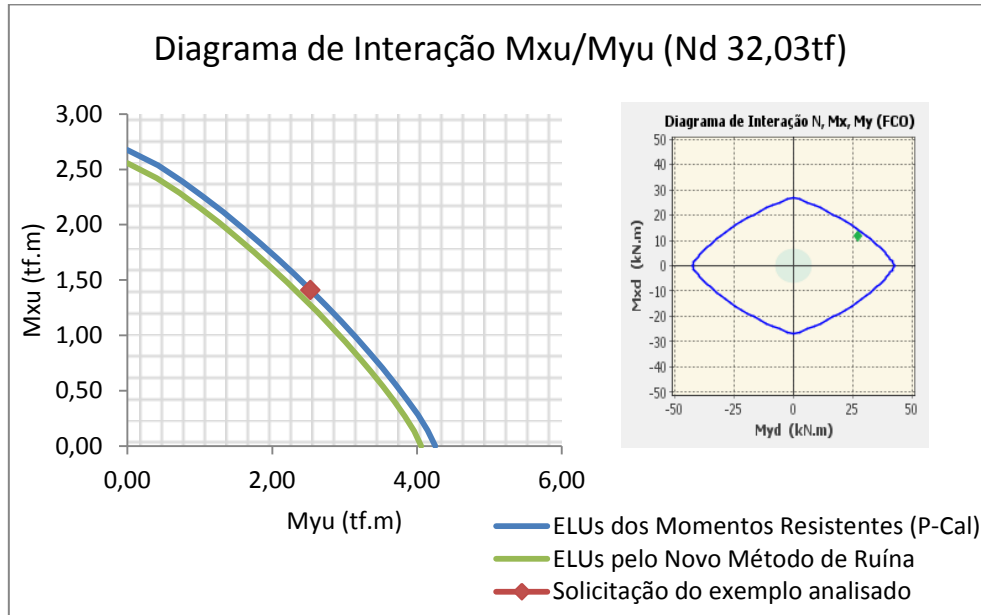


Figura 9. Diagrama dos esforços resistentes obtidos pelos métodos analisados

Para a seção transversal da superfície sujeita a uma força normal axial fixa $N_d = 36,43 \text{ tf}$ e para $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3= 1,2$, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6. Esforços resistentes gerados pelo P-Calc e pelo Novo Método de Ruína

i	$N_d (tf)$	Método Simplificado (P-Cal)				Novo Método de Ruína			
		$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2	$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2
1	-36,43	2,59	0,00	1,000	1,000	2,68	0,00	0,000	0,000
3	-36,43	2,32	0,73	1,000	1,000	2,39	0,75	0,000	0,000
5	-36,43	2,04	1,29	1,000	1,000	2,11	1,33	0,000	0,000
7	-36,43	1,77	1,79	1,000	1,000	1,83	1,84	0,000	0,000
8	-36,43	1,64	2,02	1,000	1,000	1,69	2,08	0,000	0,000
9	-36,43	1,50	2,25	1,000	1,000	1,55	2,31	0,000	0,000
10	-36,43	1,36	2,47	1,000	1,000	1,41	2,53	0,000	0,000
11	-36,43	1,23	2,67	1,000	1,000	1,27	2,75	0,000	0,000
12	-36,43	1,13	2,82	1,000	1,000	1,13	2,95	0,000	0,000
13	-36,43	0,95	3,07	1,000	1,000	0,99	3,15	0,000	0,000
14	-36,43	0,82	3,25	1,000	1,000	0,85	3,34	0,000	0,000
16	-36,43	0,55	3,60	1,000	1,000	0,56	3,70	0,000	0,000
18	-36,43	0,27	3,91	1,000	1,000	0,28	4,01	0,000	0,000
20	-36,43	0,00	4,14	1,000	1,000	0,00	4,25	0,000	0,000

Comparando os valores da Tabela 6, percebe-se que, para esta seção da superfície, quando os coeficientes exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$) são restringidos a 1,2, se obtém melhores resultados com a Equação (8). Note que os valores para os esforços resistentes são maiores o que torna a seção menos conservativa.

Para a Tabela 6, o diagrama de interação dos esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) correspondentes ao esforço solicitante axial fixo ($N_d = 36,43 \text{ tf}$) submetido à seção da superfície, é apresentado na Figura 10.

