



ANÁLISE NÃO LINEAR DO PROBLEMA DE ADENSAMENTO UNIDIMENSIONAL A GRANDES DEFORMAÇÕES VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Ronald D. Pereira

Christianne L. Nogueira

rondanper@yahoo.com.br

chris@em.ufop.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral, Universidade Federal de Ouro Preto.

Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Ouro Preto, Minas Gerais, CEP 35400-000, Brasil.

Resumo. *Este artigo apresenta uma formulação através do método das diferenças finitas para análises não lineares geométricas do problema de adensamento unidimensional usando a descrição Lagrangiana do movimento. A não linearidade física do material é levada em consideração pela relação não linear entre o coeficiente de permeabilidade e a tensão efetiva com o índice de vazios, definida como variável primária. O modelo numérico é verificado comparando com os resultados, em termos de variação temporal da distribuição do grau de consolidação ao longo da camada de solo mole, com os resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura específica. É observada boa concordância entre os resultados analíticos e numéricos.*

Palavras-chave: *Análise geométrica não linear, Método das diferenças finitas, Descrição lagrangiana, Não linearidade física, Adensamento devido ao peso-próprio.*

1 INTRODUÇÃO

O fenômeno do adensamento a grandes deformações tem sido estudado por muitos autores (Gibson et al 1967, Gibson et al 1981, Silva e Azevedo 1999; Schiffman 2001; Nogueira 2002; Ferreira e Nogueira 2004; entres outros). Este fenômeno é de grande interesse para a engenharia de minas, pois está relacionado aos processos de transporte e disposição de sedimentos em barragem de rejeitos. Os rejeito, ou lamas, provenientes da planta de beneficiamento são muito moles e devem ser analisados à luz da de uma teoria não-linear física e geométrica tal como a apresentada por Gibson et al. (1967).

Neste trabalho apresenta-se a equação de governo do problema do adensamento não linear levando em conta o peso próprio da camada de solo mole juntamente com a equação matricial na forma discreta que representa este problema com base no método das diferenças finitas. O modelo numérico gerado foi implementado num código escrito em linguagem de programação FORTRAN que foi verificado a partir das soluções analíticas propostas por Gibson et al. (1967) e Xie e Leo (2004).

2 MODELO MATEMÁTICO

A teoria do adensamento unidimensional apresentada por Gibson et al. (1967) admite as seguintes hipóteses: o meio poroso é constituído por partículas sólidas e água incompressíveis; a deformação do esqueleto é devido ao rearranjo das partículas sólidas acompanhadas pelo fluxo da água que preenche os vazios; o volume de sólidos permanece constante durante o processo; não existe restrição à magnitude da deformação do esqueleto; o esqueleto é homogêneo, constituído por apenas um único material; a camada de solo mole, argila, encontra-se inicialmente saturada e normalmente adensada; o fluxo e as deformações são unidimensionais; o adensamento é motivado por forças mecânicas tais como peso próprio e sobrecarga; o carregamento é monotônico, desta forma não existe mudança no sinal da derivada da tensão efetiva com relação ao tempo; o princípio de tensão efetiva de Terzaghi é válido; as deformações independem do tempo (não são levadas em conta as deformações por *creep*); o coeficiente de permeabilidade e o coeficiente de compressibilidade são funções do índice de vazios que variam ao longo do espaço e tempo; a água se comporta como um fluido newtoniano; o fluxo é governado pela lei de Darcy-Gersevanov; as massas do esqueleto sólido e da água são separadamente conservadas, ou seja, não existe transferência de massa entre os componentes do meio poroso; as velocidades reais da água e das partículas sólidas são pequenas.

Assim, considerando as hipóteses acima mencionadas, pode-se obter a seguinte equação diferencial parcial não linear, que representa o balanço e a conservação de massa no meio poroso, tal como apresentado por Gibson et al. (1967):

$$\frac{-d}{de} \left(\frac{k(e)(\gamma_s - \gamma_w)}{\gamma_w(1+e)} \right) \frac{de}{dz} - \frac{d}{dz} \left(\frac{k(e)}{\gamma_w(1+e)} \frac{d\sigma'(e)}{de} \frac{de}{dz} \right) = \frac{de}{dt} \quad (1)$$

em que z

$$z = \int_0^a \frac{1}{1 + e(a, 0)} da = \frac{h}{1 + e_0} \quad (2)$$

é a coordenada reduzida que está relacionada ao sistema de coordenada lagrangiana a em função da distribuição inicial de índice de vazios e que por sua vez é em função do volume de partículas sólidas existentes entre o referencial fixo e o ponto a ser analisado de coordenada lagrangiana a . γ_s é o peso específico das partículas sólidas; γ_w é o peso específico da água; e , $k(e)$ e $\sigma'(e)$ são leis constitutivas de permeabilidade e de tensões efetivas.

