



EXPERIENCIA NUMÉRICA UTILIZANDO MODELOS DE CAPACITÂNCIA E RESISTÊNCIA EM RESERVATÓRIOS COM MÚLTIPLAS CAMADAS

Helena Katz

Bernardo Horowitz

helenakatzflins@gmail.com

horowitz@ufpe.com.br

Universidade Federal de Pernambuco

Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, 50740530, Pernambuco, Recife, Brasil

Juan Alberto Rojas Tueros

albert_rojast@hotmail.com

Universidade Federal de Pernambuco

Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, 50740530, Pernambuco, Recife, Brasil

Resumo. *A indústria do petróleo demanda resultados rápidos e economicamente viáveis para seu gerenciamento. O modelo de capacitância e resistência (CRM) é um modelo simplificado de simulação de reservatórios que utiliza como dados o histórico de injeção, produção e BHP. A conectividade é um dos seus parâmetros e tem grande importância pois revela informações sobre características geológicas do reservatório e a influência de um injetor na vazão de um poço produtor. O CRM vem sendo aprimorado para representar cada vez melhor as equações que governam a dinâmica do sistema. Neste estudo, utilizamos o CRM dividindo o reservatório em camadas. Foi utilizado um modelo sintético, com três camadas de diferentes permeabilidades, canais de permeabilidade e falha selante. A determinação dos parâmetros do modelo é realizada através de otimização, na qual a função objetivo minimiza a soma dos quadrados dos erros entre a vazão observada e calculada para o produtor. Para verificação, comparamos o cálculo das vazões dos produtores, utilizando os parâmetros otimizados, com os dados do histórico, o que nos mostrou que essa estratégia captura com mais acurácia a dinâmica natural do reservatório e tem como resultados valores de conectividade que se ajustam melhor ao modelo real, quando comparados com outros métodos da literatura.*

Palavras chaves: *Otimização restrita, injeção de água, CRM, conectividades, múltiplas camadas*

INTRODUÇÃO

A produção do petróleo é atualmente de extrema importância para a população mundial, a qual, muito provavelmente, continuará dependente de sua utilização não só como fonte de energia, mas também como matéria prima de vários produtos. Portanto é de grande importância o estudo da produção dos reservatórios de petróleo e para isso é necessário o desenvolvimento e aprimoramento dos métodos de modelagem e simulação dos processos de fluxo dos fluidos nos mesmos, representando bem seus comportamentos físicos através de modelos computacionais e equações matemáticas.

Os simuladores de reservatórios tradicionais demandam detalhados balanços de massa, elevado custo computacional além de necessitarem da estimativa de vários parâmetros geológicos do reservatório, como compressibilidade, permeabilidade, porosidade, entre outros. Muitas dessas propriedades não são diretamente medidas, ou seja, precisam ser inferidas e podem resultar em modelos complexos, com alto custo, grandes incertezas e simulações que envolvem malhas com milhões de células.

Portanto, simplificar os modelos para simulação dos reservatórios tem sido um desafio. As técnicas desenvolvidas variam entre modelos simples a complexas aproximações numéricas. O que elas têm em comum, porém, é a análise dos dados do passado para encontrar resultados para o futuro, baseando-se em ajuste de dados histórico (Gentil, 2005). Foi nesse contexto que iniciaram os estudos do modelo de capacitância e resistência (*Capacitance Resistance Model*, CRM) que é um modelo simplificado de reservatório que quantifica a conectividade entre poços injetores e produtores baseados no histórico das vazões de injeção e produção, os quais são tratados como dados de entrada e saída, respectivamente. O modelo considera efeitos de capacitância (compressibilidade) e resistividade (transmissibilidade) e foi escolhido o nome CRM devido a analogia a um circuito elétrico resistor-capacitor.

Uma primeira abordagem sobre o CRM foi introduzida por Albertoni e Lake (2003), que usaram uma técnica de regressão multivariada linear com filtros para estimar as conectividades entre pares de poços produtores e injetores, porém não fizeram a relação entre as conectividades e a física do reservatório. Gentil, (2005) interpretou o significado deste parâmetro como uma função da transmissibilidade. Yousef et al., (2006) introduziu ao modelo os efeitos de compressibilidade, volume poroso e índice de produtividade, incluindo nas equações do modelo uma constante de tempo para caracterizar a diferença do tempo do sinal de injeção e seu efeito na vazão no produtor. Após esses primeiros estudos, o CRM vem sendo objeto de pesquisa de muitos autores como Sayarpour, (2008); Weber, (2009); Nguyen, (2012); Cao et al, (2014); Holanda, (2015), os quais desenvolveram diferentes soluções para as equações diferenciais do modelo original e para diferentes volumes de controle no reservatório, representando cada vez melhor, através das equações, a real a dinâmica do sistema (Fraguio, 2017).

Todos esses estudos até aqui citados consideraram o reservatório sendo composto por uma única camada e os parâmetros constantes durante toda a simulação. Porém, como os reservatórios de petróleo são formados em rochas sedimentares as quais são compostas de camadas heterogêneas, o fluxo dos fluidos tem diferentes comportamentos nas diferentes camadas do reservatório.

Moreno, (2013) estudou o caso de um reservatório dividido em três camadas incorporando um CRM de múltiplas camadas e resolveu o sistema levando em consideração que as conectividades devem ser dinâmicas quando eventos de aberturas e fechamento de poços ocorrem durante o tempo de vida do reservatório. Zhang et al., (2015) estudou um sistema com múltiplas camadas considerando as influências de diferentes condições geológicas para cada camada nos seus parâmetros, levando em consideração os efeitos do fluxo cruzado e da pressão de fundo de poço (*Bottom Hole Pressure BHP*).

Neste estudo, será realizado o cálculo dos parâmetros do CRM para um reservatório que será dividido em três camadas, isoladas entre si por camadas de permeabilidade nula. Observa-se que as camadas formadas nas rochas sedimentares são separadas por outras finas camadas com permeabilidade substancialmente menor, por isso a consideração das camadas serem isoladas entre si, não havendo troca de fluxo entre elas.

Além disso, os parâmetros são considerados dinâmicos com a evolução da simulação, considerando aberturas ou fechamento de poços produtores. Isso significa que a cada passo de tempo da simulação em que houver abertura ou fechamento de um ou mais poços produtores, as conectividades serão recalculadas, levando em consideração a redistribuição de água injetada apenas entre os poços que estiverem produzindo naquele período, os quais chamamos poços ativos.

1 METODOLOGIA

Neste trabalho serão comparadas as performances de três estratégias do CRM. A primeira será o típico CRM, o qual considera o reservatório com uma única camada e os parâmetros fixos em um único intervalo de tempo para a simulação, independente de abertura e fechamento de poços. Utilizamos o CRM considerando o volume de controle baseado em cada poço produtor incluindo todos os poços injetores que influenciam na sua vazão de produção, o Modelo de Capacitância e Resistência Baseado no Produtor (CRM *producer based*, CRMP), (Sayarpour, 2008).

As outras duas estratégias dividem o reservatório em camadas e o tempo da simulação em intervalos de tempo, são elas: CRM com múltiplas camadas (*Multi-Layer*, ML) e CRM com múltiplas camadas e múltiplas respostas do tempo (*Multi-Layer Multi-Response Time*, MLMT). Os resultados das vazões calculadas através das estratégias do CRM foram comparados com as vazões observadas, para analisar qual delas apresenta o melhor ajuste com os dados de histórico.

1.1 Modelo Capacitância e Resistência

O modelo CRM é baseado em uma equação do balanço de massa, que considera através de seus parâmetros a compressibilidade e transmissibilidade do reservatório, e não requer um modelo geológico. Seus parâmetros, os quais são conectividade, constante de tempo e índice de produtividade, são avaliados baseados no histórico das vazões de injeção, produção e BHP, se disponível. Ter como base esses dados é uma vantagem já que são informações que são normalmente coletadas e disponíveis, precisas e em grande quantidade nos campos reais. Os parâmetros do modelo são determinados através de um problema de otimização, onde é minimizado o quadrado da diferença entre as vazões de produção calculada e observada

(dados de histórico reais de produção). Uma vez que os parâmetros do modelo são calculados, pode-se estimar a produção do reservatório baseando-se no modelo com os parâmetros ajustados, resultando em um relativamente rápido e de baixo custo modelo de reservatório.