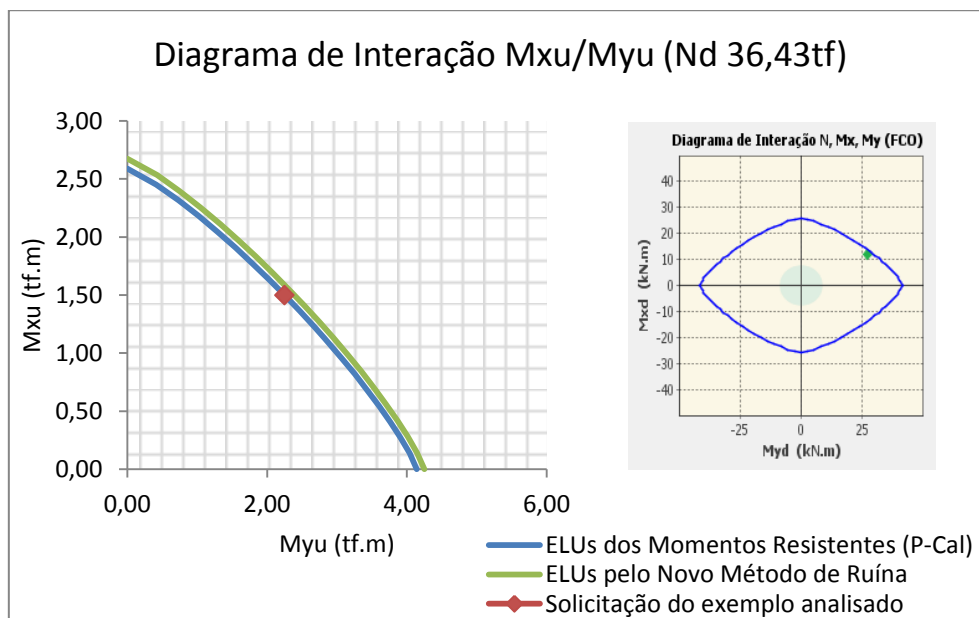


Figura 10. Diagrama dos esforços resistentes obtidos pelos métodos analisados

6.3 Resultados para a otimização proposta pelo novo método de ruína

Considerando os resultados obtidos pelas Equações (3) e (8) utilizando os seguintes valores iniciais para as variáveis exponenciais $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3= 1,2$, ambos os métodos adotados são extremamente parecidos, pode-se notar, analisando estes gráficos e tabelas, que a superfície de aproximação obtida é sempre a favor da segurança e muito conservativa, isso impõe maiores restrições aos esforços solicitantes.

Os resultados previamente obtidos no exemplo analisado, motivou a adoção do novo método de ruína para demonstrar que, com a otimização apenas das variáveis exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$), é o suficiente para substituir a superfície “real” por uma superfície empírica, delimitar os momentos resistentes e definir limites para os erros local e global de aproximação. A superfície empírica obtida nunca está contra a segurança, desde que, sejam adotados métodos de otimização com restrições, onde seriam impostos limites para os valores assumidos pelas variáveis exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$).

Neste caso, a adoção de métodos de otimização seria suficiente para a determinação dos coeficientes exponenciais. Para este processo de otimização foi adotado os seguintes valores exponenciais $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1,5$. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 7.

Tabela 7. Resultados obtidos utilizando o Novo Método de Ruína

i	N_d (tf)	M_{xu} (tf.m)	M_{yu} (tf.m)	R	R^2	M_{xd} (tf.m)	M_{yd} (tf.m)	Observações
1	13,91	0,00	0,00	0,000	0,0000	0,00	0,00	N_{ut}
7	0,00	1,41	2,25	0,384	0,1477	0,00	0,00	$N_d \leq 0$
20	-30,80	2,61	4,14	0,963	0,9266	1,65	2,60	<i>Exemplo analisado</i>
22	-32,03	2,63	4,18	0,974	0,9490	1,66	2,62	<i>Máximo M_{ux} e M_{yu}</i>
25	-36,43	2,68	4,25	1,000	1,0000	1,69	2,67	N_c
46	-86,77	0,00	0,00	0,000	0,0000	0,00	0,00	N_{uc}

Para os valores variáveis exponenciais $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1,5$, houve um aumento considerável dos esforços resistentes, o que permite um maior aproveitamento da seção do pilar. As Figuras 11 e 12 mostram um esquema de comparação entre os valores adotados para as variáveis exponenciais $\alpha=1,2$ e $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1,5$ utilizados nas Equações (3) e (8) dos métodos analisados.