As leis constitutivas de permeabilidade e tensão efetiva são definidas a partir da investigação do problema do adensamento em laboratório. Várias leis constitutivas podem ser encontradas na literatura. Schiffman (2001) sugere as seguintes relações:

$$\sigma'(e) = \sigma'_0 \exp\left(\frac{e - e_0}{C_c}\right) \quad (3)$$

$$k(e) = k_0 \exp\left(\frac{e - e_0}{C_k}\right) \quad (4)$$

em que σ'_0 é a tensão efetiva inicial; e_0 é o índice de vazios inicial; k_0 é a permeabilidade inicial; e , C_c e C_k são constantes determinadas experimentalmente. Xie e Leo (2004) propuseram as seguintes relações:

$$\sigma'(e) = q'_0 - \frac{1}{m_v} \ln\left(\frac{(1+e)}{(1+e_{00})}\right) \quad (5)$$

$$k(e) = k_{00} \left(\frac{1+e}{1+e_{00}}\right)^2 \quad (6)$$

em que m_v é o coeficiente de compressibilidade volumétrica; e_{00} é o índice de vazios inicial na superfície (ou topo da camada); q'_0 é a carga efetiva previamente aplicada sobre a superfície da camada e k_{00} é coeficiente de permeabilidade inicial.

Aplicando a regra da cadeia no segundo termo da Eq. (1) e rearranjando-se os termos chega-se a seguinte equação diferencial parcial de segunda ordem:

$$g_3(e) \frac{de}{dz} + g_2(e) \frac{d^2e}{dz^2} = \frac{de}{dt} \quad (7)$$

em que

$$g_1(e) = -\left(\frac{\gamma_s - \gamma_w}{\gamma_w}\right) \frac{d}{de} \left(\frac{k(e)}{(1+e)}\right) \quad (8)$$

$$g_2(e) = -\frac{k(e)}{\gamma_w (1+e)} \frac{d\sigma'(e)}{de} \quad (9)$$

$$g_3(e) = g_1(e) + \frac{dg_2(e)}{dz} \quad (10)$$

Gibson et al. (1981) sugeriram, ainda, a seguinte transformação de variável:

$$Z = \frac{z}{h_r} \quad (11)$$

$$T = g_2(e_{00}) \frac{t}{h_r^2} \quad (12)$$

$$h_r = \frac{h_0}{(1 + e_{00})} \quad (13)$$

em que Z e T são, respectivamente, a altura e tempo normalizados; z é a altura de um ponto qualquer em coordenada reduzida definida de acordo com a Eq. (2); h_r é a espessura inicial da camada em coordenada reduzida; h_0 é a espessura inicial da camada. Usando as definições das Eqs. (11), (12) e (13) obtém-se a seguinte equação diferencial parcial não linear de segunda ordem na forma normalizada:

$$N \frac{de}{dZ} + M \frac{d^2e}{dZ^2} = \frac{de}{dT} \quad (14)$$

em que:

$$N = \frac{g_3(e)}{g_2(e_{00})} h_r \quad (15)$$

$$M = \frac{g_2(e)}{g_2(e_{00})} \quad (16)$$

A Eq. (14) deverá atender as seguintes condições iniciais ($t=0$):

$$\sigma'(Z, 0) = q'_0 + (\gamma_s - \gamma_w) h_r (1 - Z) \quad (17)$$

$$e(Z, 0) = e(\sigma'(Z, 0)) \quad (18)$$

em que o segundo termo do lado direito da Eq. (17) representa a sobrecarga efetiva do peso da argila. Além disso, o problema deve respeitar as seguintes condições de contorno na superfície (ou topo, em que $Z=1$) da camada (considerada como um contorno drenante ao longo do processo):

$$\sigma'(1, T) = q'_0 + \Delta q \quad (19)$$

$$e(1, T) = e(\sigma'(1, T)) \quad (20)$$

em que Δq é o incremento de carga aplicado sobre a superfície da camada no instante inicial ($t=0$) e mantido constante durante o processo. Para a base da camada (em que $Z=0$), a condição de contorno irá depender da condição de drenagem. Desta forma, tem-se para a condição de dupla drenagem:

$$\sigma'(0, T) = q'_0 + \Delta q + (\gamma_s - \gamma_w) h_r \quad (21)$$

$$e(0, T) = e(\sigma'(0, T)) \quad (22)$$

e para a condição de simples drenagem:

$$\frac{de}{dZ}(0, T) = (\gamma_w - \gamma_s) h_r \frac{1}{d\sigma'/de} \quad (23)$$

O índice de vazios indicados nas Eqs. (20) e (22) dependem da lei constitutiva adotada. Uma vez obtida a distribuição de índices de vazios ao longo de uma dada camada é possível obter-se a distribuição de tensão efetiva em qualquer instante de tempo T adotando-se uma equação constitutiva do tipo apresentada na Eq. (3) e (5). Ainda, com a distribuição de índice de vazios ao longo da camada, $e(Z, T)$, é possível obter-se o recalque $S(T)$, fazendo:

$$S(T) = \int_0^1 [e(Z, 0) - e(Z, T)] dZ \quad (24)$$

A distribuição de tensão total, $\sigma(Z, T)$, pode ser obtida, fazendo:

$$\sigma(Z, T) = \gamma_s Z + \gamma_w \left[\int_0^1 e(Z, T) dZ + h_w(T) + S(T) \right] + q'_0 + \Delta q \quad (25)$$

h_w é a altura do nível de água acima da superfície da camada. Conhecendo-se a tensão total, Eq (25), e a tensão efetiva, Eqs. (3) ou (5), determina-se a distribuição de poro pressão (p) aplicando-se o princípio da tensão efetiva, ou seja, fazendo-se:

$$p(Z, T) = \sigma(Z, T) - \sigma'(Z, T) \quad (26)$$

A poro pressão hidrostática (p_{ss}) é determinado por:

$$p_{ss}(Z, T) = \gamma_w \left[Z + \int_0^1 e(Z, T) dZ + S(T) + (h_w(T) - h(T)) \right] \quad (27)$$

