



## **SIMULAÇÃO NUMÉRICA E COMPUTACIONAL DO ESCOAMENTO AO REDOR DE UMA ESFERA ESTACIONÁRIA A MODERADO NÚMERO DE REYNOLDS**

**Alessandra Ribeiro da Silva**

**Gustavo Borges Valim**

**Aristeu da Silveira Neto**

alessandra.silva@ufu.br

gustavoborgesvalim@hotmail.com

aristeus@mecanica.ufu.br

Universidade Federal de Uberlândia. Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC)

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bairro Santa Mônica, 38400-902, Minas Gerais, Uberlândia, Brasil

**Abstract.** *No presente trabalho, apresentam-se um estudo numérico e computacional de efeitos tridimensionais sobre o escoamento incompressível ao redor de uma esfera estacionária. Escoamentos a moderado número de Reynolds são simulados pelo método de diferenças finitas. O domínio, em metros, é um paralelepípedo definido por  $[0, 1.024] \times [0, 0.512] \times [0, 0.512]$ . Considera-se uma esfera com centro em  $(0.36, 0.256, 0.256)$  e diâmetro de  $0.04\text{m}$ . O comportamento do escoamento é descrito pela formulação euleriana e a superfície imersa é caracterizada por uma formulação lagrangiana. Utiliza-se o código MFSim desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da FEMEC-UFU, o qual permite resolver as equações de Navier-Stokes na forma tridimensional transiente utilizando malha bloco-estruturada com adaptatividade local. O uso de refinamento local possibilita uma redução do custo computacional visto que a presença de malhas mais refinadas é necessária somente em regiões específicas do escoamento onde o fluido se movimenta de forma complexa gerando gradientes elevados. Para a solução dos sistemas lineares adota-se o método Multigrid-Multiníveis. Para a discretização temporal usou-se o esquema semi-implícito e para o acoplamento pressão-velocidade o método do passo fracionado. Para uma melhor modelagem do escoamento utilizou-se o modelo de Smagorinsky dinâmico. A validação e a verificação do problema foram realizadas através de dados disponíveis na literatura.*

**Keywords:** *Escoamento ao redor de uma esfera, Escoamento incompressível, Malha adaptativa, Método da Fronteira Imersa*

## 1 INTRODUÇÃO

Para a simulação de escoamentos ao redor de interfaces sólidas pode-se utilizar o método da fronteira imersa. Neste método cria-se uma malha euleriana para descrever a dinâmica do fluido e uma malha lagrangiana para representar a interface da geometria de interesse. Como tem-se duas malhas independentes, a malha lagrangiana move-se sem a influência da malha euleriana.

Quando o fluido passa pela interface da esfera, ele exerce uma força sobre a superfície da esfera de forma a atender a condição de não deslizamento. Em resposta à ação do fluido na superfície da esfera, existirá uma reação, no fluido, de mesmo valor e direção, mas com sentido oposto que fará com que a velocidade do fluido na superfície seja zero. Para que o escoamento “perceba” a presença da esfera é necessário acrescentar um termo fonte de força interfacial nas equações de Navier-Stokes. Atualmente, existem diversos modelos para o cálculo desse campo de força.

O primeiro trabalho no contexto de fronteira imersa foi desenvolvido por Peskin (1972), com o objetivo de realizar o estudo do escoamento de sangue através de válvulas cardíacas e do coração.

Goldstein and Handler (1995) apresentaram o método da fronteira virtual. Nesse método aplica-se uma força ao escoamento de tal forma que a velocidade do fluido adjacente à interface, seja igual à velocidade da interface. Além disso, empregam-se constantes, nos termos forçantes, que devem ser ajustadas para obter o comportamento físico do escoamento. Esse método é limitado às geometrias com interfaces rígidas. Posteriormente, para evitar o emprego dessas constantes que necessitam de ajuste Mohd-Yusof (1997) propôs um modelo para calcular a força lagrangiana com base na equação da quantidade de movimento linear do fluido na fronteira. Denomina-se esse procedimento por método da força direta. A partir do trabalho de Peskin (1972), Roma et al. (1999) reformulou esse modelo introduzindo malhas adaptativas e usando uma nova função de interpolação.

Um novo método de fronteira imersa para simular escoamentos em torno de geometrias complexas foi desenvolvido por Kim et al. (2001). Esse método é baseado em uma abordagem em volumes finitos com uma malha estacionária e utiliza-se o método do passo fracionado para o acoplamento pressão-velocidade. Além disso, acrescenta-se um termo fonte de massa e um termo fonte de força para garantir a condição de não deslizamento sobre a interface e ao mesmo tempo satisfazer a equação da continuidade nas malhas que contêm a interface.

O método de fronteira imersa utilizado no presente trabalho foi proposto por Wang et al. (2008). Nesta metodologia interpolam-se as propriedades do fluido nos pontos lagrangeanos, calcula-se a força nestes pontos, a qual é distribuída nos pontos eulerianos. Esta metodologia é de multi-forçagem que permite atingir menores erros se comparados com outras metodologias de fronteira imersa. Ela permite melhor controle da norma  $L_2$  para a condição de contorno de não deslizamento na fronteira fluido-sólido. Além disso, em comparação com outros métodos de imposição direta de condições de contorno este método permite modelar escoamentos com geometrias complexas, móveis e deformáveis usando malha cartesiana.

## 2 METODOLOGIA

Escoamentos externos são importantes em engenharia devido às muitas aplicações existentes: escoamento de um fluido em torno de automóveis, pontes, pás de turbinas, aviões, submari-

nos e prédios. Pretende-se com este trabalho, apresentar um estudo numérico e computacional de efeitos tridimensionais sobre o escoamento monofásico incompressível ao redor de uma esfera estacionária, imersa em um fluido, a números de Reynolds moderados.

## 2.1 Modelo Físico

O domínio do problema, em metros, é um paralelepípedo definido por  $[0, 1.024] \times [0, 0.512] \times [0, 0.512]$ , como foi ilustrado na Fig. 1. Considera-se uma esfera dentro deste domínio com centro em  $(0.36, 0.256, 0.256)$  e diâmetro de  $0.04\text{m}$ .

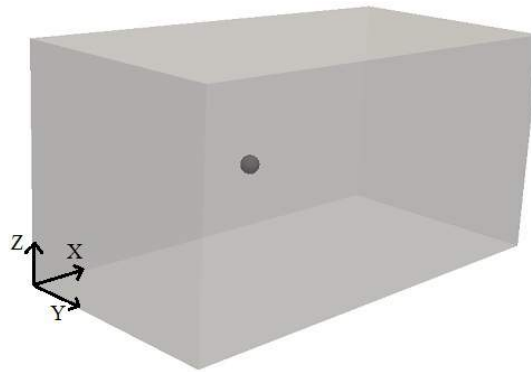


Figura 1: Ilustração do domínio do problema.