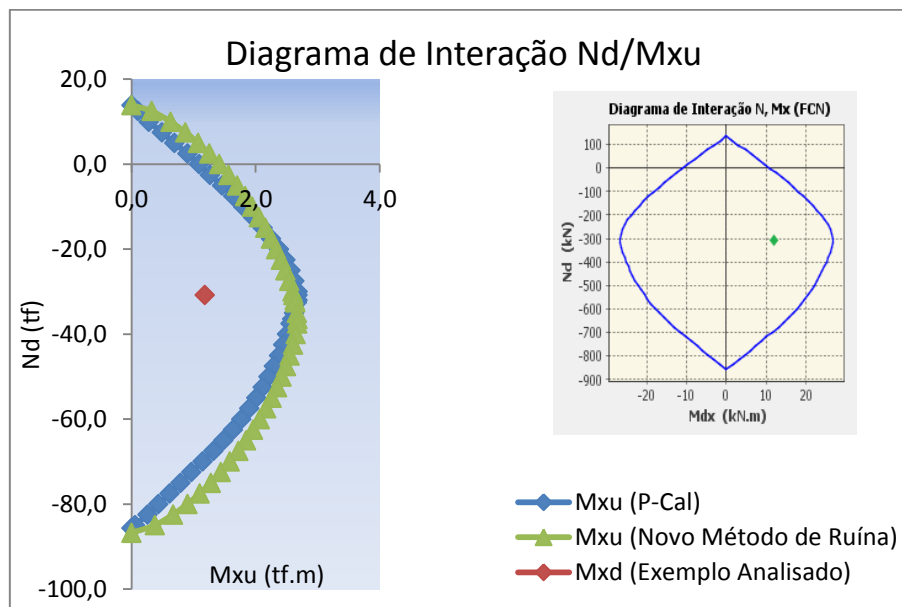


Figura 11. Esquema de verificação do ELU dos métodos analisados em Mxu

Para os valores variáveis exponenciais $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3= 1,5$, observe que, a superfície empírica obtida está a favor da segurança, ampliando os limites no seu contorno para os esforços resistentes.

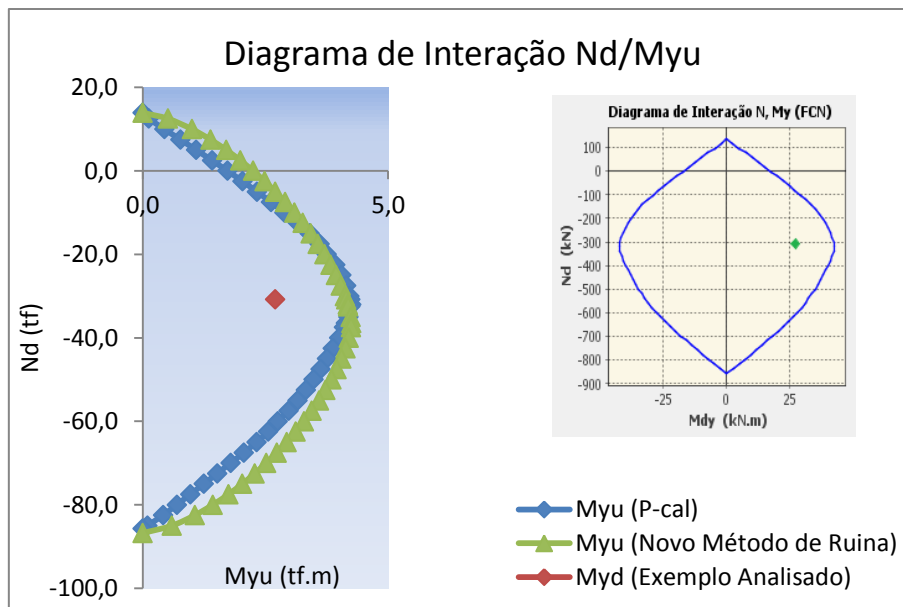


Figura 12. Esquema de verificação do ELU dos métodos analisados em Myu

Para a seção transversal da superfície sujeita á uma força normal axial fixa $N_d = 30,80 \text{ tf}$ e para $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3= 1,5$, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 8.