Desta forma, obtém-se o excesso de poro pressão (Δp):

$$\Delta p(Z, T) = p(Z, T) - p_{ss}(Z, T) \quad (28)$$

3 MODELO NUMÉRICO

Os problemas físicos contínuos são governados por equações ou sistemas de equações que geralmente são diferenciais e, em muitos casos, de resolução extremamente complexa. A utilização de técnicas de discretização que transformam estas equações contínuas em equações discretas pode ser a saída para obtenção da solução desses problemas. Diferentes métodos numéricos podem ser definidos em função da técnica de discretização adotada.

O método das diferenças finitas (MDF), discretiza o domínio espacial do problema em pontos discretos denominados pontos nodais e o conjunto desses pontos forma uma malha de pontos nodais. Em seguida, as derivadas contínuas das equações de governo do problema físico são aproximadas pela taxa de variação da variável de estado neste ponto nodal.

Problemas transientes devem-se adotar uma discretização temporal em que a variável de tempo é discretizada em intervalos de tempo finitos Δt . A evolução, ou a marcha, no tempo pode ser feita de diferentes formas a depender do instante de tempo adotado para a aproximação temporal. Assim, adotando-se uma variável adimensional θ que localiza a função no intervalo de tempo de t a $t+\Delta t$, pode-se obter os seguintes esquemas de integração no tempo:

- $\theta = 0$: algoritmo explícito – a função é avaliada a partir dos valores da função e suas derivadas no instante t , previamente conhecidas;

- $\theta = 0.5$: algoritmo implícito (Cranck-Nicholson) – a função é avaliada a partir dos valores da função e suas derivadas no instante $0.5(t+\Delta t)$ que, por sua vez, não são conhecidos previamente;

- $\theta = 1$: algoritmo puramente implícito – a função é avaliada a partir dos valores da função e suas derivadas no instante $t+\Delta t$, que, também, não são conhecidos previamente.

Usando diferença central, podem-se obter as seguintes aproximações para as derivadas espacial, de primeira e segunda ordem, e temporal de primeira ordem para o índice de vazios:

$$\left(\frac{de}{dZ}\right)_{Z,T+\Delta T} \cong \theta \left\{ \frac{e_{Z+\Delta Z,T+\Delta T} - e_{Z-\Delta Z,T+\Delta T}}{2\Delta Z} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{e_{Z+\Delta Z,T} - e_{Z-\Delta Z,T}}{2\Delta Z} \right\} \quad (29)$$

$$\left(\frac{d^2e}{dZ^2}\right)_{Z,T+\Delta T} \cong \theta \left\{ \frac{e_{Z-\Delta Z,T+\Delta T} - 2e_{Z,T+\Delta T} + e_{Z+\Delta Z,T+\Delta T}}{\Delta Z^2} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{e_{Z-\Delta Z,T} - 2e_{Z,T} + e_{Z+\Delta Z,T}}{\Delta Z^2} \right\} \quad (30)$$

$$\left(\frac{de}{dT}\right)_{Z,T+\Delta T} \cong \frac{e_{Z,T+\Delta T} - e_{Z,T}}{\Delta T} \quad (31)$$

Aplicando as aproximações indicadas nas Eqs. (29) a (30) na Eq. (14) chega-se ao seguinte sistema de equação algébrica:

$$\mathbf{B}_1 e_{Z+\Delta Z,T+\Delta T} + \mathbf{B}_2 e_{Z,T+\Delta T} + \mathbf{B}_3 e_{Z-\Delta Z,T+\Delta T} = \mathbf{A}_1 e_{Z+\Delta Z,T} + \mathbf{A}_2 e_{Z,T} + \mathbf{A}_3 e_{Z-\Delta Z,T} \quad (32)$$

escrito na forma matricial, já incluindo as equações discretizadas do contorno, tal como:

$$\mathbf{B}\mathbf{E}^1 = \mathbf{A}\mathbf{E}^0 + \mathbf{C} \quad (33)$$

em que:

$$\mathbf{E}^0 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_{npoin-1} \\ e_{npoin} \end{bmatrix}_0 \quad (34)$$

representa o vetor de índice de vazios no instante T no início de um incremento e

$$\mathbf{E}^I = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{\text{npoin}-1} \\ \mathbf{e}_{\text{npoin}} \end{bmatrix}_I \quad (35)$$