A escolha dessa geometria é devida à disponibilidade de resultados numéricos e experimentais na literatura para comparação e também a facilidade de se obter uma malha em elementos triangulares que a representasse como na Fig. 2.

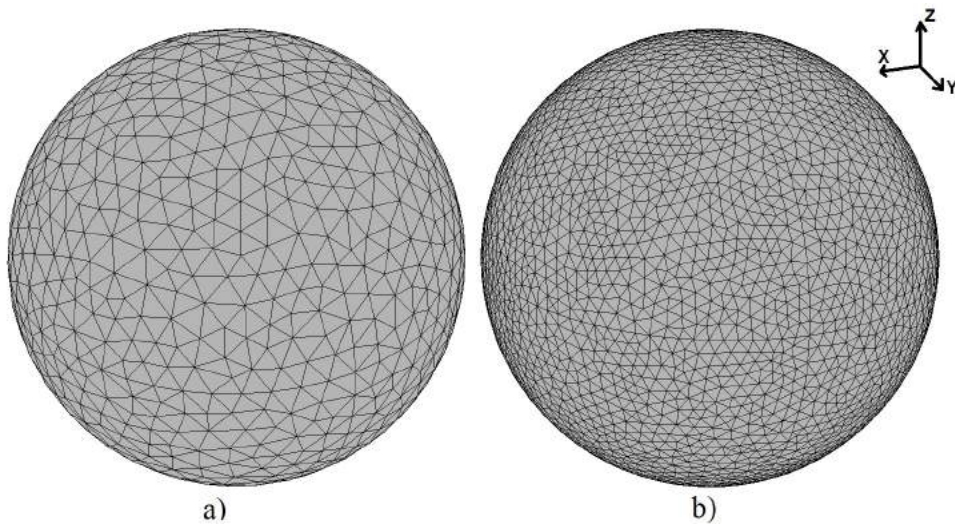


Figura 2: Ilustração da malha em elementos triangulares empregada na construção da esfera: a) 5 níveis físicos e b) 6 níveis físicos.

O escoamento pode ser caracterizado dinamicamente pelo número de Reynolds, que pode ser calculado com a Eq. (1).

$$Re = \frac{uD\rho}{\mu} \quad (1)$$

sendo que  $u$  é a velocidade média do fluido na entrada do domínio,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $D$  é o comprimento característico do escoamento que, neste caso, é o diâmetro da esfera. Para efeito do cálculo do número de Reynolds, adotaram-se os valores:  $u = 1 \text{ m/s}$ ,  $D = 0.04 \text{ m}$  e  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$  que dependendo do valor de  $\mu$  obtém-se os valores do número de Reynolds descritos na Tab. 1.

**Tabela 1: Número de Reynolds para cada valor da viscosidade dinâmica.**

| $\mu$   | $Re$ |
|---------|------|
| 0.0004  | 100  |
| 0.0002  | 200  |
| 0.0001  | 400  |
| 0.00008 | 500  |
| 0.00005 | 800  |

O número de Reynolds pode ser interpretado como a razão entre os efeitos inerciais não lineares e os efeitos lineares viscosos, como pode ser visto na Eq. (2).

$$Re = \frac{\text{Efeitos de inércia não lineares}}{\text{Efeitos viscosos}}. \quad (2)$$

Com números de Reynolds grandes, as forças inerciais, são grandes com relação às forças viscosas e, portanto, as forças viscosas não podem inibir as instabilidades aleatórias e rápidas do fluido. Com número de Reynolds pequenos ou moderados, porém, as forças viscosas são suficientemente grandes para inibir a formação dessas instabilidades e manter o escoamento estável. Assim, o escoamento é turbulento no primeiro caso e laminar no segundo. Além disso, o número de Reynolds também tem relação com número de graus de liberdade (NGL) presente no escoamento. De acordo com a teoria de Kolmogorov (1941):

$$NGL \sim Re_D^{\frac{9}{4}}, \quad (3)$$

sendo  $NGL$  o número de graus de liberdade por unidade de volume  $D^3$ . No caso em estudo,  $NGL_1 \approx 1.18 \times 10^6 D^{-3}$  e  $NGL_2 \approx 3.40 \times 10^6 D^{-3}$  para  $\mu = 0.00008 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$  e  $\mu = 0.00005 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ , respectivamente.

## 2.2 Modelo matemático diferencial

As equações diferenciais parciais que modelam o problema junto com as condições de contorno e condições iniciais compõem o modelo matemático diferencial. Considera-se, no presente trabalho um escoamento incompressível de fluido newtoniano e isotérmico. Dessa forma, a Eq. (4) é a equação do balanço de massa simplificada para o caso de escoamento incompressível em coordenadas cartesianas, utilizando-se a notação indicial:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

sendo  $x_j$  as direções coordenadas e  $u_j$  é a componente da velocidade do fluido na direção  $j$ . A Equação (5) representa o balanço da quantidade de movimento linear para fluido newtoniano escrita na forma divergente, simplificada para o caso de massa específica constante e escrita em coordenadas cartesianas, em notação indicial:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (5)$$

sendo  $i$  e  $j = 1, 2, 3$ ,  $P$  é a pressão e  $t$  a variável temporal.

As Equações (4) e (5) são suficientes para simular a dinâmica do fluido em estudo. No entanto, para utilizar essas equações é preciso que se resolvam todos os graus de liberdade do escoamento. Isso é inviável, visto que, pela Eq. (3), estimam-se que existem aproximadamente  $1.18 \times 10^6 D^{-3}$  e  $3.40 \times 10^6 D^{-3}$  graus de liberdade presentes em cada unidade de volume  $D^3$  para os casos com viscosidade dinâmica de  $\mu = 0.00008 \frac{kg}{m \cdot s}$  e  $\mu = 0.00005 \frac{kg}{m \cdot s}$ , respectivamente. O domínio do fluido estudado tem volume de aproximadamente  $4194 D^3$ . Portanto, seria necessário resolver  $4.9489 \times 10^9$  a  $1.4260 \times 10^{10}$  equações simultâneas, o que é muito caro atualmente. Portanto, é necessário o uso da metodologia da simulação de grandes escalas. Nessa metodologia são resolvidas as grandes escalas e a interação entre as grandes e pequenas escalas é modelada. No presente trabalho será utilizada a modelagem submalha descrita em Germano et al. (1991). Para se utilizar essa metodologia é necessário que se filtre as Eqs. (4) e (5) duas vezes, obtendo-se as equações de transporte das velocidades filtradas, que correspondem às grandes escalas que são resolvidas. Aplicando-se o primeiro filtro  $\bar{G}$  de comprimento característico  $\bar{\Delta}$  nas Eqs. (4) e (5) obtém-se as Eqs. (6) e (7):