Os significados físicos dos parâmetros do modelo são:

Conectividades λ_{ij} : representa a fração da vazão de injeção do injetor i contribuindo na vazão de produção do produtor j . É propriedade da geologia assim como da posição entre poços e independe das vazões de injeção e produção.

Constante de tempo τ : A constante do tempo relaciona o tempo necessário para uma variação de pressão, causada por uma variação na vazão de injeção, influenciar a vazão produção. Se a constante de tempo é alta, significa que o sistema tem uma resposta lenta podendo ser devido a alta compressibilidade, grande volume poroso ou uma baixa permeabilidade. Por outro lado, se a constante de tempo é pequena, significa que o sistema responde rapidamente ao estímulo, que pode ser devido a baixa compressibilidade, pequeno volume poroso ou alta permeabilidade.

Para o cálculo dos parâmetros, são necessárias as informações das vazões de injeção nos injetores e mudanças de BHP nos poços produtores, as quais são processadas através do simulador de reservatório que atua como um sistema de processamento de sinais, onde as vazões de injeção e BHP são os dados de entrada, que podem ser manipuladas, para controlar a vazão de produção, que é a resposta do reservatório ou sinal de saída. Isso pode ser ilustrado na Fig.1.

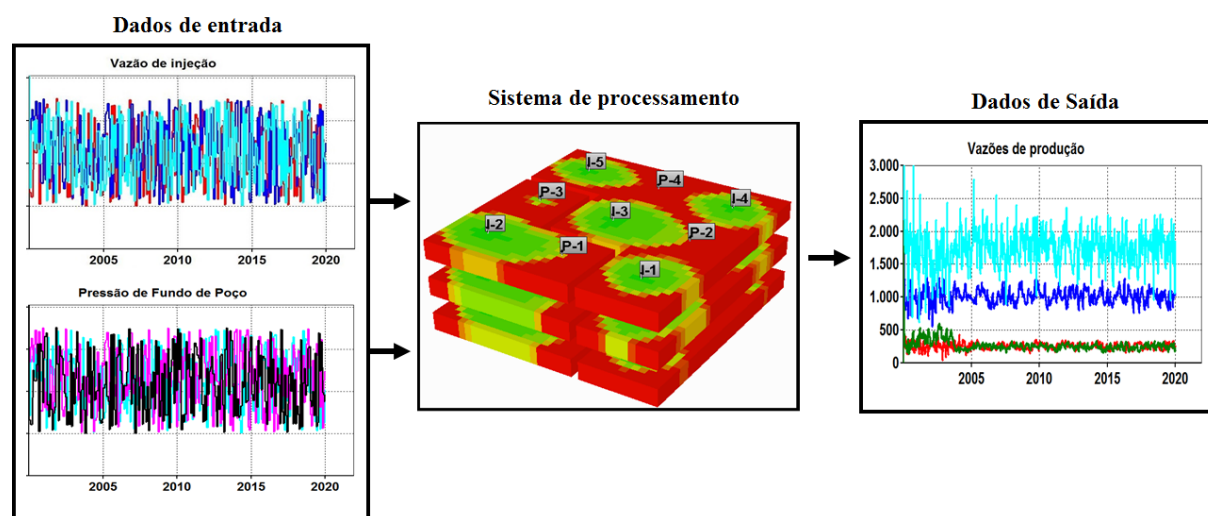


Figura 1. Representação esquemática do sistema que processa os dados de entrada e retorna uma saída

A seguir serão descritas as diferentes estratégias de CRM: CRMP, CRM-ML e CRM-MLMT.

1.2 Modelo de capacitância-resistência baseado no produtor CRMP

O reservatório de petróleo estudado pode ser dividido em diferentes volumes de controle. Quando o volume de controle é baseado em cada poço produtor e todos injetores que influenciam na sua vazão de produção, o CRM é representado pelo modelo CRMP.

O CRMP tem como parâmetros uma constante de tempo, τ_j , e índice de produtividade, J_j , para cada produtor e uma conectividade, λ_{ij} , para cada par de injetor (i)/produtor (j). A equação da continuidade para o produtor, j , pode ser expressa: (Sayarpour et al., 2009):

$$c_t v_p \frac{dp^j}{dt} = \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ij} I_i(t) - q^j(t). \quad (1)$$

Onde c_t = compressibilidade total, v_p = volume poroso (poros conectados), dp^j = pressão média do volume drenado pelo produtor, j , N_I = número de injetores $I_i(t)$ = vazão de injeção no tempo t e $q^j(t)$ = vazão total líquida do produtor j no tempo t .

Introduzimos um índice de produtividade para relacionar a Eq. (1) apenas com vazões:

$$q^j(t) = J_j (\overline{p^j(t)} - p_{wf}^j). \quad (2)$$

Onde J_j = índice de produtividade do produtor j e p_{wf}^j = pressão de fundo de poço (BHP) no produtor, j . Eliminando a pressão média do reservatório $\overline{p^j(t)}$ nas Eq.(1) e (2), obtemos a equação de continuidade para o produtor j para o modelo CRMP:

$$\tau_j \frac{dq^j}{dt} + q^j(t) = \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ij} I_i(t) - \tau_j J_j \frac{dp_{wf}^j}{dt} \quad \text{com } \tau = \frac{c_t v_p}{J}. \quad (3)$$

Integrando a Eq. (3) para um discreto intervalo de tempo, Δt , durante o qual as vazões de injeção de todos os injetores são assumidas constantes e ainda assumindo conhecida a vazão inicial para todos os produtores, temos como solução analítica para a vazão de produção no passo de tempo k :

$$q_k^j = q_{k-1}^j e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ij} I_{ik} - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \tau_j J_j \frac{p_{wf}^{j(k)} - p_{wf}^{j(k-1)}}{\Delta t} \quad (4)$$

Na Eq. (4) o primeiro termo da direita está associado a depleção primária, o segundo com a contribuição das frações das vazões dos injetores e o terceiro com a mudança do BHP. Desta forma, essas três parcelas compõem a vazão de produção líquida do poço produtor.

O CRMP apresenta bons resultados quando as propriedades do reservatório são homogêneas no volume drenado pelo produtor, pois considera uma única constante de tempo e índice de produtividade para todo o poço, e conectividades entre o produtor e cada um dos injetores também únicas para todo o poço. A vantagem é que trata o reservatório como uma única camada e, portanto, tem uma quantidade menor de parâmetros envolvidos no modelo do que os modelos que serão apresentados a seguir. Porém, para modelos onde o reservatório apresenta heterogeneidade ao longo de suas camadas, representá-lo por uma única camada e

utilizar um único parâmetro para todo o poço resulta em parâmetros que não refletem a heterogeneidade existente, e o método não representa a geologia real do reservatório.

Outra desvantagem é que considera o intervalo de vida útil do reservatório como um único intervalo de tempo, com parâmetros fixos, desconsiderando eventos de abertura e de fechamento de poços, que alteram a quantidade de poços ativos e, portanto, a distribuição de água entre os mesmos. Logo, em intervalos de tempo em que um poço é por exemplo fechado, o modelo continua considerando que existe uma conectividade entre os injetores e este poço, e não considera a redistribuição da água, que era direcionada para esse poço, entre os demais. Portanto, o cálculo dos parâmetros pelo CRMP perde precisão em produções em que poços produtores são abertos e fechados.

A seguir serão apresentadas estratégias que calculam os parâmetros variáveis por camada e no tempo.

1.2.1 *Modelo de capacitância e resistência de múltiplas camadas dinâmico*

Nesta estratégia, será considerado um reservatório o qual será dividido em camadas, não conectadas entre si, genericamente chamadas por camada α . Este procedimento irá permitir que as heterogeneidades entre as camadas sejam levadas em consideração no cálculo dos parâmetros.