representa o vetor de índice de vazios no instante $T+\Delta T$ no final de um incremento; $\mathbf{C}$ é o vetor que contém as condições de contorno; $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes tri-diagonais, onde:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{C}_{\text{base}} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{C}_{\text{topo}} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1\text{base}} & \mathbf{A}_{2\text{base}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_{1\text{topo}} & \mathbf{A}_{2\text{topo}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1\text{base}} & \mathbf{B}_{2\text{base}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_{1\text{topo}} & \mathbf{B}_{2\text{topo}} \end{bmatrix} \quad (38)$$

em que, para os pontos no interior do domínio do problema, ou seja, para os pontos $i=2$ até o ponto $i=\text{npoin}-1$, da malha de diferenças finitas, tem-se que :

$$\mathbf{A}_1 = (1-\theta)(\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{M}\mathbf{R}_2) \quad (39)$$

$$\mathbf{A}_2 = [1 - 2\mathbf{M}(1-\theta)\mathbf{R}_2] \quad (40)$$

$$\mathbf{A}_3 = (1-\theta)(-\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{M}\mathbf{R}_2) \quad (41)$$

$$B_1 = \theta(-NR_1 - MR_2) \quad (42)$$

$$B_2 = (1 + 2M\theta R_2) \quad (43)$$

$$B_3 = \theta(NR_1 - MR_2) \quad (44)$$

sendo:

$$R_1 = \Delta T / 2\Delta Z \quad (45)$$

$$R_2 = \Delta T / \Delta Z^2 \quad (46)$$

As Eqs. (39) a (40) são obtidas em termos das variáveis N e M avaliadas no instante T , enquanto que nas Eqs. (42) a (44) as variáveis N e M são avaliadas no instante $T+\Delta T$.

As constantes A_{1base} , A_{2base} , A_{1topo} , A_{2topo} , B_{1base} , B_{2base} , B_{1topo} , B_{2topo} , CC_{base} e CC_{topo} indicadas nas Eqs. (36) a (38) são definidas de acordo com o tipo de condição de contorno. Para o ponto situado no topo da camada ($Z=1$), considerada como um contorno drenante, tem-se que:

$$A_{1topo} = 0.0 \quad (47a)$$

$$A_{2topo} = 0.0 \quad (47b)$$

$$B_{1topo} = 1.0 \quad (47c)$$

$$B_{2topo} = 0.0 \quad (47d)$$

$$CC_{topo} = e_{npoin} = e(q'_0 + \Delta q) \quad (47e)$$

Para o ponto situado na base da camada ($Z=0$), considerada como um contorno drenante, tem-se que:

$$A_{1base} = 0.0 \quad (48a)$$

$$A_{2base} = 0.0 \quad (48b)$$

$$B_{1base} = 1.0 \quad (48c)$$

$$B_{2base} = 0.0 \quad (48d)$$

$$CC_{base} = e_1 = e(q'_0 + \Delta q + (\gamma_s - \gamma_w)h_r) \quad (48e)$$

Para o ponto situado na base da camada ($Z=0$), considerada como um contorno impermeável, tem-se, a partir das Eqs. (28) e (32), que:

$$A_{1base} = 1 - 2(1 - \theta)MR_2 \quad (49a)$$

$$A_{2base} = 2(1 - \theta)MR_2 \quad (49b)$$

$$B_{1base} = 1 + 2\theta MR_2 \quad (49c)$$

$$B_{2base} = -2\theta MR_2 \quad (49d)$$

$$CC_{base} = (NR_1 - MR_2)(2\Delta Z(\gamma_w - \gamma_s)h_r)(de/d\sigma') \quad (49e)$$

Devido à natureza não linear das leis constitutivas de tensão efetiva e permeabilidade, para obtenção da solução do sistema de equações dado pela Eq. (33) é necessário a adoção de um processo iterativo. Neste trabalho adota-se o método de Picard como estratégia de solução tal como utilizado por Nogueira et al. (2014), Souza (2015) e Souza et al. (2015). A Fig. 1 ilustra o algoritmo de solução adotado em que toler é a tolerância adotada no processo iterativo e miter é o número máximo de iterações.

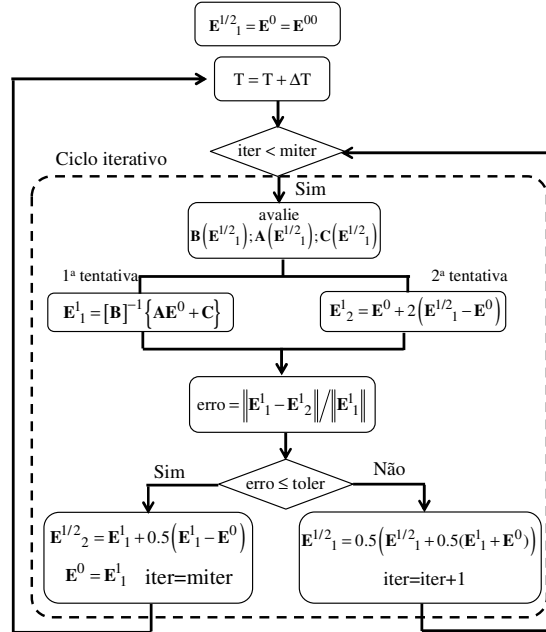


Figura 1 – Ilustração do processo de solução via algoritmo de Picard

4 EXEMPLOS DE VERIFICAÇÃO

Neste item são apresentados três exemplos. O primeiro trata do fenômeno do adensamento a grandes deformações sem levar em conta o efeito do peso próprio tal como apresentado por Gibson et al. (1967). O segundo trata do fenômeno do adensamento levando em conta o peso próprio da camada de solo tal como analisado por Xie e Leo (2004).