Tabela 8. Esforços resistentes gerados pelo P-Cal e pelo Novo Método de Ruína

i	$N_d (tf)$	Método Simplificado (P-Cal $\alpha=1,2$)				Novo Método de Ruína			
		$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2	$M_{xu} (tf.m)$	$M_{yu} (tf.m)$	R	R^2
1	-30,80	2,67	0,00	1,000	1,000	2,61	0,00	0,000	0,000
3	-30,80	2,39	0,75	1,000	1,000	2,33	1,19	0,000	0,000
5	-30,80	2,11	1,32	1,000	1,000	2,06	1,85	0,000	0,000
7	-30,80	1,83	1,83	1,000	1,000	1,79	2,38	0,000	0,000
8	-30,80	1,69	2,07	1,000	1,000	1,65	2,60	0,000	0,000
9	-30,80	1,55	2,30	1,000	1,000	1,51	2,81	0,000	0,000
10	-30,80	1,41	2,52	1,000	1,000	1,37	3,01	0,000	0,000
11	-30,80	1,27	2,73	1,000	1,000	1,24	3,19	0,000	0,000
12	-30,80	1,13	2,94	1,000	1,000	1,10	3,35	0,000	0,000
13	-30,80	0,99	3,14	1,000	1,000	0,96	3,50	0,000	0,000
14	-30,80	0,84	3,32	1,000	1,000	0,82	3,64	0,000	0,000
16	-30,80	0,56	3,68	1,000	1,000	0,55	3,87	0,000	0,000
18	-30,80	0,28	3,99	1,000	1,000	0,27	4,05	0,000	0,000
20	-30,80	0,00	4,23	1,000	1,000	0,00	4,14	0,000	0,000

Para a Tabela 8, o diagrama de interação dos esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) correspondentes ao esforço solicitante axial fixo ($N_d = 30,80 \text{ tf}$) submetido à seção da superfície, é apresentado na Figura 13.

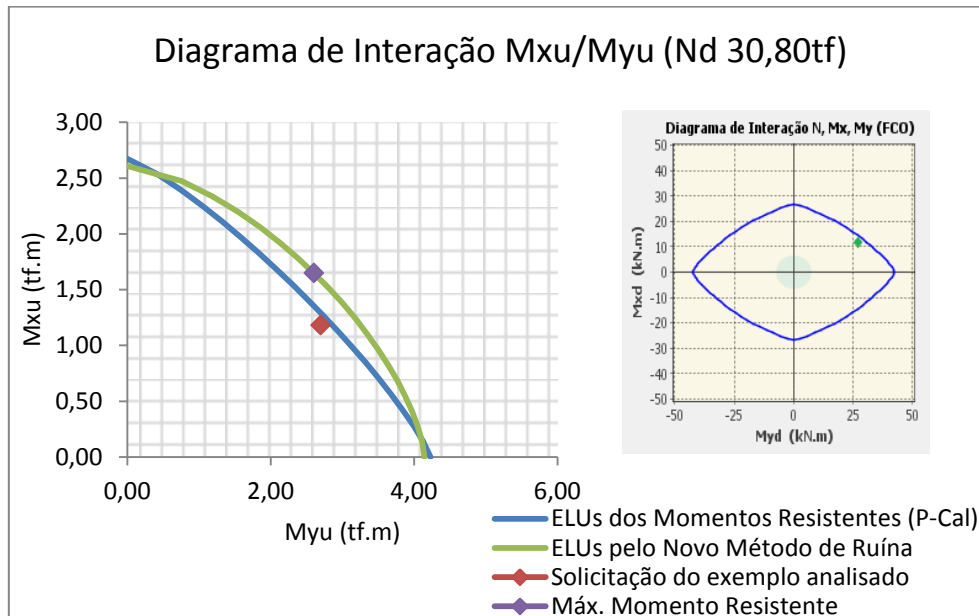


Figura 13. Diagrama dos esforços resistentes obtidos pelos métodos analisados

Para a seção transversal da superfície sujeita a uma força normal axial fixa $N_d = 32,03 \text{ tf}$ e para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,5$, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 9.