Além disso, os parâmetros deixarão de ser fixos ao longo de toda simulação e passam a ser dinâmicos, de acordo com a evolução da mesma. A simulação é dividida em intervalos, os quais tem seu início e término determinados por eventos de abertura e fechamento de poços produtores. A cada evento, um novo intervalo de tempo é iniciado, e se encerra quando novamente ocorre abertura ou fechamento de poços produtores, dando início ao próximo intervalo. Desta forma, para cada intervalo de tempo, um cálculo para determinação dos parâmetros é realizado, e como consequência os parâmetros são diferentes para cada intervalo de tempo da simulação, de acordo com os poços que estão produzindo naquele período, os quais chamamos, neste estudo, de poços ativos.

Quando ocorre abertura ou fechamento de poços, ocorre também uma nova distribuição da água entre os poços produtores que continuam produzindo. Como mostra na Fig. 2, por exemplo, no tempo t observamos que os três poços produtores, P-1, P-2 e P-3, estão abertos, e portanto estão ativos. No tempo $t + \Delta t$ o produtor P-2 é fechado, tornando-se inativo, e água que era enviada para o mesmo pelos injetores se redistribui entre os poços P-1 e P-3, que continuam ativos. Portanto, as conectividades no tempo t são: $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{2,2}$ e $\lambda_{2,3}$. No tempo $t + \Delta t$, como o fechamento de P-2, $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{2,2}$ passam a ser nulas, e $\lambda_{1,1}$ e $\lambda_{2,3}$ serão recalculadas.

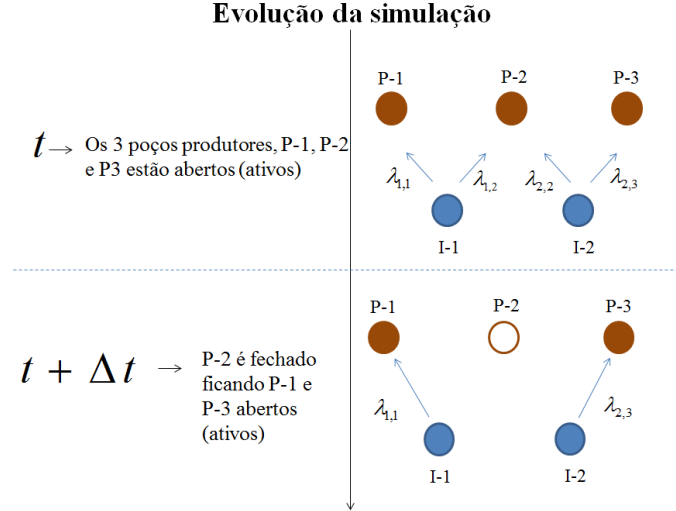


Figura 2. Evolução das conectividades ao longo da simulação. O tamanho das setas representa o valor das conectividades.

CRM Múltiplas Camadas (CRM-ML)

Nesta estratégia, o volume de controle para desenvolver as equações de balanço de massa é baseado no produtor, mas para cada camada do produtor j . A conectividade do par injetor (i)/produtor (j) passa a ser na camada λ_{ij}^α , representando a fração da vazão de injeção do injetor, i , na camada α , contribuindo na vazão de produção do produtor j também na camada α . A contribuição do i -ésimo injetor para esse volume, $V_{j\alpha}$, será: $\lambda_{ij}^\alpha(t)I_i^\alpha(t)$.

O CRM-ML é a forma mais simples de implementação do CRMP por camada, pois introduz as conectividades do poço por camada λ_{ij}^α , as quais irão substituir a conectividade única do poço λ_{ij} . Porém, mantém uniformes por produtor (e não por camadas) as constantes de tempo, τ_j , e o índice de produtividade, J_j . Quanto a evolução no tempo, todos parâmetros passam a ser dinâmicos.

Logo, o balanço de massa para o CRM-ML será representado pela Eq. (3) porém com conectividades para cada camada do reservatório e com parâmetros dinâmicos:

$$\tau_j \frac{dq^j}{dt} + q^j(t) = \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ij}^\alpha(t) i_i(t) - \tau_j J_j \frac{dp_{wf}^j}{dt} . \quad (5)$$

A Eq. (5) é uma equação diferencial. Como τ_j e J_j são únicos (constantes) para o poço produtor, ou seja, não estão em função da camada α , então a seguinte solução analítica pode ser obtida para q_k^j (vazão total do produtor, j , no passo de tempo, k :

$$q_k^j = q_{k-1}^j(t-1)e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ijk}^\alpha I_{ik}^\alpha - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \tau_j J_j \frac{p_{wf}^{j(k)} - p_{wf}^{j(k)}}{\Delta t} \quad (6)$$

Na equação (6) também o primeiro termo da direita está associado a depleção primária, o segundo com a contribuição das frações das vazões dos injetores e o terceiro com a mudança do BHP. Desta forma, essas três parcelas compõem a vazão de produção líquida do poço produtor.

A versão mais sofisticada que introduz as conectividades por camadas, será mostrada a seguir.

CRM Múltiplas Camadas com Múltiplos Tempos de Resposta (CRM-MLMT)

Nesta estratégia, o volume de controle para desenvolver as equações de balanço de massa, assim como no ML, é baseado no produtor, para cada camada do produtor j , $V_{j\alpha}$. Nesta estratégia, porém, todos os parâmetros são calculados por camada, ou seja, as conectividades, λ_{ij}^α , a constante de tempo, τ_j^α , e o índice de produtividade, J_j^α . Além disso são também dinâmicos. Como todos os parâmetros estão como função da camada, a vazão de produção do balanço de massa deste modelo será a vazão de produção na camada, $Q^{j\alpha}$ = vazão do produtor j na camada α .

$$\tau_j^\alpha \frac{dQ^{j\alpha}}{dt} + Q^{j\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{N_I} f_{ij}^\alpha(t) i_{ia}(t) - \tau_j^\alpha J_j^\alpha \frac{dp_{wf}^j}{dt}. \quad (7)$$

A solução analítica é, portanto, obtida para a vazão de produção total na camada ($Q^{j\alpha}$):

$$Q_k^{j\alpha}(t) = Q_k^{j\alpha}(t-1)e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j^\alpha}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j^\alpha}}\right) \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ijk}^\alpha(t) I_{ik}^\alpha - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j^\alpha}}\right) \tau_j^\alpha J_j^\alpha \frac{p_{wf}^{j(k)} - p_{wf}^{j(k)}}{\Delta t}, \quad (8)$$

e a vazão total no produtor será obtida através da soma das contribuições das camadas:

$$q_k^j = \sum_{\alpha=1}^{N_L} Q_k^{j\alpha}. \quad (9)$$

Como nas Eq. (4) e (6), na Eq. (8) o primeiro termo da direita está associado a depleção primária, o segundo com a contribuição das frações das vazões dos injetores na camada e o terceiro com a mudança do BHP. Desta forma, essas três parcelas compõem a vazão de produção líquida do poço produtor na camada.

Podemos observar que a Eq. (8) pode ser considerada uma equação geral para os três modelos de CRM apresentados, sendo ajustada para cada um de acordo com a quantidade do número de camadas ($N_L=1$ ou $N_L>1$) em que o reservatório é dividido e de quais parâmetros estão como função da camada ou serão únicos para todo o poço produtor.

Desta forma, o CRMP pode ser considerado um caso particular do CRM-ML e do CRM-MLMT, onde $N_L = 1$.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nesta sessão serão apresentados o problema de otimização e a estratégia utilizada para resolvê-lo, com o objetivo de diminuir o número de iterações necessárias para o cálculo dos parâmetros do modelo, que são: λ_{ij}^α , τ_j^α , J_j^α , $i=1\cdots N_I$, $j=1\cdots N_P$, $\alpha=1\cdots N_L$. Tais parâmetros podem ser estimados resolvendo o problema de mínimos quadrados restritos, onde minimizamos a função objetivo, a qual é a soma do quadrado das diferenças entre a vazão real observada no campo, ou obtida por simulação, e a vazão calculada através da função desenvolvida.

Neste problema de otimização, a função objetivo tem como restrição que a soma das conectividades em cada injetor, i , tem que ser menor ou igual a um, para manter a conservação da massa, e os parâmetros tem restrições de limites.