4.1 Adensamento a grandes deformações – sem peso próprio

Uma camada de solo mole (homogêneo, isotrópico e saturado) de espessura H igual a 10m está sujeita ao fenômeno de adensamento devido à ação de um carregamento uniformemente distribuído na superfície Δq de intensidade 100kPa, tal como indicado na Fig. 2. O carregamento é aplicado instantaneamente e mantido constante ao longo do tempo. Este problema foi analisado por Gibson et al. (1967) desconsiderando o peso próprio da camada de solo mole.

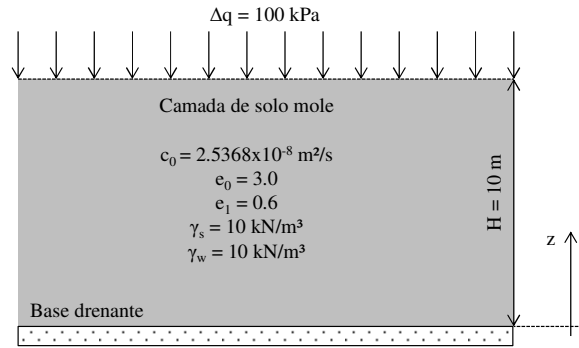


Figura 2. Exemplo 1 – Idealização do problema

A camada de solo mole está sujeita à dupla drenagem e apresenta as seguintes propriedades: coeficiente de adensamento inicial (c_0) igual a $2.5368 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$; peso específico da água (γ_w) e das partículas sólidas (γ_s) no valor de 10 kN/m^3 (artifício adotado a fim de eliminar a parcela devido ao peso próprio da camada); e, distribuição uniforme de índice de vazios inicial (e_0) e final (e_1), ao longo da camada, iguais a 3.0 e 0.6, respectivamente. A espessura da camada em coordenada reduzida (h_r) é determinada de acordo com a Eq. (13), considerando o índice de vazios inicial na superfície (e_{00}) igual a 3.0, conduzindo ao valor 2.5m.

Gibson et al. (1967) adotaram a seguinte função $g_2(e)$:

$$g_2(e) = \frac{c_0 + \alpha(e - e_0)}{(1 + e_0)^2} \quad (50)$$

onde:

$$\alpha = \frac{\lambda c_0}{(e_0 + \lambda e_0)} \quad (51)$$

em que λ é um parâmetro, determinado experimentalmente, introduzido de modo a incluir a variação da função $g_2(e)$ com a variação de índice de vazios. A Tabela 1 apresenta 3 situações variando-se os valores de λ .

Tabela 1. Situações propostas para o Exemplo 1

Situação	λ	e_1/e_0	α Eq. (51)	$g_2(e_{00})$ Eq. (50)	Z Eq. (11)	T Eq. (12)
1	0	$>0.0 \text{ e } <1.0$	0.0	1.59×10^{-9}	$0.4z$	$2.54 \times 10^{-10} t$ (*)
2	0.4	0.2	2.42×10^{-9}			
3	-0.4	0.2	-5.64×10^{-9}			

Para $T=1$ tem-se $t=t_f=3.942 \times 10^9 \text{ s}$ (≈ 125 anos)

Os resultados numéricos foram obtidos adotando uma marcha implícita, um incremento de tempo (Δt) de $9.855 \times 10^6 \text{ s}$, uma malha de 21 pontos nodais e uma tolerância de 10^{-5} . A Fig. 3 apresenta a variação temporal da distribuição espacial do grau de consolidação $f(Z, T)$ definido como:

$$f(Z, T) = \frac{(e - e_1)}{(e_0 - e_1)} \quad (52)$$

em que e_0 e e_1 são, respectivamente, a distribuição de índice de vazios inicial e final, definida, neste exemplo, como uniforme ao longo da camada. Como pode ser visto os resultados numéricos apresentam uma excelente concordância com os resultados apresentados por Gibson et al. (1967).