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (7)$$

sendo que a barra superior representa o operador filtragem com um filtro  $\bar{G}$ . Definindo-se  $\tau_{ij}$  como o tensor de Reynolds submalha que pode ser escrito como:

$$\tau_{ij} = -(\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j), \quad (8)$$

pode-se reescrever a Eq. (7) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \right]. \quad (9)$$

A Equação (8) modela a interação entre as escalas resolvidas e as não-resolvidas e depende da expressão  $\bar{u}_i \bar{u}_j$ , que não é resolvida nas Eqs. (6) e (9). O segundo filtro  $\hat{G}$  de comprimento característico  $\hat{\Delta} > \bar{\Delta}$  deve ser aplicado à Eq. (7), obtendo-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (10)$$

De forma semelhantemente à Eq. (8), define-se o tensor das tensões relativas ao segundo filtro, também denominado tensor sub-teste:

$$T_{ij} = - \left( \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} \right), \quad (11)$$

de tal forma que a Eq. (10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \widehat{\overline{u_i}}}{\partial t} + \frac{\partial \left( \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} \right)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \widehat{\overline{P}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \widehat{\overline{u_i}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{\overline{u_j}}}{\partial x_i} \right) + T_{ij} \right]. \quad (12)$$

Aplicando-se o filtro  $\widehat{G}$  à Eq. (9), obtém-se:

$$\frac{\partial \widehat{\overline{u_i}}}{\partial t} + \frac{\partial \left( \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} \right)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{\overline{P}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \widehat{\overline{u_i}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{\overline{u_j}}}{\partial x_i} \right) + \widehat{\tau_{ij}} \right]. \quad (13)$$

Subtraindo-se a Eq. (13) da Eq. (12), pode-se definir o tensor de Leonard da seguinte forma:

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} = T_{ij} - \widehat{\tau_{ij}}. \quad (14)$$

De acordo com Lesieur (2008) a forma mais simples de se modelar o tensor de Reynolds submalha (Eq. (8)) é fazer a suposição da viscosidade turbulenta proposta por Boussinesq, de tal forma que a parte deviatória do tensor possa ser modelada em função de uma viscosidade turbulenta e do tensor taxa de deformação filtrado (utilizando o filtro  $\widehat{G}$ ), como mostra a Eq. (15):

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = 2 \nu_t \overline{S_{ij}}, \quad (15)$$

sendo que  $\nu_t$  é a viscosidade cinemática turbulenta,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\overline{S_{ij}}$  é o tensor taxa e deformação escrito em função das velocidades filtradas, como mostra a Eq. (16):

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right). \quad (16)$$

A viscosidade turbulenta pode ser modelada com a Eq. (17):

$$\nu_t = c(\vec{x}, t) \overline{\Delta}^2 |\overline{S}|, \quad (17)$$

sendo que  $|\overline{S}| = \sqrt{2 \overline{S} \overline{S}}$ . Portanto, é possível reescrever a Eq. (15) da seguinte forma:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} = 2c(\vec{x}, t) \overline{\Delta}^2 |\overline{S}| \overline{S_{ij}}, \quad (18)$$

De forma análoga ao deviatório do tensor de Reynolds submalha, é possível modelar o deviatório do tensor sub-teste (Eq. (11)) da seguinte forma:

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = 2c(\vec{x}, t) \widehat{\overline{\Delta}}^2 \left| \widehat{\overline{S}} \right| \widehat{\overline{S_{ij}}}, \quad (19)$$

Filtrando-se a Eq. (18) com o filtro  $\widehat{G}$ , tem-se:

$$\widehat{\tau_{ij}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \widehat{\tau_{kk}} = +2c(\vec{x}, t) \overline{\Delta^2} \left| \overline{S} \right| \overline{S_{ij}}, \quad (20)$$

A partir das Eqs. (14), (15), (19) e (18) e de manipulações tensoriais, obtém-se a equação:

$$c(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}, \quad (21)$$

sendo que :

$$M_{ij} = \widehat{\Delta^2} \left| \widehat{S} \right| \widehat{S_{ij}} - \overline{\Delta^2} \left| \overline{S} \right| \overline{S_{ij}}. \quad (22)$$

Portanto, substituindo a Eq. (15) e a Eq. (16) na Eq. (7), obtém-se:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i} \overline{u_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial \delta_{ij} \tau_{kk}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right], \quad (23)$$

O traço do tensor submalha pode ser incorporado à pressão, da seguinte forma:

$$\overline{p} = \overline{P} + \frac{1}{3} \rho_f \delta_{ij} \tau_{kk}, \quad (24)$$

sendo que  $\overline{p}$  é a pressão modificada. Substituindo a Eq. (24) na Eq. (23), obtém-se a Eq. (25):

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_i} \overline{u_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right], \quad (25)$$

sendo que  $\nu_{ef}$  é a viscosidade cinemática efetiva calculada como a soma da viscosidade cinemática molecular com a viscosidade cinemática turbulenta. Como já foi dito, a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  é obtida utilizando-se a Eq. (17) obtida a partir do modelo de Germano.

Portanto, a Eq. (25) é a equação que será resolvida numericamente. O modo como essa equação foi discretizada é discutido na seção 2.3.

### Condições de contorno e iniciais

Para finalizar o modelo matemático diferencial falta definir as condições de contorno e iniciais. As condições iniciais estão definidas na Tab. 2.

**Tabela 2: Condições iniciais para o fluido.**

|                    | Velocidades |         |         | Pressão |
|--------------------|-------------|---------|---------|---------|
|                    | u           | v       | w       |         |
| Condições iniciais | 1.0 m/s     | 0.0 m/s | 0.0 m/s | 0 Pa    |

O escoamento foi definido na direção  $x$ . No plano de entrada a componente da velocidade na direção  $x$  tem valor unitário e as demais componentes são nulas e na saída temos condição advectiva para a velocidade. Todas as demais faces tem condição de Neumann homogênea para a velocidade. Para a pressão, foi definida condição de Neumann homogênea para a entrada e para a saída e em todas as demais faces foi definida condição de Dirichlet com valor nulo.