Tabela 9. Esforços resistentes gerados pelo P-Calc e pelo Novo Método de Ruína

i	$N_d \text{ (tf)}$	Método Simplificado (P-Cal $\alpha=1,2$)				Novo Método de Ruína			
		$M_{xu} \text{ (tf.m)}$	$M_{yu} \text{ (tf.m)}$	R	R^2	$M_{xu} \text{ (tf.m)}$	$M_{yu} \text{ (tf.m)}$	R	R^2
1	-32,03	2,68	0,00	1,000	1,000	2,63	0,00	0,000	0,000
3	-32,03	2,39	0,75	1,000	1,000	2,35	1,20	0,000	0,000
5	-32,03	2,11	1,33	1,000	1,000	2,08	1,87	0,000	0,000
7	-32,03	1,83	1,84	1,000	1,000	1,80	2,39	0,000	0,000
8	-32,03	1,69	2,08	1,000	1,000	1,66	2,62	0,000	0,000
9	-32,03	1,55	2,31	1,000	1,000	1,52	2,84	0,000	0,000
10	-32,03	1,41	2,53	1,000	1,000	1,38	3,03	0,000	0,000
11	-32,03	1,27	2,75	1,000	1,000	1,25	3,21	0,000	0,000
12	-32,03	1,13	2,95	1,000	1,000	1,11	3,38	0,000	0,000
13	-32,03	0,99	3,15	1,000	1,000	0,97	3,53	0,000	0,000
14	-32,03	0,85	3,34	1,000	1,000	0,83	3,67	0,000	0,000
16	-32,03	0,56	3,70	1,000	1,000	0,55	3,90	0,000	0,000
18	-32,03	0,28	4,01	1,000	1,000	0,28	4,08	0,000	0,000
20	-32,03	0,00	4,25	1,000	1,000	0,00	4,18	0,000	0,000

Para a Tabela 9, o diagrama de interação dos esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) correspondentes ao esforço solicitante axial fixo ($N_d = 32,03 \text{ tf}$) submetido à seção da superfície, é apresentado na Figura 14.

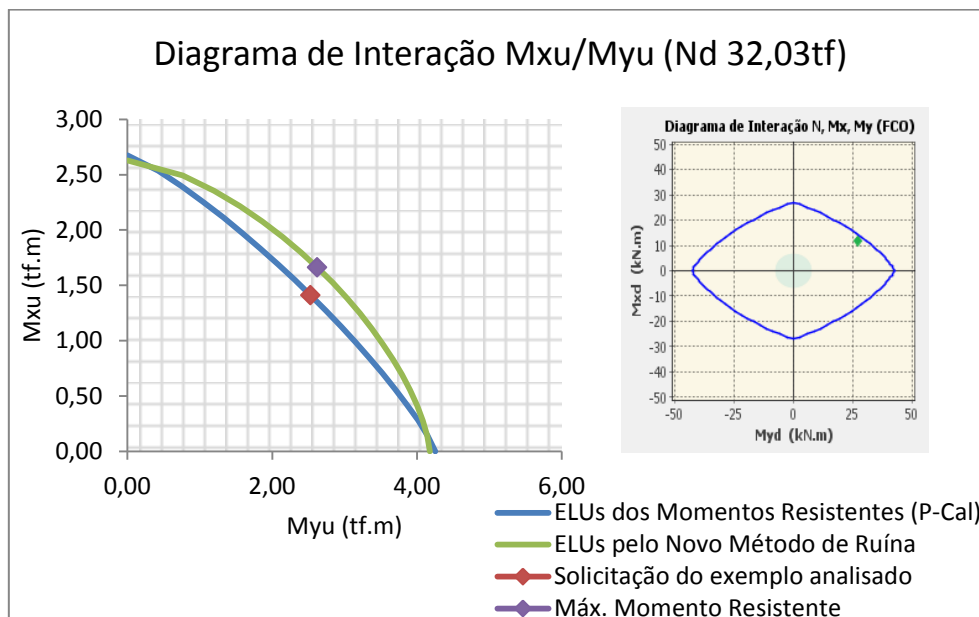


Figura 14. Diagrama dos esforços resistentes obtidos pelos métodos analisados

Para a seção transversal da superfície sujeita a uma força normal axial fixa $N_d = 36,43 \text{ tf}$ e para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,5$, os resultados obtidos são mostrados na Tabela 10.