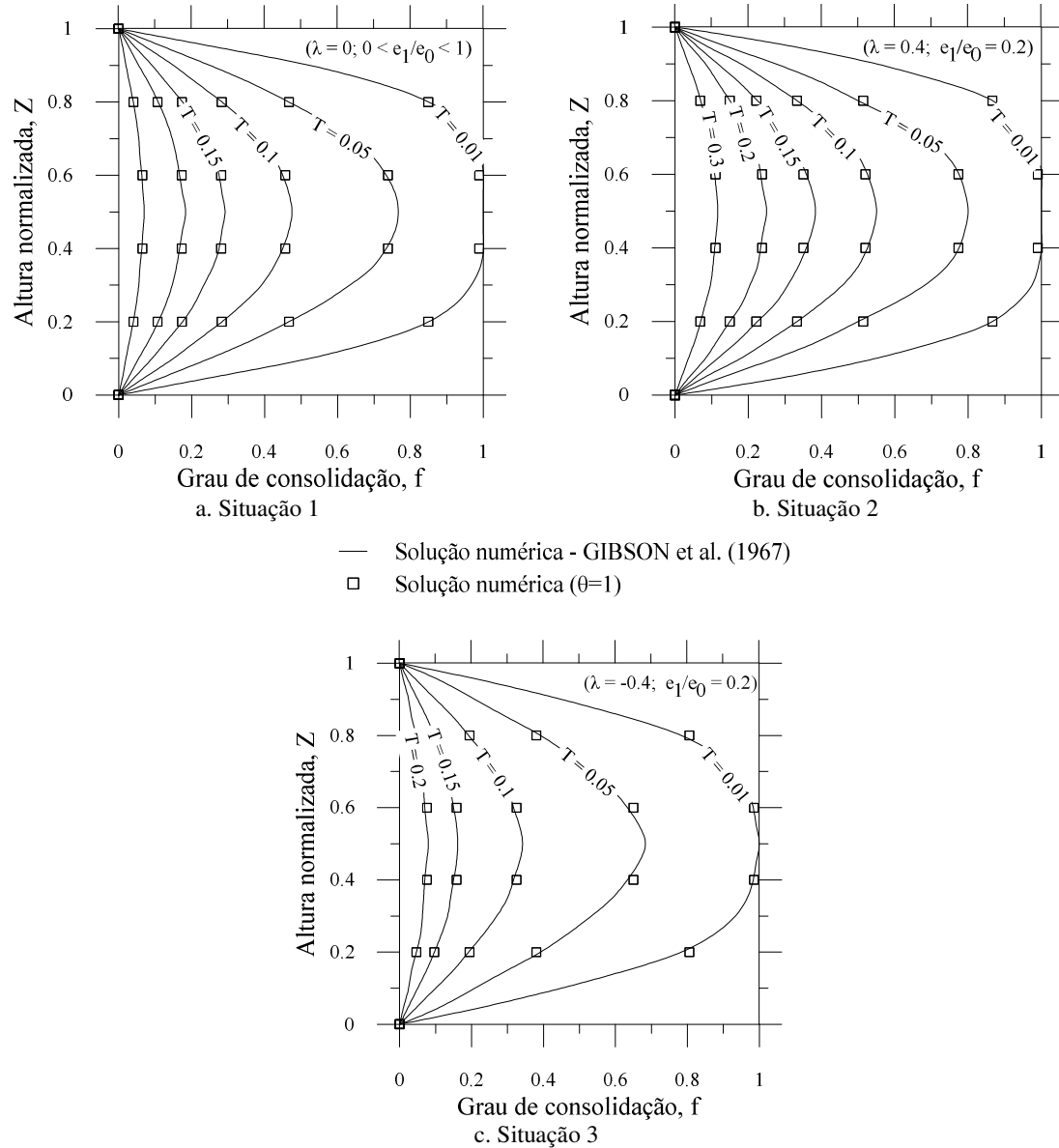


Figura 3. Variação temporal da distribuição espacial do grau de consolidação – solução numérica versus solução analítica - Exemplo 1

4.2 Adensamento a grandes deformações – com peso próprio

Neste exemplo, proposto por Xie e Leo (2004), analisa-se o fenômeno do adensamento a grandes deformações numa camada de solo mole com espessura inicial de 10m, tal como ilustrado na Fig. 4, submetida à ação do peso próprio e de um carregamento uniformemente distribuído na superfície (Δq) de intensidade 100kPa o qual é aplicado instantaneamente e mantido constante ao longo do tempo. Considera-se, ainda, uma carga efetiva preexistente sobre o terreno (q'_0) equivalente à 10kPa.

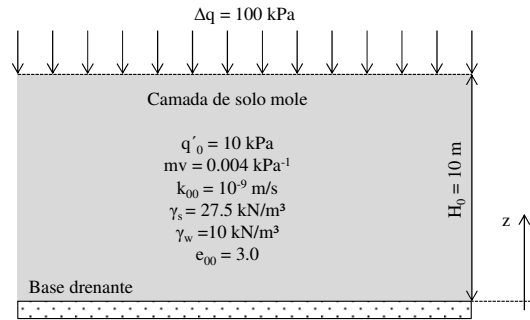


Figura 4. Exemplo 2 – Idealização do problema

A camada de solo mole esta sujeita à dupla drenagem e apresenta as seguintes propriedades: coeficiente de compressibilidade volumétrica (m_v) de 0.004 kPa^{-1} ; coeficiente de permeabilidade inicial (k_{00}) igual a 10^{-9} m/s ; índice de vazios inicial da superfície (e_{00}) igual a 3.0; e peso específico da água (γ_w) e dos sólidos (γ_s), respectivamente, iguais a 10 e 27.5 kN/m^3 .

A Tabela 2 apresenta as condições iniciais de acordo com a Eqs. (17) e (18); e as condições de contorno de acordo com as Eqs. (19) a (22), considerando uma espessura da camada em coordenada reduzida (h_r) de 2.5m de acordo com a Eq. (13).