## 2.3 Modelo matemático numérico

Nessa seção serão discutidos os métodos de discretização das equações para o escoamento e outros métodos que possibilitam a sua solução. Renomeando os termos das equações de Navier-Stokes filtradas (Eq. (25)) obtém-se a Equação (26):

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}}_{\text{Taxa de variação de quantidade de movimento linear contida em uma partícula de fluido}} + \underbrace{\frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j}}_{\text{Fluxo líquido advectivo de quantidade de movimento linear pela superfície da partícula de fluido}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{\text{Fonte de quantidade de movimento linear devida ao gradiente de pressão}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]}_{\text{Fluxo líquido difusivo de quantidade de movimento linear pela superfície da partícula de fluido}} \quad (26)$$

### Discretização do termo temporal

A discretização do termo temporal foi feita com o método SBDF com passo de tempo variável descrito em detalhes por Wang (2008) e Vedovoto (2011). No presente método, a discretização é semi-implícita, sendo o termo difusivo tratado implicitamente e o termo advectivo tratado explicitamente. A Equação (27) mostra a Eq. (26) discretizada no tempo com o método SBDF:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left[ \frac{1 + 2w_{n+1}}{1 + w_{n+1}} \bar{u}_i^{n+1} - (1 + w_{n+1}) \bar{u}_i^n + \frac{w_{n+1}^2}{1 + w_{n+1}} \bar{u}_i^{n-1} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial x_i} + (1 + \omega_{n+1}) g(\bar{u}_i^n) - \omega_{n+1} g(\bar{u}_i^{n-1}) + f(\bar{u}_i^{n+1}), \quad (27)$$

sendo que  $\omega_{i+1} = \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}$ ,  $\Delta t_n$  é o passo de tempo avaliado no tempo  $n$ , a função  $f$  se refere ao termo difusivo discretizado e a função  $g$  se refere ao termo advectivo discretizado.

Os passos de tempo são calculados com base em restrições associadas aos termos advectivos e difusivos. As Equações (28) a (31) apresentam essas restrições e o cálculo do passo de tempo. Constantes são utilizadas para controlar as restrições e devem ser ajustadas entre 0 e 1 para que se obtenha estabilidade numérica nos diferentes casos simulados.

$$\Delta t_1 = \min(t_f - t, h) \quad (28)$$

$$\Delta t_{adv} = C_{adv} \left( \frac{|u|_{max}}{\Delta x} + \frac{|v|_{max}}{\Delta y} + \frac{|w|_{max}}{\Delta z} \right)^{-1} \quad (29)$$

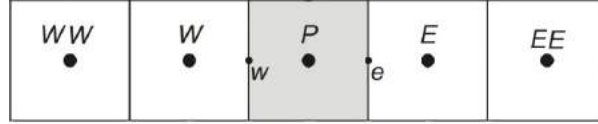
$$\Delta t_{dif} = C_{dif} \min \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2} + \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (30)$$

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_{adv}, \Delta t_{dif}) \quad (31)$$

onde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  denotam, respectivamente, o tamanho das células de discretização nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  no nível mais fino,  $|u|_{max}$ ,  $|v|_{max}$  e  $|w|_{max}$  são o máximo valor absoluto da velocidade nas três direções coordenadas,  $t_f$  é o tempo final de simulação,  $h$  é o espaçamento mínimo definido no nível  $l_{top}$  e  $t$  é o tempo corrente.

### Discretização do termo advectivo

A discretização do termo advectivo foi feita através do método *Barton* (Centrella (1984)). Este método é uma versão mais simples e mais robusta do método de monotonicidade originalmente concebido por Van Leer (1977).



**Figura 3: Malha unidimensional.**

Trata-se de um método monotônico de transporte, onde o valor de  $u_w^n$  é dado pelas Eqs. (32) e (33):

$$u_P \geq 0 : u_w^n = \begin{cases} \min [u_W^n, \max (\tilde{u}_P^n, \bar{u}_P^n)] , u_P^n \leq u_W^n \\ \max [u_W^n, \min (\tilde{u}_P^n, \bar{u}_P^n)] , u_P^n > u_W^n \end{cases} \quad (32)$$

$$u_P < 0 : u_w^n = \begin{cases} \max [u_P^n, \min (\tilde{u}_P^n, \bar{u}_P^n)] , u_P^n \leq u_W^n \\ \min [u_P^n, \max (\tilde{u}_P^n, \bar{u}_P^n)] , u_P^n > u_W^n \end{cases} \quad (33)$$

com  $\bar{u}_P^n = (u_P^n + u_W^n) / 2$  e  $\tilde{u}_P^n$  é dado pela Eq. (34):

$$\tilde{u}_P^n = \begin{cases} (3/2)u_W - (1/2)u_{WW}, u_P > 0 \\ (3/2)u_P - (1/2)u_E, u_P < 0 \end{cases} \quad (34)$$

E o valor de  $u_e^n$  é dado pelas Eqs. (35) e (36):

$$u_P \geq 0 : u_e^n = \begin{cases} \min [u_P^n, \max (\tilde{u}_{PP}^n, \bar{u}_{PP}^n)] , u_E^n \leq u_P^n \\ \max [u_P^n, \min (\tilde{u}_{PP}^n, \bar{u}_{PP}^n)] , u_E^n > u_P^n \end{cases} \quad (35)$$

$$u_P < 0 : u_e^n = \begin{cases} \max [u_E^n, \min (\tilde{u}_{PP}^n, \bar{u}_{PP}^n)] , u_P^n \leq u_W^n \\ \min [u_E^n, \max (\tilde{u}_{PP}^n, \bar{u}_{PP}^n)] , u_P^n > u_W^n \end{cases} \quad (36)$$

com  $\bar{u}_{PP}^n = (u_P^n + u_E^n) / 2$  e  $\tilde{u}_{PP}^n$  é dado pela Eq. (37):

$$\tilde{u}_{PP}^n = \begin{cases} (3/2)u_P - (1/2)u_W, u_P > 0 \\ (3/2)u_E - (1/2)u_{EE}, u_P < 0 \end{cases} \quad (37)$$

O cálculo para as outras componentes é análogo ao que foi feito para a componente  $u$  da velocidade.

### Discretização do termo difusivo

O termo difusivo é discretizado usando o método das diferenças centradas (*Central Difference Scheme CDS* - Peric (2002)) da seguinte forma para uma malha estruturada cartesiana:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_E - 2u_P + u_W}{\Delta x^2}, \quad (38)$$

sendo que  $u_E$  é a velocidade  $u$  avaliada na célula leste em relação à célula  $P$ ,  $u_W$  é a velocidade  $u$  avaliada na célula oeste em relação à célula  $P$ ,  $u_P$  é a velocidade  $u$  avaliada na célula  $P$  e  $\Delta x$  é o passo espacial. As outras derivadas parciais de segunda ordem nas outras direções e para as outras variáveis de interesse podem ser obtidas de forma semelhante à forma na Eq. (38). Esse método é um método de segunda ordem, de tal forma que o erro obtido é  $\mathcal{O}(\Delta x)^2$ .