As conectividades tem que ter valor entre zero e um, para não violar a restrição da função objetivo. Assumimos uma constante de tempo mínima que deve ser próxima de zero, porque uma constante de tempo igual a zero significa fluido e rocha incompressíveis, ou volume poroso igual a zero ou ainda índice de produtividade infinito para um dado volume de controle. Além disso, isso causa instabilidade numérica.

É necessário definir também limites superiores para τ_j^α e J_j^α . Isso ajuda a convergência do algoritmo e evita que a constante de tempo possa divergir para o infinito quando a resposta a um estímulo não se realize.

O problema de otimização posto a seguir pode ser considerado como um problema geral das estratégias CRM apresentadas nesse trabalho, podendo ser particularizado para cada modelo considerando se seus parâmetros são constantes para o todo o poço produtor ou se estão em função da camada.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize } \sum_{k=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_P} (q_k^{j,obs} - q_k^{j,cal})^2 \quad \text{com } q_k^{j,cal} = \sum_{\alpha=1}^{N_L} Q_\alpha^j \\
 &\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^{N_P} \lambda_{ij}^\alpha \leq 1, \quad \text{para todo } i, \alpha \\
 &\quad 0 \leq \lambda_{ij}^\alpha \leq 1, \quad \text{para todo } i, \alpha \\
 &\quad \tau_{min} \leq \tau_j^\alpha \leq \tau_{máx}, \quad \text{para todo } \alpha \\
 &\quad J_{min} \leq J_j^\alpha \leq J_{máx}, \quad \text{para todo } \alpha
 \end{aligned} \tag{10}$$

Onde, $q_k^{j,cal}$ = vazão total calculada do produtor j no passo de tempo k , $q_k^{j,obs}$ = vazão total observada em dados de histórico do produtor j no passo de tempo k , Q_j^α = vazão do produtor j na camada α . N_t , N_P e N_L = número de passos de tempo da simulação, número de produtores j e o número de camadas do reservatório, respectivamente.

Para resolver o problema de otimização são necessárias as informações da vazão de injeção, vazão de produção observada e BHP, se disponível. Tais informações podem ser obtidas em um campo real e geralmente existem em grandes quantidades disponíveis no campo, ou, normalmente para fins de pesquisa, através de simulação. Para esse trabalho, as vazões observadas foram obtidas através do simulador comercial IMEX (CMG, 2016).

Para o modelo de múltiplas camadas, a vazão de injeção que utilizamos foi por camada enquanto que a vazão de produção utilizada foi a vazão total líquida do produtor. Isso porque, em geral, na prática, a vazão de injeção por camada é medida e é um dado que podemos ter disponível, enquanto a vazão de produção por camada não é um dado comumente disponível, mas sim a vazão total de produção do poço. No caso de poços inteligentes, as vazões por camada são controladas por válvulas, portanto pode-se dispor dos dados das vazões de produção líquida dos poços produtores por camada.

Para a estratégia CRM-MLMT, calculamos as vazões por camada do poço produtor e fazemos seu somatório, Eq. (7). O somatório das contribuições por camada resulta na vazão total calculada do produtor, e este é o valor utilizado na função objetivo, que irá minimizar a diferença entre o mesmo e a vazão total de produção líquida observada no produtor, Eq.(8).

O BHP é utilizado no problema se essa informação for conhecida. Caso não seja, considera-se o BHP constante e consequentemente o terceiro termo do cálculo da vazão de produção será nulo, assim como o parâmetro, J , índice de produtividade, que é calculado a partir do BHP. Neste estudo, como os dados foram obtidos do simulador e considerou-se poços inteligentes, então tanto as vazões por camada como o BHP eram dados conhecidos.

O número de parâmetros da otimização, N_{par} , será função do número de produtores ativos no intervalo de tempo da simulação, N_{P_ativos} , do número de injetores e do número de camadas que será dividido o reservatório. Portanto, irá depender da estratégia do CRM utilizada (se divide o reservatório em camadas e a simulação em intervalos de tempo, ou não) e também se o BHP é considerado constante ou variável. Quando a simulação é dividida em intervalos de tempo, devido a abertura e fechamento de poços, temos parâmetros dinâmicos e portanto o problema tem diferentes números de parâmetros nos diferentes intervalos de tempo. Temos então as seguintes situações:

- Se, $\alpha = 1$ e os parâmetros são fixos durante a simulação, significa que temos um reservatório de uma única camada com um único intervalo de simulação, ou seja, o modelo CRM originalmente proposto, que passa então a representar um caso particular do modelo de múltiplas camadas. Neste caso, o número de parâmetros da otimização, será: $N_{par} = N_{P_ativos} (N_I + 2)$, considerando o BHP variável e $N_{par} = N_{P_ativos} (N_I + 1)$, para o BHP constante.
- Se, $\alpha > 1$ e se as conectividades estão função da camada α mas a constante do tempo e o índice de produtividade são únicos para o poço, temos então o CRM-ML e o número de parâmetros da otimização, será: $N_{par} = N_{P_ativos} [(N_I \times N_L) + 2]$, considerando o BHP variável e $N_{par} = N_{P_ativos} [(N_I \times N_L) + 1]$, para o BHP constante.
- Se, $\alpha > 1$, e todos os parâmetros estão em função da camada α , o modelo será o CRM-MLMT, e o número de parâmetros da otimização será: $N_{par} = N_{P_ativos} [(N_I \times N_L) + 6]$, considerando o BHP variável e $N_{par} = N_{P_ativos} [(N_I \times N_L) + 3]$, para o BHP constante.

2.1 Algoritmo e estratégia de otimização

O cálculo dos parâmetros foi realizado seguindo os seguintes passos:

1.- Informar dados aleatórios de BHP dos poços produtores e vazões de injeção para o simulador para obter resultados das vazões nos produtores. Esses dados são alterados a cada 30 dias durante a simulação e os resultados foram obtidos por dia. Para que tenhamos uma boa representação das condições do reservatório, é necessário que os dados de entrada variem dentro de um intervalo que cubra a variação natural de operação do sistema.

2.- Usar os resultados do simulador a partir do passo de tempo em que as vazões de todos os poços produtores apresentem irrupção de água.

3.- Dividir os dados de produção dos poços em intervalos de tempo, de acordo com fechamento e/ou abertura de poços produtores. O número de intervalos será o número de vezes que houve alteração na quantidade de poços produtores ativos.

4 - Para cada intervalo de tempo, utilizando os dados correspondente a aquele intervalo, calcular os parâmetros através de otimização. Para resolver o problema de otimização foi utilizada a estratégia de Weber, (2009), que resolve dois problemas: um onde não é imposta a restrição da função objetivo (problema desacoplado) e outro, onde todas as restrições são consideradas (problema acoplado). A função objetivo da otimização calcula a diferença das vazões nos produtores j , porém tem como restrição o somatório das conectividades em cada injetor i . Portanto, a aplicação da restrição da soma das conectividades igual a um em cada injetor não permite minimizar os termos da função objetivo correspondente a cada produtor j separadamente, porque os resultados obtidos podem não atender, ao final, a essa restrição. Porém, se essa restrição for desconsiderada, os parâmetros de cada poço produtor podem ser encontrados independentemente (problema desacoplado).

4.1 – Problema desacoplado: partindo de um ponto inicial, utilizar o problema desacoplado para minimizar a função objetivo, para cada poço produtor $j = 1 \dots N_p$. O resultado do problema desacoplado é utilizado como ponto de partida para a resolução do problema acoplado.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \sum_{k=1}^{N_t} (q_k^{j, \text{obs}} - q_k^{j, \text{cal}})^2 \quad \text{com } q_k^{j, \text{cal}} = \sum_{\alpha=1}^{N_t} Q_{\alpha}^j \\ \text{Sujeito a: } & 0 \leq \lambda_{ij}^{\alpha} \leq 1, \quad \text{para todo } i, \alpha \\ & \tau_{\min} \leq \tau_j^{\alpha} \leq \tau_{\max}, \quad \text{para todo } \alpha \\ & J_{\min} \leq J_j^{\alpha} \leq J_{\max}, \quad \text{para todo } \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Para resolver o problema desacoplado, utilizamos a técnica de mínimos quadrados (*Least Squares*). A otimização foi feita utilizando a função *lsqnonlin*, do optimization toolbox do MATLAB, a qual resolve problemas de mínimos quadrados não linear com restrições de limites. O problema dos mínimos quadrados é utilizado em muitas áreas de aplicação, e é uma ferramenta robusta para otimização. A grande vantagem desse método é que, devido a sua estrutura, a matriz hessiana é obtida a partir de derivadas apenas de primeira ordem, o que o torna mais fácil de resolver do que os problemas gerais de minimização. Além disso, ele fornece um bom ponto de partida para o problema acoplado, diminuindo o número de iterações do mesmo.