Tabela 2. Condições inicial e de contorno

Posição	T=0				T≠0	
	z Eq. (2)	Z Eq. (11)	σ' (kPa) Eq. (17)	e Eq. (18)	σ' (kPa) Eq. (19 e 21)	e Eq. (20 e 22)
Base	0	0	53.75	2.3578	153.75	1.2508
Topo	2.5	1	10.0	3.0	110	1.6813

Usando as leis constitutivas indicadas nas Eqs. (5) e (6) pode-se obter a seguinte expressão para a função $g_2(e)$:

$$g_2(e) = \frac{k_{v0}}{\gamma_w m_{vl}} \frac{1}{(1+e_{00})^2} \quad (53)$$

Avaliando-se a função $g_2(e)$ para um ponto na superfície em que o índice de vazios inicial (e_{00}) é igual a 3.0, chega-se a seguinte relação entre o tempo real (t) e o fator tempo (T), usando a definição na Eq. (12).

$$T = 2.5 \times 10^{-10} t \quad (54)$$

Considerando um fator tempo T igual a unidade tem-se uma estimativa do tempo de duração do fenômeno (t_f) que será, neste caso, igual a 4×10^9 s (≈ 127 anos).

Os resultados numéricos foram obtidos adotando uma marcha implícita, um incremento de tempo (Δt) de 10^7 s, uma malha de 21 pontos nodais e uma tolerância de 10^{-5} . A Fig. 5 apresenta a variação temporal da distribuição espacial do grau de consolidação $f(Z, T)$ (Eq. 52) e do grau de consolidação médio U_m definido como:

$$U_m(T) = \left(1 - \frac{\Delta p_m(T)}{\Delta p_m(T=0^+)} \right) \times 100\% \quad (55)$$

onde

$$\Delta p_m(T) = \sum_{i=1}^{npoin} \Delta p(Z_i, T) \quad (56)$$

$$\Delta p_m(T=0^+) = \sum_{i=1}^{npoin} \Delta p(Z_i, 0^+) \quad (57)$$

em que o excesso de poro pressão é obtido através da Eq. (28).

Como pode ser visto na Fig. 5, os resultados numéricos apresentam uma excelente concordância com os resultados apresentados por Xie e Leo (2004).

Agora, considere a camada anterior, indicada na Fig. 4, com as mesmas propriedades materiais, condições de carregamento e iniciais adotadas, no entanto, com base impermeável, ou seja, com a camada sujeita a uma condição de simples drenagem pelo topo. Neste caso a condição de contorno é indicada na Eq. (23). A Fig. 6 apresenta os resultados em termos do grau de consolidação e do grau de consolidação médio para a condição de simples drenagem. Como podem ser observados os resultados numéricos apresentam boa concordância com os resultados apresentados por Xie e Leo (2004) para a camada com simples drenagem.

5 CONCLUSÕES

Os resultados dos problemas apresentados verificam as implementações computacionais desenvolvidas, assim, como validam o modelo numérico via MDF.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à PROPP/UFOP, ao CNPq, à Fundação Gorceix, à FAPEMIG e à CAPES pelo auxílio financeiro recebido para o desenvolvimento dos projetos relacionados a este trabalho. O primeiro autor agradece ao PPGEM e à CAPES pelo auxílio financeiro recebido através da bolsa de mestrado.

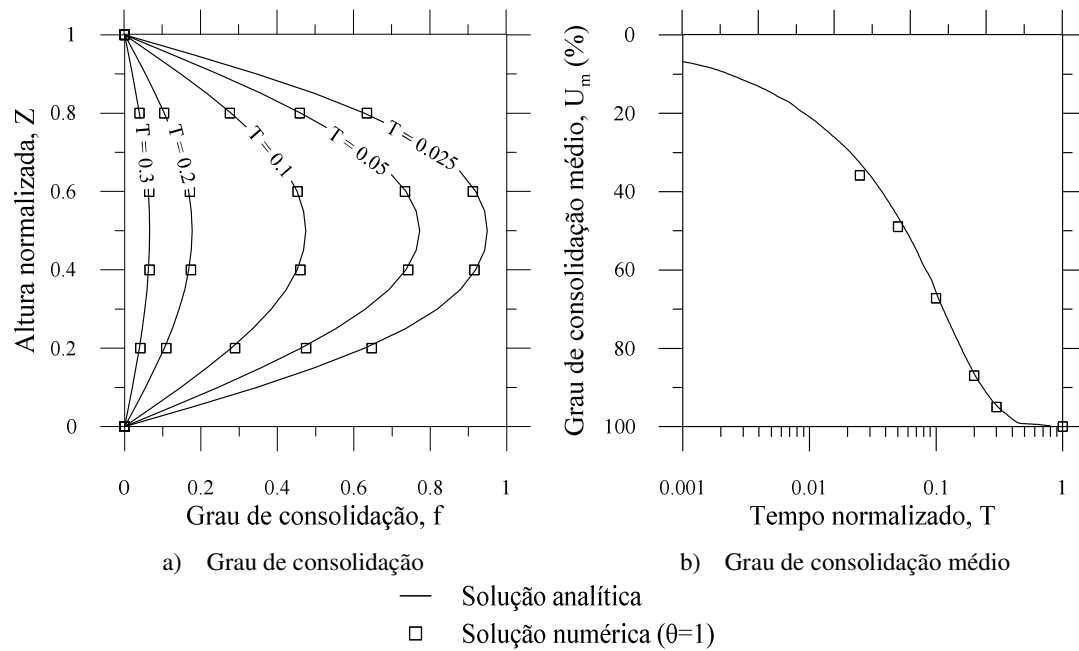


Figura 5. Variação temporal da distribuição espacial do grau de consolidação e do grau de consolidação médio – solução numérica versus solução analítica – Exemplo 2 – Dupla drenagem