### Acoplamento pressão-velocidade

No presente trabalho foi utilizado o método do passo fracionado (também chamado de método da projeção) proposto por Chorin (1967) em uma malha cartesiana e deslocada. Portanto a Eq. (27) deve ser reescrita com a pressão avaliada no tempo  $n$  da seguinte forma:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left[ \frac{1 + 2w_{n+1}}{1 + w_{n+1}} \bar{u}_i^{*n+1} - (1 + w_{n+1}) \bar{u}_i^n + \frac{w_{n+1}^2}{1 + w_{n+1}} \bar{u}_i^{n-1} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial x_i} + (1 + \omega_{n+1}) f(\bar{u}_i^n) - \omega_{n+1} f(\bar{u}_i^{n-1}) + g(\bar{u}_i^{n+1}), \quad (39)$$

sendo que  $\bar{u}_i^{*n+1}$  é a velocidade estimada do fluido. Essa velocidade não obedece necessariamente à equação da continuidade (Eq. (6)). Subtraindo a Eq. (27) da Eq. (39) tem-se:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left( \bar{u}_i^{*n+1} - \bar{u}_i^{n+1} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^{n+1} - \bar{p}^n}{\partial x_i}, \quad (40)$$

sendo que  $\bar{p}^{n+1} - \bar{p}^n$  é chamado de correção de pressão e será denotado com a letra  $Q$ . Aplicando-se o divergente à Eq. (40), tem-se:

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left( \frac{\partial \bar{u}_i^{*n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (41)$$

Nesse caso, o campo vetorial  $\bar{u}_i^{n+1}$  deve obedecer à Eq. (6), portanto a Eq. (41) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left( \frac{\partial \bar{u}_i^{*n+1}}{\partial x_i} \right). \quad (42)$$

Essa equação é chamada de equação de Poisson. Como o campo de velocidades  $\bar{u}_i^{*n+1}$  é conhecido, resolvendo-se a Eq. (39), a única incógnita da Eq. (42) é a variável  $Q$ . As derivadas da Eq. (42) são discretizadas com o método das diferenças centradas em uma malha estruturada cartesiana deslocada.

### Método da fronteira imersa

Para levar em consideração a presença da fronteira imersa, é preciso que se adicione um termo fonte  $f_i [N m^{-3}]$  à Eq. (26) da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_{ef} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{f_i}{\rho}, \quad (43)$$

onde:

$$f_i(\vec{x}) = \int_{\Omega} (F_k)_i(\vec{x}_k) \delta(\vec{x} - \vec{x}_k) d\vec{x}_k, \quad (44)$$

sendo que  $\delta(\vec{x} - \vec{x}_k)$  é a função delta de Dirac,  $\vec{x}_k$  é a posição do ponto lagrangeano e  $\vec{x}$  é a posição do ponto euleriano em análise. O termo  $(F_k)_i$  pode ser obtido da seguinte forma:

$$(F_k)_i = \frac{\alpha_2^{n+1} \rho (\bar{U}_i^{**} - U_i)}{\Delta t_{n+1}} \quad (45)$$

sendo que  $\alpha_2^{n+1} = \frac{1 + 2w_{n+1}}{1 + w_{n+1}}$ ,  $U_i$  é a velocidade do ponto lagrangeano  $k$  e  $\bar{U}_i^{**}$  é a velocidade estimada avaliada no mesmo ponto lagrangeano. A Equação (27) deve ser reescrita para levar em conta o termo fonte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t_{n+1}} \left[ \frac{1 + 2w_{n+1}}{1 + w_{n+1}} \bar{u}_i^{n+1} - (1 + w_{n+1}) \bar{u}_i^n + \frac{w_{n+1}^2}{1 + w_{n+1}} \bar{u}_i^{n-1} \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial x_i} + \\ (1 + \omega_{n+1}) f(\bar{u}_i^n) - \omega_{n+1} f(\bar{u}_i^{n-1}) + g(\bar{u}_i^{n+1}) + \frac{f_i}{\rho} &= RHS + \frac{f_i}{\rho} \end{aligned} \quad (46)$$

### Refinamento Local Adaptativo

As equações diferenciais parciais são suaves em grande parte do domínio, exceto em camadas limite e em regiões internas isoladas que apresentam elevados gradientes, choques ou descontinuidades. Nesses locais a solução é geralmente difícil de ser obtida e o refinamento local adaptativo se apresenta como uma alternativa eficiente e robusta capaz de captar fenômenos locais sem elevado custo computacional. Dinamicamente, malhas mais finas são então aplicadas na região de interesse, tendo como base uma malha grossa que cobre todo o domínio. Assim, a solução em cada malha pode então ser aproximada por diferenças finitas como feita na malha uniforme. Por se tratar de equações dependentes do tempo, as regiões de interesse variam com o tempo. Desta forma, as malhas precisam se adaptar ao longo do tempo à região de interesse. Para mais detalhes veja Villar (2007). No método adaptativo a malha lagrangiana é livre para se mover pelo domínio físico, não sendo necessário coincidir com a malha euleriana. Em contraste, é necessário que a malha adaptativa envolva completamente a interface.

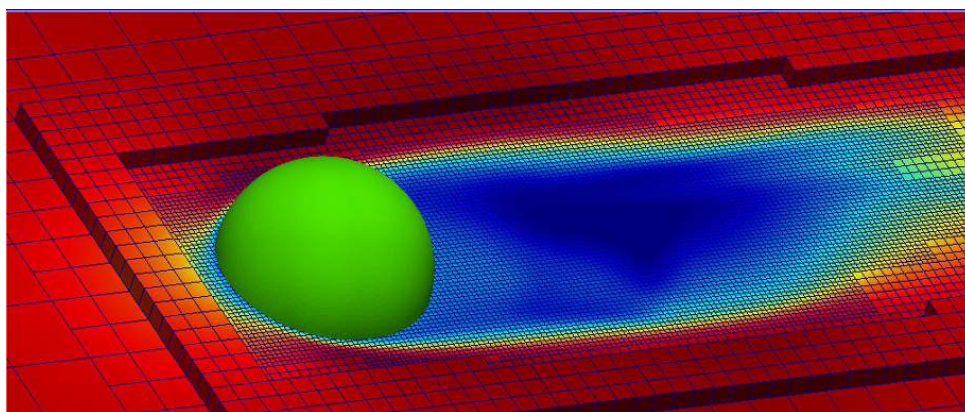
Desenvolvida inicialmente por Berger (1984), a metodologia de malhas bloco-estruturadas refinadas localmente permite obter a solução de equações diferenciais parciais substituindo-se a discretização do domínio físico em malha cartesiana uniforme por uma hierarquia de malhas devidamente agrupadas com espaçamentos sucessivamente mais finos. Esta sequência hierárquica de malhas forma níveis de refinamento sucessivamente refinados que vão de  $l = l_{base} + 1, \dots, l_{top}$ , onde  $l_{top}$  define o nível mais fino. No presente trabalho a razão entre os espaçamentos de malhas entre dois níveis sucessivos de refinamento, denominada razão de refinamento, é igual a 2. Utiliza-se como critério de refinamento o gradiente da variável de interesse, que nesse caso, é a vorticidade. Os interpolantes entre os níveis são de ordens quadráticas e cúbicas de forma a garantir que a segunda ordem seja mantida durante o processo de simulação.