Tabela 10. Esforços resistentes gerados pelo P-Cal e pelo Novo Método de Ruína

i	$N_d \text{ (tf)}$	Método Simplificado (P-Cal $\alpha=1,2$)				Novo Método de Ruína			
		$M_{xu} \text{ (tf.m)}$	$M_{yu} \text{ (tf.m)}$	R	R^2	$M_{xu} \text{ (tf.m)}$	$M_{yu} \text{ (tf.m)}$	R	R^2
1	-36,43	2,59	0,00	1,000	1,000	2,68	0,00	0,000	0,000
3	-36,43	2,32	0,73	1,000	1,000	2,39	1,22	0,000	0,000
5	-36,43	2,04	1,29	1,000	1,000	2,11	1,90	0,000	0,000
7	-36,43	1,77	1,79	1,000	1,000	1,83	2,44	0,000	0,000
8	-36,43	1,64	2,02	1,000	1,000	1,69	2,67	0,000	0,000
9	-36,43	1,50	2,25	1,000	1,000	1,55	2,89	0,000	0,000
10	-36,43	1,36	2,47	1,000	1,000	1,41	3,08	0,000	0,000
11	-36,43	1,23	2,67	1,000	1,000	1,27	3,27	0,000	0,000
12	-36,43	1,13	2,82	1,000	1,000	1,13	3,44	0,000	0,000
13	-36,43	0,95	3,07	1,000	1,000	0,99	3,59	0,000	0,000
14	-36,43	0,82	3,25	1,000	1,000	0,85	3,73	0,000	0,000
16	-36,43	0,55	3,60	1,000	1,000	0,56	3,97	0,000	0,000
18	-36,43	0,27	3,91	1,000	1,000	0,28	4,15	0,000	0,000
20	-36,43	0,00	4,14	1,000	1,000	0,00	4,25	0,000	0,000

Para a Tabela 10, o diagrama de interação dos esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) correspondentes ao esforço solicitante axial fixo ($N_d = 36,43 \text{ tf}$) submetido à seção da superfície, é apresentado na Figura 15.

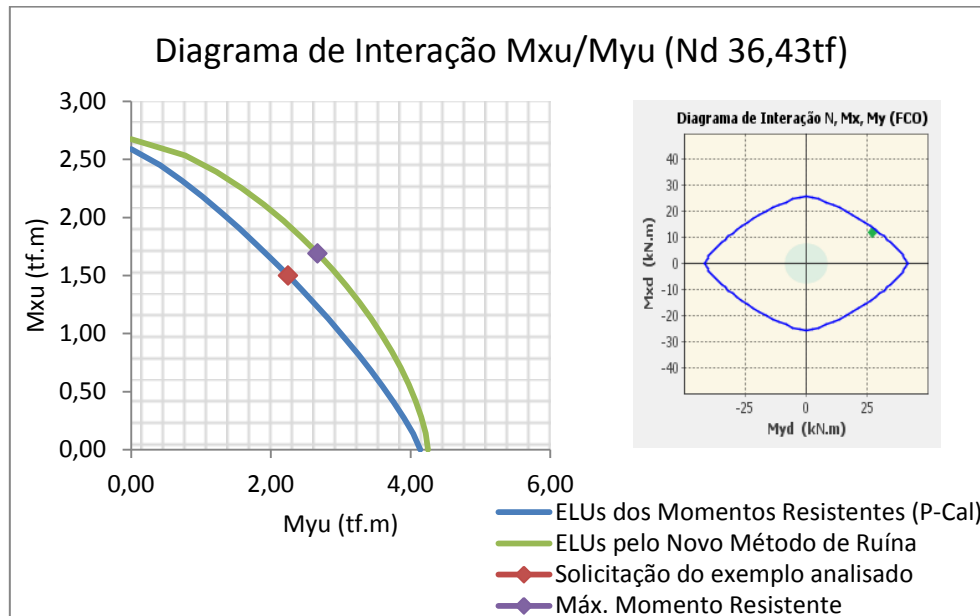


Figura 15. Diagrama dos esforços resistentes obtidos pelos métodos analisados

7 CONCLUSÕES

Apesar das dificuldades para se definir uma nova superfície e um novo critério de ruptura, bem como um procedimento viável para estimar os coeficientes exponenciais de sua equação, os resultados obtidos aqui mostram que este método é viável pelas seguintes razões:

a) Utilizando o Novo Método de Ruína, obteve-se uma superfície empírica onde, através da variação dos coeficientes exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$), foi possível submeter a seção a maiores carregamentos solicitantes (N_d , M_{xd} , M_{yd}) e manter as dimensões da seção do pilar sem a necessidade de aumentar a taxa de aço bem como a resistência do concreto.

b) Com o Novo Método de Ruína o processo torna-se mais simplificado, através das Equação (8), o que é possível discretizar a seção do elemento sujeito a flexão oblíqua respeitando os requisitos mínimos dispostos na NBR-6118 (2014).

c) Através do Novo Método de Ruína os esforços resistentes (M_{xu} e M_{yu}) deixam de ser restritos ao esforço solicitante normal (N_d) dependendo apenas da variação dos coeficientes exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$).

d) Com o auxílio da ferramenta computacional P-Calc, o processo foi simplificado, houve maior agilidade na obtenção dos esforços resistente para a elaboração da superfície “real” e empírica, facilitando a análise dos resultados obtidos na comparação do estado limite último (ELU) para cada método utilizado.

e) Pelo Novo Método de Ruína, a otimização apenas das variáveis exponenciais ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$), é o suficiente para substituir a superfície “real” por uma superfície empírica,

garantir o estado limite ultimo favorável à segurança, delimitar os momentos resistentes e definir o limites para os erros locais e globais de aproximação da superfície.

REFERÊNCIAS

- [1] Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), NBR 6118:2014 - *Projeto de estruturas de concreto* – Procedimento. Rio de Janeiro. 2013.
- [2] Bastos, P.S.S. *Pilares de Concreto Armado*. Disciplina 1309 – Estruturas de Concreto II. Bauru/Sp, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia – Universidade Estadual Paulista – UNESP, mar/2005, 55p. (www.feb.unesp.br/pbastos).
- [3] Campos, N.B.F., *Contribuição ao estudo de pilares em concreto armado com seção qualquer submetidos à flexão composta oblíqua*, São Carlos/SP, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, Dezembro/1994. Disponível em <web.set.eesc.usp.br/.../1994ME_NivaldoBeneditoFerreiraCampos_1.pdf>. Acesso em Maio/2016.
- [4] Júnior, S. D. C., *Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado*, São Paulo/SP, Obtenção do título de especialista em Gestão de Projetos de Sistemas Estruturais - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Disponível em <<http://www.pcalc.com.br/trabalhos-relacionados>>. Acesso em Maio/2016.
- [5] Marcelo A. Silva, Reyolando M.L.R.F. Brasil, Arora J. S. e Swan C. C., (2000d) *Um Novo Critério de Ruína Para Barras de Concreto Armado Sujeitas à Flexão Oblíqua Composta Visando Otimização Computacional*, IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, São Paulo.
- [6] Pinheiro, L. M., Muzardo D. C., Santos S. P., *Apostila Fundamentos do Concreto e Projeto de Edifícios*, São Carlos/SP, Departamento de Engenharia de Estruturas – Universidade de São Paulo, Maio/2007. Disponível em <www.ufsm.br/decc/ECC1006/.../Apost_EESC_USP_Libanio.pdf>. Acesso em Maio/2016.
- [7] Santos, L. M. *Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado*. São Paulo, Editora Thot 1994.
- [8] Smaniotto, A., *Dimensionamento e detalhamento automático de pilares retangulares submetidos à flexão composta oblíqua*, Florianópolis/SC, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGECC - Universidade Federal de Santa Catarina, Junho/2005. Disponível em <<http://www.roteamaengenharia.com.br/programas/downloads/TCC%20%20Alberto%20Smaniotto.pdf>>. Acesso em Maio/2016.
- [9] Sussekund, J.C. *Curso de concreto*. Rio de Janeiro: Globo, 1984. 280p. vol.II.