4.2 – Filtro: se a solução do problema acoplado violar a restrição da função objetivo, utilizar o filtro para ter como ponto de partida do problema acoplado uma solução viável.

$$\text{Se } \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{ij}^{\alpha} > 1, \text{ então} \quad (12)$$

$$\overline{\lambda}_{ij}^{\alpha} \leftarrow \gamma \lambda_{ij}^{\alpha} \quad \text{onde } \gamma = 1 / \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{ij}^{\alpha}.$$

$\overline{\lambda}_{ij}^{\alpha}$ é o novo valor da conectividade entre o poço injetor i e j que será usado no problema acoplado.

4.3 – Utilizando os resultados do problema desacoplado filtrado como ponto de partida, resolver o problema acoplado para cálculo final dos parâmetros. O problema acoplado foi resolvido utilizando a função *fmincon* do optimization toolbox do MATLAB, solver SQP. Tanto no problema acoplado como no problema desacoplado, o gradiente foi calculado por diferenças finitas.

5 - como resultado final do problema, teremos diferentes conjuntos de parâmetros para cada intervalo de tempo da simulação. Caso a simulação tenha apenas um intervalo de tempo, teremos um único resultado para os parâmetros.

3 EXEMPLOS E RESULTADOS

Neste trabalho usamos um modelo sintético com duas modificações para avaliar a performance das estratégias CRM. As simulações para obtenção das informações observadas foram realizadas através do simulador comercial de reservatórios IMEX (CMG, 2016). Os algoritmos de otimização utilizados para minimizar o erro foram mínimos quadrados, para o problema desacoplado e SQP para o problema acoplado, disponíveis no tool-box de otimização do Matlab (MATLAB, 2014).

3.1 Modelo Sintético

O exemplo utilizado para avaliar as estratégias é um modelo sintético de duas fases (óleo e água), conforme pode ser observado na Fig. 3 (Cao et al, 2014) com duas modificações: a primeira foi a inclusão de dois canais de alta permeabilidade (8.000 mD) e a segunda, além da inclusão dos canais, foi imposta também uma falha selante, cujas células que a modelam tem permeabilidade, transmissibilidade e porosidade nulas, como pode ser visto Fig. 4.

O modelo tem nove poços, cinco injetores e quatro produtores, completados verticalmente em todas as camadas e são poços inteligentes, ou seja, cada camada é controlada por uma válvula, o que nos permite conhecer as vazões de injeção e produção em cada camada.

A falha selante divide o reservatório em dois compartimentos: o primeiro tem dois produtores, P-1 e P-3, que são suportados por um injetor, o I-2; o segundo tem dois produtores, P-2 e P-4 e são suportados por 4 injetores, I-1, I-3, I-4 e I-5. O modelo tem três camadas, com 33x33 células ativas. A permeabilidade horizontal por camada é 100, 300 e 150 mD, na primeira, segunda e terceira, respectivamente. A permeabilidade vertical nas camadas é 10% da permeabilidade horizontal. A porosidade é 20% e a pressão inicial do reservatório é

1250 psi. A vazão de injeção tem restrição mínima e máxima de 400 e 3.000 bbl/dia. A vazão de produção é controlada pelo BHP o qual pode variar entre 120 e 160 psi. Outras características do modelo podem ser encontradas em Cao et al., (2014)

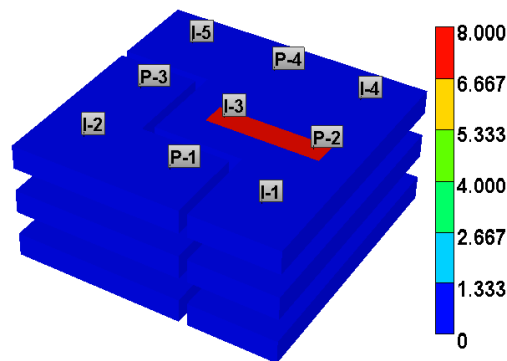


Figura 3. Modelo sintético com canais de alta permeabilidade e falha selante

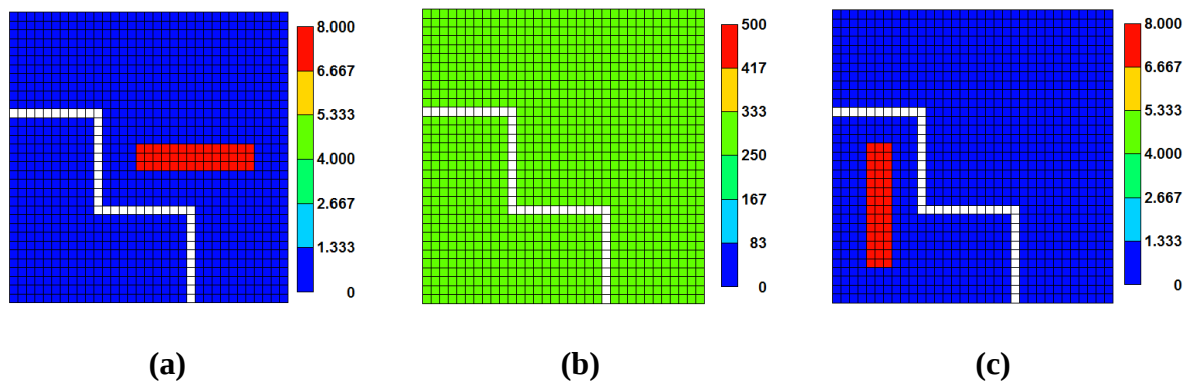


Figura 4. Permeabilidade por camadas: (a) primeira camada, (b) segunda camada e (c) última camada

3.1.1 Caso 1 - Modelo sintético com canais de alta permeabilidade

Os reservatórios de petróleo apresentam heterogeneidades em todas as escalas. Na escala de grãos individuais, pode haver grande variação nos tamanhos de grãos, proporcionando ampla distribuição de volumes vazios e interconexões, que podem formar canais.

Para avaliar os efeitos dessa heterogeneidade no cálculo das conectividades, foram incluídos dois canais de alta permeabilidade, 8000 mD: um canal está localizado entre o injetor I-3 e o produtor P-2, na primeira camada e o outro entre o produtor P-3 e o injetor I-2 na terceira camada. Foi realizada uma simulação de duração de 20 anos, sem abertura e fechamento de poços durante a mesma. O cálculo dos parâmetros foi realizado utilizando os dados a partir do passo de tempo em que todos os produtores apresentavam irrupção de água.

Para avaliar também o efeito de abertura e fechamento dos poços, foi feita uma outra simulação, também de duração 20 anos, mas com 3 intervalos de tempo: o primeiro do dia 1 ao 2190, no qual P-2 iniciou fechado, o segundo do dia 2191 ao dia 4280, no qual P-3 foi também fechado e o terceiro e último, do dia 4281 até o final, dia 7308, no qual P-2 foi aberto. Fig. 5 a ilustra os intervalos de tempo descritos:

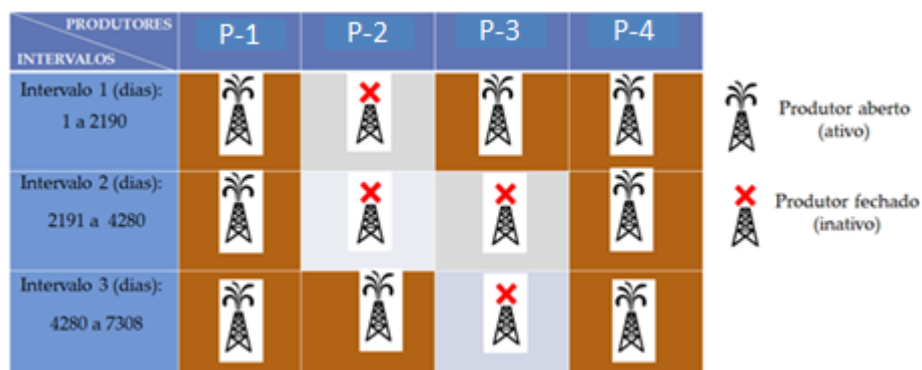


Figura 5. Fechamento de poços nos intervalos durante a simulação

Nesse modelo, devemos observar altas conectividades entre os poços P-2 e I-3 assim como entre os poços P-3 e I-2, devido a presença do canal. O CRM-ML e CRM-MLMT devem capturar, com mais acurácia que o CRMP, essa heterogeneidade, já que os parâmetros estão sendo calculados por camadas. Fig. 6 a seguir representam as conectividades para a simulação realizada em um único intervalo de tempo, para as três estratégias de CRM utilizadas:

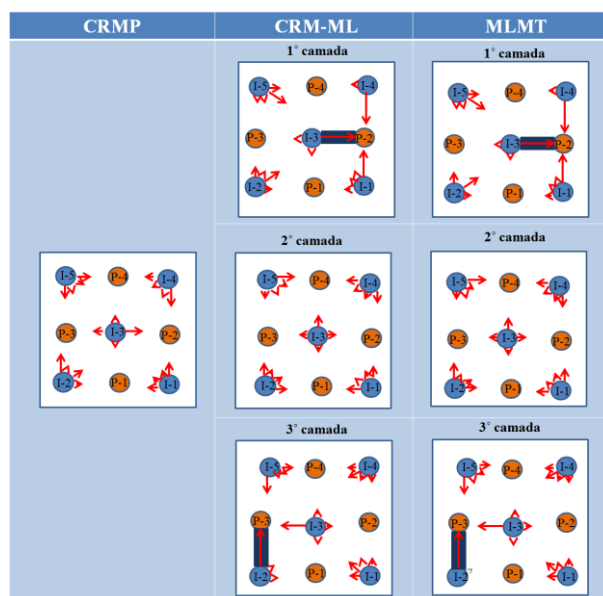


Figura 6. Conectividades caso 1, comparação das estratégias CRMP, CRM- ML e CRM-MLMT.

Podemos observar na Fig. 6 que os resultados das conectividades obtidos através da estratégia CRM-ML e CRM-MLMT são muito próximos. Podemos também observar que as conectividades obtidas através do CRMP, para um determinado par de poços injetor/produzidor, é aproximadamente a média das conectividades das três camadas do mesmo par obtidas pelo CRM-ML, assim como, pelo CRM-MLMT. Como o CRMP considera o reservatório como uma única camada, seus resultados irão também refletir uma média das características geológicas que irão compor essa única camada, enquanto o CRM-ML e o CRM-MLMT, que dividem o reservatório em camadas considerando suas diferenças, obtêm os parâmetros para

cada uma de acordo com suas características. Portanto, esse aprimoramento na estratégia nos fornece informações importantes sobre as características geológicas do reservatório.

Observando os resultados das estratégias CRM-ML e CRM-MLMT, podemos perceber que elas capturam sensivelmente a alta conectividade entre os poços I-3 e P-2 na primeira camada, devido a presença do canal, e que esse comportamento já não mais ocorre nas outras duas camadas, ou seja, o fluxo de uma camada não interfere na outra. Portanto, os métodos mostram que a estratégia de divisão em camadas consegue detectar com precisão essa heterogeneidade. Podemos perceber ainda que o canal cria também uma grande influência dos poços vizinhos I-1 e I-4 em P-2, pois observa-se um valor alto de conectividade entre esse poços injetores e P-2 na primeira camada, o que nas outras duas camadas não ocorre.

O CRMP tem mostrado bons resultados quando o volume drenado pelo produtor é homogêneo. Como nesse caso temos duas camadas com dois canais de alta permeabilidade, isso faz com que esse volume não seja homogêneo para todo o poço. De fato, podemos observar que essa heterogeneidade compromete os resultados obtidos pelo CRMP, pois o mesmo não a detecta. Já o CRM-ML e o CRM-MLMT conseguem captar essa heterogeneidade, resultando em valores mais precisos para os parâmetros.

Podemos observar o efeito do aprimoramento da estratégia na determinação dos parâmetros observando o gráfico de ajuste das curvas das vazões líquidas de produção observadas e calculadas. A fig. 7 mostra o ajuste para o poço P-2, que foi escolhido por ter uma heterogeneidade em uma de suas camadas, que é o canal entre o mesmo e o I-3.

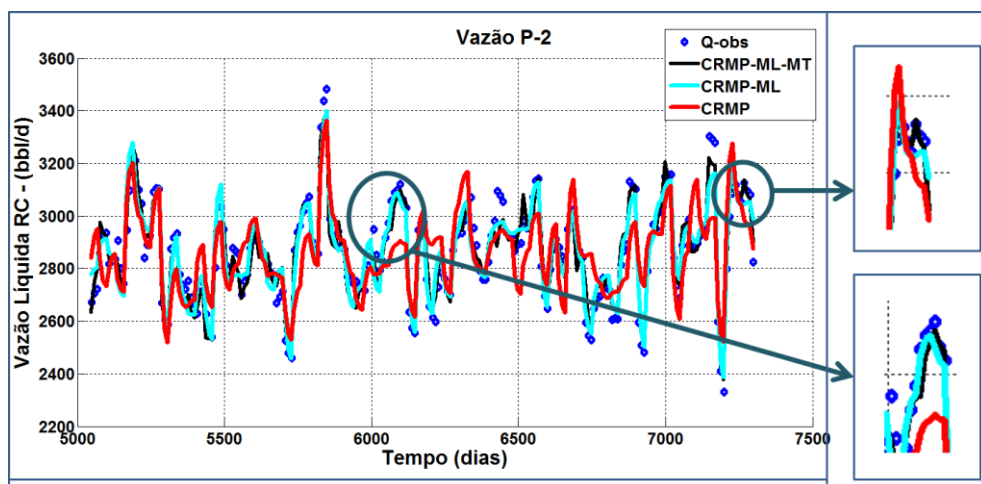


Figura 7. Comparação do ajuste das curvas das vazões líquidas do produtor P-2 calculadas pelos CRMP, CRM-ML e CRM-MLMT e as vazões líquidas simuladas.

Analisando o gráfico, podemos perceber que as curvas das vazões líquidas calculadas pelo CRM-ML e pelo CRM-MLMT se ajustam muito melhor a curva das vazões líquidas simuladas do que a curva calculada pelo CRMP. Isso mostra que de fato as estratégias que calculam os parâmetros por camada conseguem se aproximar com mais precisão ao comportamento real do reservatório. As estratégias CRM-ML e CRM-MLMT tem suas curvas muito próximas no gráfico, o que indica que as conectividades tem um impacto maior no cálculo da vazão que a constante de tempo e o índice de produtividade e, portanto, variar as conectividades por camada mantendo constantes estes outros parâmetros, como faz o CRM-ML, já retorna resultados bem mais precisos que o CRMP, com menos variáveis que o CRM-MLMT.

Contudo, podemos verificar que a curva do CRM-MLMT é a que entre as três estratégias tem o melhor ajuste e, além disso, mesmo quando a sua curva se distancia da curva dos dados observados, ela está sempre acompanhando a tendência da mesma, o que não observamos com as curvas do CRMP e CRM-ML. Portanto, para esse caso, o CRM-MLMT mostrou ter os resultados para os parâmetros calculados que melhor se ajustam aos dados observados.