As células fantasmas permitem armazenar os valores para as condições de contorno de cada bloco, de forma a evitar que os operadores diferenciais sejam redefinidos nas suas bordas. Dessa

forma, é necessário tomar cuidado no processo de comunicação entre as malhas compostas, ou seja, no cálculo dessas células fantasmas. Os valores definidos nestas células são obtidos por meio de interpolações. As células adjacentes ao nível base são determinadas apenas pelo cálculo das condições reais de contorno.

### 3 RESULTADOS

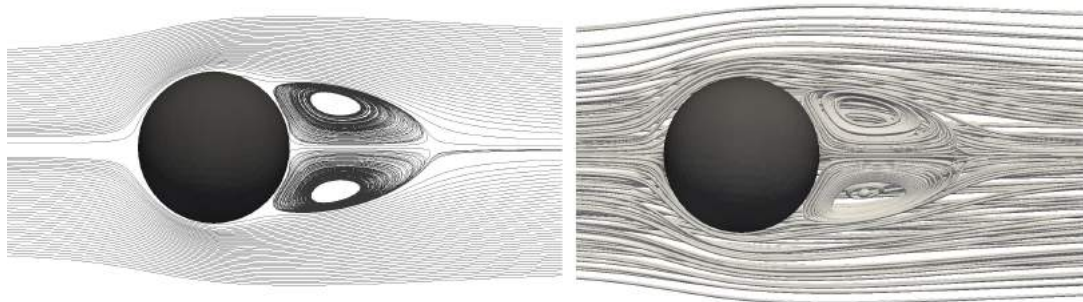
O domínio na direção  $x$  (direção principal do escoamento),  $y$  e  $z$  tem 1.024 m, 0.512 m e 0.512 m, respectivamente. A malha base euleriana definida neste problema é  $32 \times 16 \times 16$ . A Figura 4 exemplifica o tipo de domínio com blocos de refinamento.



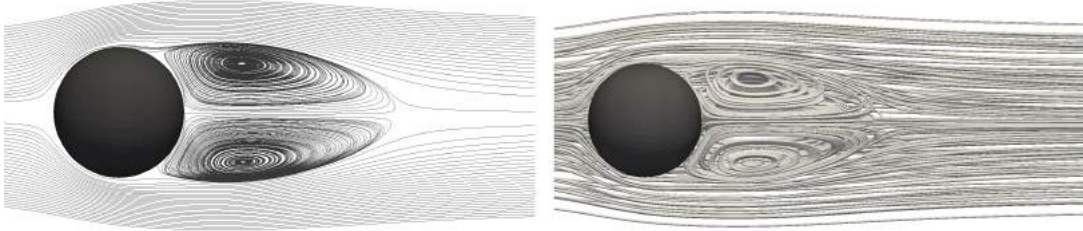
**Figura 4: Ilustração do domínio computacional em um determinado tempo.**

Para Reynolds 100, 200 foram definidos 5 níveis físicos de refinamento e para Reynolds 400, 500 e 800 foram definidos 6 níveis. Para a malha empregada na construção da esfera de diâmetro  $D = 0.04$  m e centro em  $(0.36, 0.256, 0.256)$  foram utilizados 1756 elementos triangulares para a malha composta com 5 níveis físicos e 6952 elementos triangulares para a malha composta com 6 níveis físicos. As condições de contorno e iniciais estão descritas na seção 2.2.

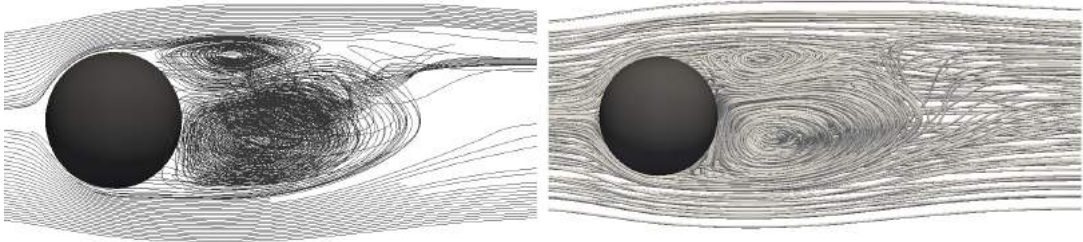
As linhas de corrente no plano  $xy$  para Reynolds 100, 200, 400, 500 e 800 estão representadas à esquerda nas Figs. 5 a 10 e à direita tem-se a representação das linhas de corrente em 3D. Observa-se o desvio das linhas de corrente e a formação de recirculações à jusante da esfera. À medida que o número de Reynolds aumenta ocorre a transição do escoamento para um regime instável.