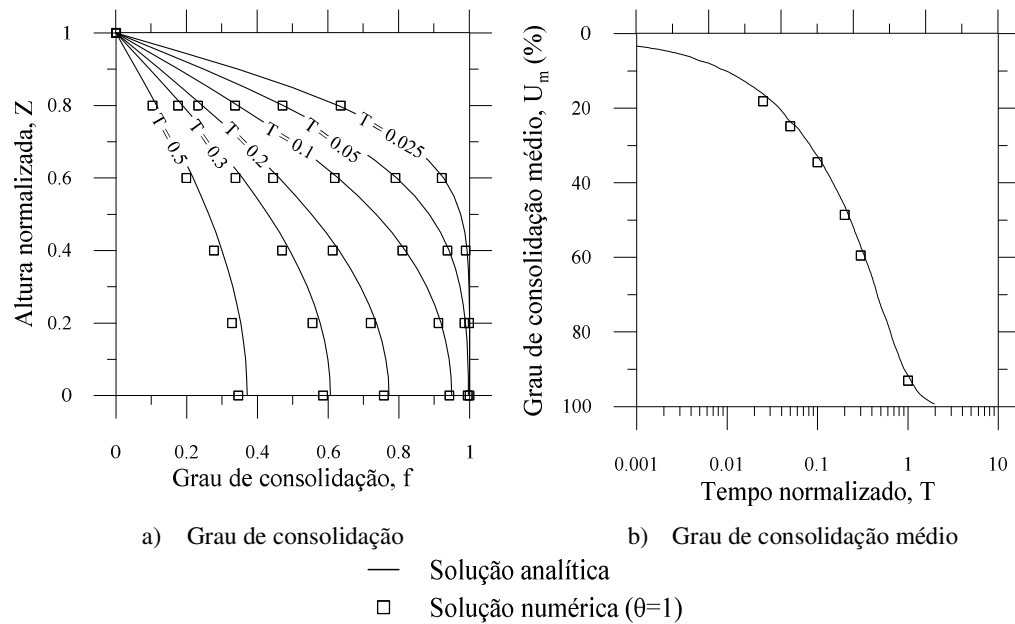


Figura 6. Variação temporal da distribuição espacial do grau de consolidação e do grau de consolidação médio – solução numérica versus solução analítica – Exemplo 2 – Simples drenagem

REFERÊNCIAS

- Ferreira, A. M., & Nogueira, C. L., 2004. Análise do adensamento unidimensional com grandes deformações pelo método das diferenças finitas. Relatório Final de Iniciação Científica. PIBIC 2003-2004, 114p
- Gibson, R. E., England, G. L., & Hussey, M. J. L., 1967. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. 1. Finite non-linear consolidation of thin homogeneous layers. *Geotechnique*, vol. 17, n. 3, pp. 261–273.
- Gibson, R. E., Schiffman, R. L., & Cargill, K. W., 1981. The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. II. Finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers. *Canadian geotechnical journal*, vol. 18, n. 2, pp. 280–293.
- Nogueira, C. L., 2002. *Análise do adensamento unidimensional com grandes deformações pelo método das diferenças finitas*. Relatório técnico-científico final projeto TEC 1487/98 – FAPEMIG, 69p.
- Nogueira, C. L., Souza, K. B., Armond, D. M., Cordeiro, C. S., & Souza, A. B. M., 2014. Modelagem numérica de problemas de fluxo não saturado em sistemas de cobertura. In, *Cilamce 2014 - XXXV Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Fortaleza/CE*, v. 1. p. 1-13.
- Schiffman, R. L., 2001. Theories of consolidation. University of Colorado at Boulder.
- Silva, W. S., & Azevedo, R. F., 1999. Ensaio de adensamento hidráulico. In Proc of 4 o Congresso Brasileiro de Geotecnia Ambienta, pp. 225–232.
- Souza, K. B., 2015. *Modelagem numérica de problemas de fluxo não saturado em sistemas de cobertura*. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Minas) - Departamento de Engenharia de Minas, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, 58f.
- Souza, K.B., Nogueira, C.L. & Piuza, L.F., 2015. Influência dos modelos constitutivos em fluxo no comportamento de sistemas de cobertura com barreira hidráulica. In: *Cilamce 2015 - XXXVI Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering Rio de Janeiro*. v. 1. p. 1-12.
- Xie, K. H., & Leo, C. J., 2004. Analytical solutions of one-dimensional large strain consolidation of saturated and homogeneous clays. *Computers and geotechnics*, vol. 31, n. 4, pp. 301–314.