O ajuste das curvas para a simulação com abertura e fechamento de poços está na Fig.8. a seguir:

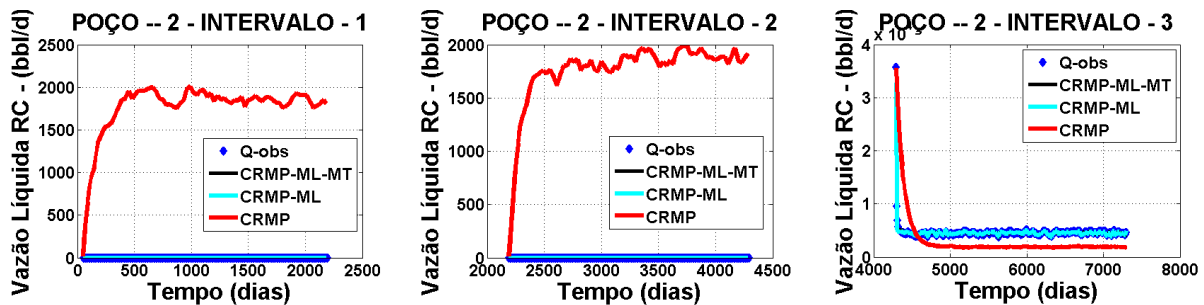


Figura 8. Comparação do ajuste das curvas das vazões líquidas do produtor P-2 calculadas pelos CRMP, CRM-ML e CRM-MLMT e as vazões líquidas do P-2 simuladas.

Podemos observar pelo gráfico que para esse caso de heterogeneidade com a simulação envolvendo abertura e fechamento de poços, a curva da vazão líquida do P-2, calculada pelo CRMP, que considera uma única camada e parâmetros constantes, sofreu um grande desvio da curva da vazão líquida observada, pois não captura nem as heterogeneidades nem se o poço está ativo ou não. Podemos perceber que nos intervalos 1 e 2, apesar de P-2 estar fechado, pela estratégia CRMP existe vazão de produção no mesmo. Já as curvas calculadas pelo CRM-ML e pelo CRM-MLMT, para os quais os parâmetros são calculados para cada modificação na quantidade de poços produtores ativos, tiveram um excelente ajuste, mostrando, portanto, que conseguem detectar as divisões da simulação e os poços ativos e inativos nos respectivos intervalos. Esse exemplo mostra a importância do cálculo dos parâmetros de forma dinâmica, acompanhando a evolução da simulação com o tempo. Também nesse caso, o CRM-MLMT foi o método que apresentou o melhor ajuste entre os três métodos comparados.

3.1.2 Caso 2 Modelo sintético com canais e falha

No caso 2, foi adicionado ao modelo sintético, além dos dois canais de alta permeabilidade descrito no caso 1, uma falha selante, para avaliar também o efeito dessa heterogeneidade nos parâmetros calculados. Nos reservatórios de petróleo reais, as falhas são criadas por tensões na rocha e podem medir de alguns centímetros até centenas de metros. As falhas podem ter uma capacidade significativamente maior ou menor de transmitir fluidos do que as rochas ao seu redor, dependendo de como o espaço vazio for preenchido (material de argila, por exemplo, torna a falha impermeável). Para este caso, consideramos a permeabilidade, porosidade e transmissibilidade iguais a zero. Também para esse caso foi realizada uma simulação com um único intervalo de tempo e outra com três intervalos, igualmente como realizado no caso 1.

Nesse modelo, devemos observar, além das altas conectividades entre os poços P-2 e I-3 e entre os poços P-3 e I-2, devido a presença do canal, conectividades nulas entre os poços

injetores que estão de uma lado da falha e os poços produtores localizados do lado oposto da falha.

A Fig. 9 mostra a comparação das conectividades para as três estratégias. Em relação aos canais, as mesmas análises realizadas no caso um podem ser feita neste caso. Em relação a falha selante, observamos que os resultados em relação a mesma são muito próximos para as três estratégias. Como ela é vertical e está em todas as camadas, ela não gera uma heterogeneidade entre as camadas, então considerar os parâmetros por camada ou como se o reservatório fosse uma só camada, não resulta em grande diferença.

Observando a Fig. 9 podemos ver que I-2 apresenta influência nos produtores de P-1 e P-3, que estão do mesmo lado da falha que ele. Já em relação a P-4 e P-2, I-2 apresenta conectividades praticamente nulas, devido a falha selante que não permite que o fluxo de I-2 chegue a esses produtores. O mesmo podemos observar para os poços que estão do lado direito da falha, ou seja, os produtores I-1, I-3, I-4 e I-5, os quais tem influência nos poços produtores que estão do mesmo lado que eles da falha, ou seja, P-2 e P-4. Já P-1 e P-3 tem conectividades praticamente nulas com esses últimos injetores.

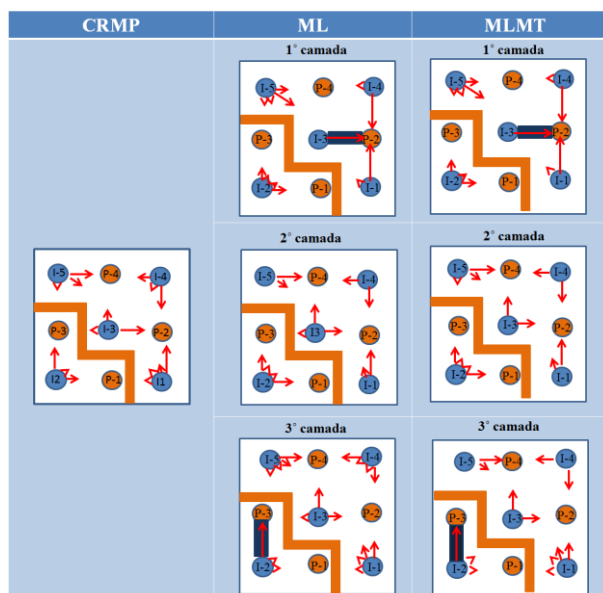


Figura 9. Conectividades caso 2, comparação das estratégias CRMP, ML e MLMT.

Na Fig.10 podemos analisar o ajuste das curvas de vazão produção líquida calculada pelas três estratégias do CRM e a vazão de produção líquida observada. Analisando os resultados para P-2, já que este é um poço que apresenta o canal que representa uma heterogeneidade entre as suas camadas, podemos perceber, como no caso anterior, que os modelos CRM-ML e o CRM-MLMT tem suas curvas bem ajustadas com os dados reais, mostrando que conseguem capturar com acurácia essa heterogeneidade. O CRMP apresenta maiores desvios que as outras duas estratégias, não só quanto ao ajuste como também a sua curva, em alguns pontos, apresenta tendência oposta a evolução da curva dos dados observados.

A Fig. 11 mostra os ajustes das curvas das vazões de produção líquida do poço P-4. Este poço se mantém aberto durante toda a simulação, mas podemos perceber que o mesmo sofre influência das mudanças de abertura e fechamento dos outros poços. Quando a simulação inicia, P-2 está fechado e P-3 está aberto, sendo fechado no intervalo dois. No intervalo três,

P-2, que iniciou fechado, é aberto. Também podemos observar que do intervalo um para o intervalo dois há um aumento da vazão de P-4, devido a água que ia para P-3, que passa a ser inativo nesse intervalo, ser redistribuída entre os poços ativos P-1 e P-4. No intervalo seguinte, ou seja, no intervalo três, P-2 é aberto provocando diminuição na vazão de P-4, pois a água que estava sendo direcionada apenas para P-1 e P-4 será redistribuída entre eles e P-2 que passa a ser ativo nesse último intervalo.

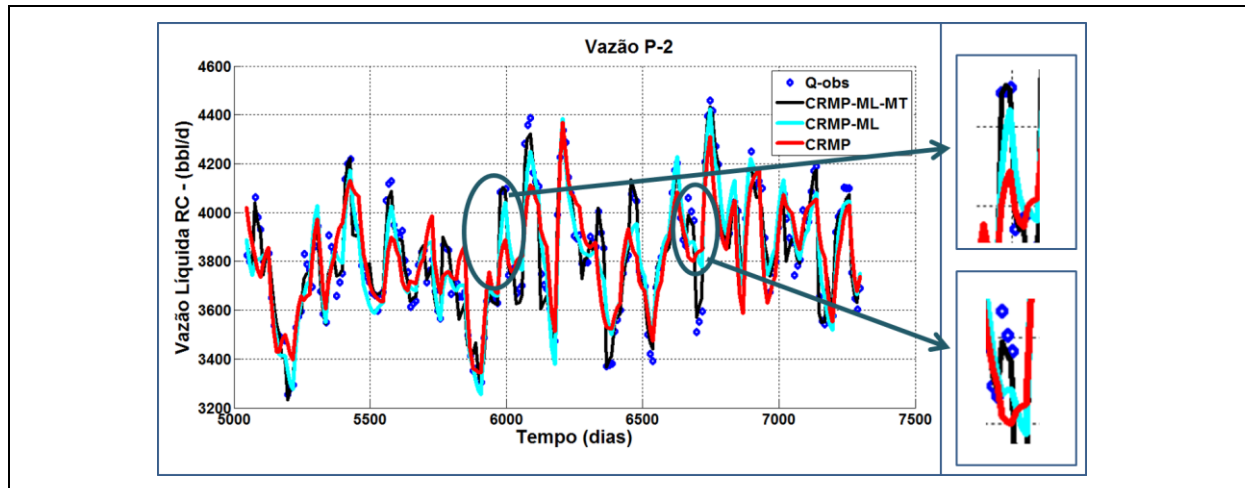


Figura. 10 Conectividades caso 2, comparação das estratégias CRMP, ML e MLMT.