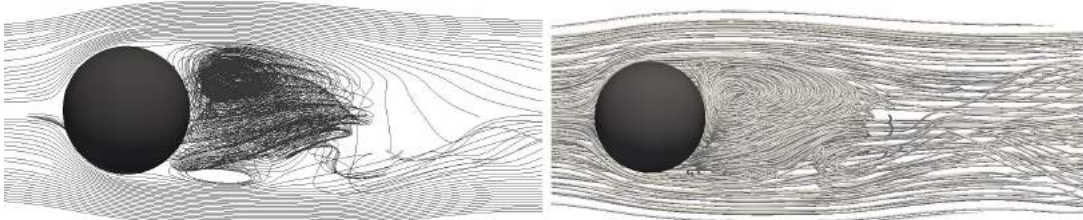
**Figura 5: Linhas de corrente para Reynolds 100.**



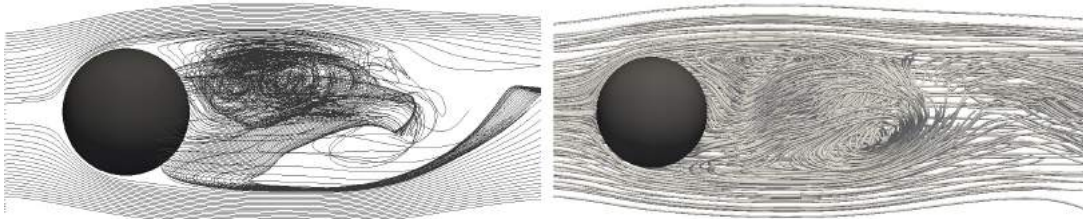
**Figura 6: Linhas de corrente para Reynolds 200.**



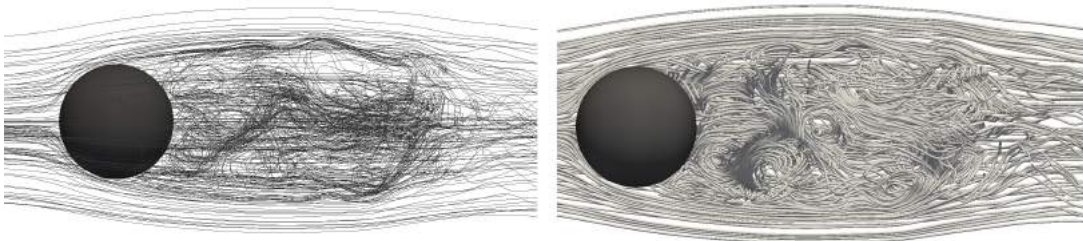
**Figura 7: Linhas de corrente para Reynolds 400.**



**Figura 8: Linhas de corrente para Reynolds 500.**

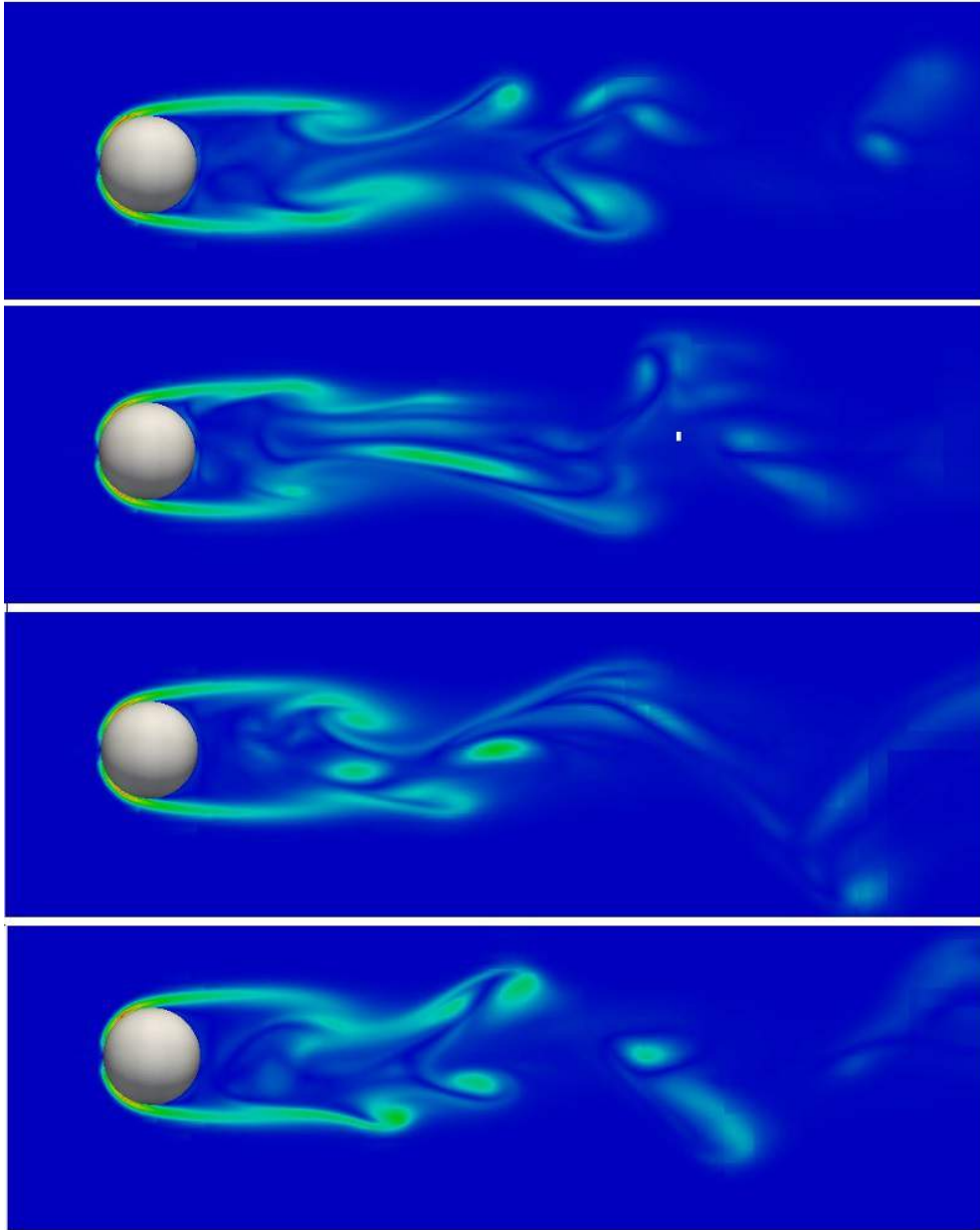


**Figura 9: Linhas de corrente para Reynolds 800.**



**Figura 10: Linhas de corrente para Reynolds 10000.**

Na Figura 11 mostra-se a sequência de vorticidade para  $Re = 800$ . Pode-se observar que para este Reynolds existem instabilidades atrás da esfera que se ampliam à medida que o escoamento se desenvolve.



**Figura 11: Sequência temporal do campo de vorticidade para  $Re = 800$ .**

O coeficiente de arrasto é definido como:

$$C_D = \frac{F_x}{\left(\frac{1}{2}\right) \rho U_\infty^2 \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}$$

sendo  $F_x$  a força de arrasto, agindo sobre o corpo imerso (no caso, a esfera) na direção do escoamento,  $U_\infty$  é a velocidade da corrente livre,  $\rho$  é a massa específica e  $D$  é o diâmetro da esfera.

Algumas correlações matemáticas apresentam resultados para o coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds (Subramanian, 2003). Para escoamentos sobre esferas essas correlações estão apresentadas na Tab. 3.

**Tabela 3: Correlações para o coeficiente de arrasto para uma faixa de números de Reynolds.**

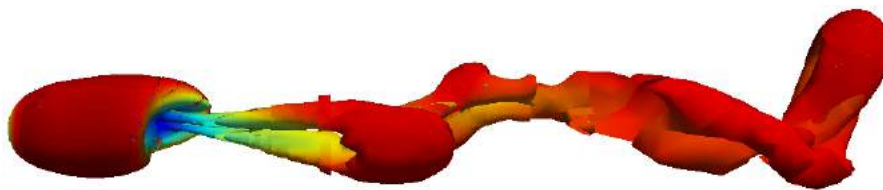
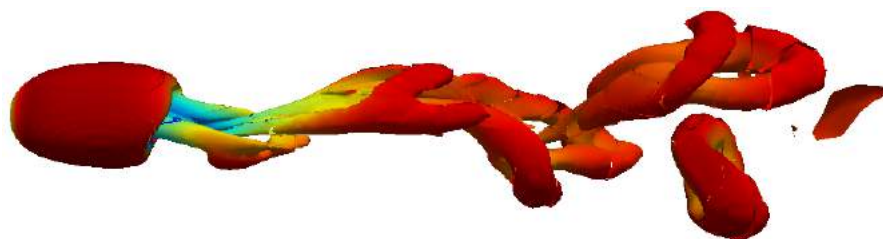
| Número de Reynolds                 | Coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds      |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $Re \leq 0.01$                     | $C_D = 9/2 + 24/Re$                                         |
| $0.01 < Re \leq 20$                | $C_D = 24/Re [1 + 0.1315Re^{0.82-0.05\log_{10}Re}]$         |
| $20 \leq Re \leq 260$              | $C_D = 24/Re [1 + 0.1935Re^{0.6305}]$                       |
| $260 \leq Re \leq 1.5 \times 10^3$ | $C_D = 10^{1.6435-1.1242\log_{10}Re+0.1558(\log_{10}Re)^2}$ |

Os resultados do coeficiente de arrasto para Reynolds 100, 200, 400, 500 e 800 estão na Tab. 4. Nota-se uma boa concordância entre os resultados obtidos e as correlações existentes na literatura.

**Tabela 4: Correlações para o coeficiente de arrasto para uma faixa de números de Reynolds.**

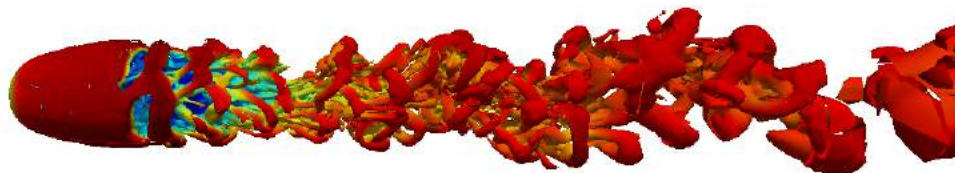
| Reynolds | Correlação | Presente Trabalho |
|----------|------------|-------------------|
| 100      | 1.0870     | 1.0851            |
| 200      | 0.7756     | 0.7758            |
| 400      | 0.5931     | 0.5956            |
| 500      | 0.5549     | 0.5631            |
| 800      | 0.4931     | 0.5140            |

As Figuras 12 a 15 mostram o critério  $Q = 0.9$  para Reynolds 400, 500, 800 e 10000. Observa-se a presença de instabilidades conhecidas como grampo de cabelo. Estas instabilidades são filamentos turbilhonares contrarrotativos que se erguem a jusante da esfera.

**Figura 12: Iso-valor do critério  $Q = 0.9$  para Reynolds 400.****Figura 13: Iso-valor do critério  $Q = 0.9$  para Reynolds 500.**



**Figura 14: Iso-valor do critério  $Q = 0.9$  para Reynolds 800.**



**Figura 15: Iso-valor do critério  $Q = 0.9$  para Reynolds 10000.**

## 4 CONCLUSÕES

As metodologias numérica e computacional utilizadas se mostraram eficientes e robustas para recuperar com exatidão os dados de experimentos materiais. O nível de refinamento necessário foi obtido graças ao refinamento adaptativo de malha.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG/ARAXÁ) e a Petrobras pelo apoio financeiro, assim como à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC/UFU), à CAPES e ao CNPq pelo suporte oferecido.

## REFERÊNCIAS

- Berger, M. J., & Olinger, J., 1984. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of computational Physics*, vol. 53, n. 3, pp. 484-512.
- Centrella, J., & Wilson, J. R., 1984. Planar numerical cosmology. II. The difference equations and numerical tests. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 54, pp. 229-249.
- Chorin, A. J., 1967. The numerical solution of the navier-stokes equations for an incompressible fluid. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, n. 6, pp. 928-931.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. & Cabot, W. H., 1991. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A*, vol. 3, n. 7, pp. 1760-1765.
- Goldstein, D. and Handler, R. & Sirovich, L., 1995. Direct numerical simulation of turbulent flow over a modeled riblet covered surface. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 302, pp. 333-376.
- Kim, J., Kim, D., & Choi, H., 2001. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, vol. 171, n. 1, pp. 132-150.

- Kolmogorov, A. N., 1941. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 30, pp. 301-305.
- Lesieur, M., 2008. Turbulence in Fluids. In Moreau, R., ed, *Fluid Mechanics and its Applications*, pp. 563. Springer Netherlands.
- Mohd-Yusof, J., 1997. *Combined immersed boundaries/b-splines methods for simulations in complex geometries*, CTR Annual Research Briefs, NASA Ames/Stanford University.
- Peric, M., & Ferziger, J. H., 2002. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Peskin, C. S., 1972. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of computational physics*, vol. 10, n. 2, pp. 252-271.
- Roma, A. M., Peskin, C. S., & Berger, M. J., 1999. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of computational physics*, vol. 153, n. 2, pp. 509-534.
- Vedovoto, J. M., 2011. *Mathematical and numerical modeling of turbulent reactive flows using a hybrid LES / PDF methodology*. Phd thesis, Universidade Federal de Uberlândia e Escola Doutoral da L'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et D'Aérotechnique.
- Villar, M. M., 2007. *Detailed Two-Dimensional Numerical Analysis of Multiphase Flows*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia.
- Wang, D. & Ruuth, S., 2008. Variable step-size implicit-explicit linear multistep methods for time-dependent partial differential equations. *Journal of Computational Mathematics*, vol. 26, pp. 838-855.
- Wang, Z., Fan, J., & Luo, K., 2008. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 34, n. 3, pp. 283-302.