Analisando a curva do CRM-ML e CRM-MLMT, podemos perceber que os mesmos conseguem capturar com precisão esses impactos na vazão de P-4 devido a abertura e fechamento dos poços produtores vizinhos, apresentando um bom ajuste das curvas, acompanhando a curva dos dados observados a cada intervalo de tempo. O CRMP, considerando um único intervalo para a simulação e portanto parâmetros constantes, não captura essas mudanças, sua curva se mantém em uma vazão média durante toda a simulação, que permanece entre as vazões mais altas, observadas nos intervalos um e três e as vazões mais baixas, observadas no intervalo dois, não se ajustando a curva dos dados observados em nem um dos três intervalos.

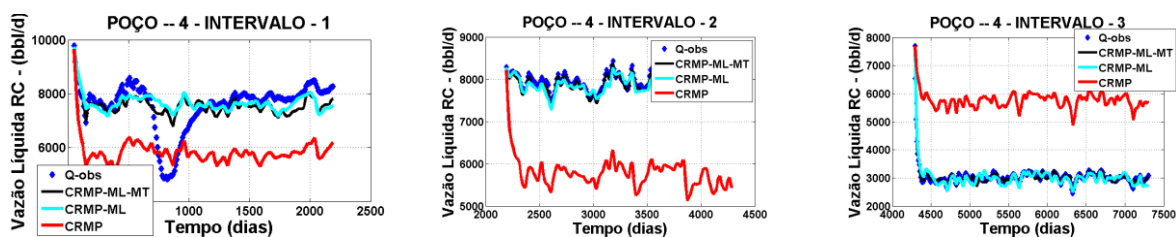


Figura. 11 Conectividades caso 2, comparação das estratégias CRMP, ML e MLMT.

CONCLUSÕES

Neste trabalho mostramos três estratégias do CRM: CMPR, CRM-ML e CRM-MLMT e realizamos a comparação do resultado do cálculo das conectividades de um reservatório utilizando as três estratégias. Dessa experiência podemos concluir que:

- Quando a estratégia do CRMP, que considera o reservatório com uma única camada, é aplicado a modelos heterogêneos, sua acurácia é comprometida. Além disso, se durante a simulação ocorre abertura ou fechamento de poços produtores, o ajuste do modelo, que considera os parâmetros constantes durante toda a simulação, tem um grande desvio dos dados observados, porque ele não leva em consideração tais mudanças durante a simulação.
- O CRM-ML e CRM-MLMT, que são estratégias do CRM que incorporam a divisão do reservatório em camadas e a divisão do tempo da simulação em intervalos, quando ocorre eventos de mudanças no status dos poços produtores, calculando para cada intervalo os parâmetros do modelo, já alcançam resultados bem mais aproximados ao modelo real do que o cálculo pelo típico CRMP. Podemos observar tais melhorias nas estratégias do CRM-ML e CRM-MLMT através dos gráficos de ajuste das curvas das vazões calculadas por esses modelos e a curva das vazões observadas. As curvas do ML e MLMT, principalmente deste último, tem um ajuste muito mais preciso do que a curva do CRMP, detectando as heterogeneidades do reservatório e as mudanças das conectividades ao longo da evolução da simulação.
- Os modelos CRM-ML E CRM-MLMT mostraram uma sensível capacidade de detectar heterogeneidades no reservatório, o que é de grande importância, pois em posse de dados reais de campo, que existem disponíveis em grande quantidade, podemos através das conectividades capturar características geológicas de um reservatório, com um baixo custo econômico e também computacional.
- O CRM-ML mostra grande aprimoramento nos resultados dos parâmetros em relação ao CRMP. O CRM-MLMT, por sua vez, por ter todos os parâmetros por camada e não apenas as conectividades como o CRM-ML, mostra resultados próximos porém mais precisos que o CRM-ML. A vantagem de usar o CRM-ML em relação ao CRM-MLMT é ter um método um pouco mais simples porém já sofisticado e com número de parâmetros menor com resultados significativamente melhores que os métodos tradicionais do CRM existentes na literatura.
- É de grande importância um modelo no qual as mudanças nos status dos poços é introduzida a simulação, principalmente para casos de grandes campos onde produtores são abertos e fechados ao longo do tempo de produção.
- Um ponto importante a ser levantado é que o sucesso do modelo depende muito da disponibilidade dos dados, como por exemplo a injeção por camada, pois são dados de entrada necessários para o desenvolvimento da estratégia proposta (Moreno, 2013).

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro para esta pesquisa ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq e a Fundação CMG.

REFERÊNCIAS

Albertoni, A., Lake, L., 2003. Inferring interwell connectivity only from well-rate fluctuations in waterfloods. *SPE Reserv. Eval. Eng* 6(1), 6-16.

- Cao, F., Luo, H., Lake, L. W., 2014. Development of a Fully Coupled Two-phase Flow Based Capacitance Resistance Model (CRM). *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/169485-MS
- Computer Modeling Group LTD., 2016. IMEX: User's Guide. Calgary Canada.
- Fragio, M., Lacivita A., Valle, J., Marzano M., 2017. Integrating a Data Driven Model into a Multilayer Pattern Waterflood Simulation. *Paper SPE-184908-MS*
- Gentil, P., *The Use of Multilinear Regression Models in Patterned Waterfloods: Physical Meaning of the Regression Coefficients*, M.S. Thesis, The University of Texas at Austin, August, 2005.
- Holanda, R. W., Gildin, E., Jensen, J. L., 2015. Improved Waterflood Analysis Using the Capacitance-Resistance Model Within a Control Systems Framework. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/177106-MS
- Lie, K.-A. An introduction to reservoir simulation using MATLAB: User guide for the Matlab Reservoir Simulation Toolbox (MRST). SINTEF ICT, December 2016, <https://www.sintef.no/Projectweb/MRST/Publications>
- MATLAB'S Optimization Toolbox User's Guide, R2014a.
- Moreno, G., 2013. Multilayer Capacitance-resistance model with dynamics connectivities. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 109, August 2013, Pages 296-307, ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2013.08.009>.
- Nguyen, Anh Phuong, *Capacitance Resistance Modelling for primary recovery, waterflooding and water-CO₂ flood*. Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin. 2012.
- Sayarpour, M., 2008. *Development and Application of Capacitance-Resistive Model to water/CO₂ floods*. PhD Dissertation. The University of Texas at Austin, Austin, Texas
- Sayarpour, M., Zuluaga, E., Kabir, C. S., Lake, L. W., 2009. The use of capacitance-resistive models for rapid estimation of waterflood performance and optimization, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 69 (3-4):227-238. <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>
- Weber, D. *The Use of Capacitance-Resistance Models to Optimize Injection Allocation and Well Location in Water Floods*. Ph.D dissertation, The University of Texas at Austin. 2009.
- Yousef, A., 2006 *Investigating Statistical Techniques to Infer Interwell Connectivity from Production and Injection Rate Fluctuations*. Ph.D dissertation, The University of Texas at Austin, 2006.
- Zhang, Z., Li, H.m, Zhang, D., 2015, Water Flooding Performance Prediction by Multi-Layer Capacitance-Resistive Models Combined With the Ensemble Kalman filter, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 108, July 2013 Pages 107-117 ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2015.01.020>.