



NUMERICAL STUDY OF CLOSED CAVITY ASPECT RATIO ON NATURAL CONVECTION

Claudio Torres

Rogério Gonçalves dos Santos

clrres@gmail.com

roger7@fem.unicamp.br

Faculty of Mechanical Engineering - UNICAMP

Rua Mendeleev, 200, CEP 13083-860, Cidade Universitária "Zeferino Vaz" Barão Geraldo,
Campinas - São Paulo, Brazil

Abstract. *Natural convection in closed cavities has been studied in CFD in the last four decades. This spontaneous method of heat transfer has an especial interest in thermal sciences, fluid mechanics and a wide range of applications in engineering. In the present work, the aspect ratio in natural convection was numerically analyzed in a rectangular cavity heated on one of the sides and cooled on the opposite side. Temperatures of the different walls were assumed to be constant. The objective of these studies was to determine the effects of the aspect ratio H/L (Height/Length) and the numerical scheme on flow behavior and heat transfer in the cavity. The simulations were running using a code that was developed homemade on C++ language. Solving the dimensional equation of Navier-Stoke, Mass, and Energy balance on steady state, for non-compressible fluid in laminar flow. Implementing a SIMPLE algorithm, to couple the differential equations of velocity and pressure. Adopting the Boussinesq's hypothesis to couple the differential equation of energy balance, that suppose the same density in every point of a regular mail, but using a supposed ratio between the vertical forces and the gradient of temperature. Applicable only on non-compressible fluids. Numerical simulations were done for aspect ratios 0.25, 0.5, 1.0, 2.0 and 4.0 and Rayleigh number 10^3 , 10^4 , 10^5 and 10^6 using the UpWind, Exponential and Central schemes. Results show that the aspect ratio has lower influence in the temperature and streamlines fields than Rayleigh number.*

Keywords: NATURAL CONVECTION, CLOSED CAVITY, ASPECT RATIO

1 INTRODUCTION

La convección natural es un fenómeno físico producido por el transporte de calor en fluidos. Este fenómeno se da en la naturaleza debido a la variación de densidad producida en un fluido por la existencia de un gradiente de temperatura, el cual bajo los efectos del campo gravitacional causa un movimiento en el fluido. La convección natural en cavidades cerradas es uno de los casos más simples, estudiado por varias décadas y se encuentra bien estudiada con una amplia gama de trabajos publicados y libros.

Vahl Davis (1983) publicó el primer conjunto de soluciones numéricas de convección natural que serían referencia para los casos de estado estacionario en cavidades cuadradas, donde las dos paredes verticales son isotérmicas y las dos paredes horizontales son adiabáticas. Gracias a estas soluciones de referencia, muchos estudios numéricos pudieron ser validados. Saitoh y Hirose (1989) publicaron otra solución de referencia, en este caso usando el método de diferencias finitas. Un año más tarde, Hortmann (1990) calculó este problema empleando el método del volumen finito y aprovechando la técnica de múltiples mallas y esquemas de segundo orden para los flujos de convección y difusión. Más recientemente, otros métodos como Lattice Boltzman (2013) o el método de transformación integral se han utilizado para resolver este mismo problema, Pérez-Guerrero (1999). Una revisión exhaustiva de la convección natural se encuentra en Baïri (2014), que también abarca el régimen transitorio, sin embargo, aún está restringido al flujo incompresible.

La mayor parte de las obras relativas a la convección natural admiten la variación de la densidad únicamente como un término fuente en la ecuación de momento a través de la aproximación de Boussinesq, considerando que es constante para las ecuaciones de conservación restantes. Sin embargo, existen muchas aplicaciones que no pueden ser modeladas a través de la aproximación de Boussinesq debido a gradientes de temperatura lo suficientemente altos como para invalidar esta suposición. Para los casos estudiados en este artículo se asume la aproximación de Boussinesq.

Los problemas planteados en este trabajo tienen como objetivo estudiar los efectos de variar la relación de aspecto. Estos efectos son estudiados numéricamente, a través del método de volúmenes finitos, utilizando el algoritmo SIMPLE publicado por Patankar Spalding (1972).

Se plantean casos con relación de aspecto, $AR=0.25$; $AR=0.5$; $AR=1$; $AR=2$ y $AR=4$, estudiados en un esquema completamente implícito.

2 MODELO FÍSICO Y MATEMÁTICO

Para fluidos Newtonianos, las ecuaciones conservativas que gobiernan la convección natural, pueden ser escritas como siguen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u.u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v.u)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u.v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v.v)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + (\rho - \bar{\rho})\vec{g}. \quad (3)$$

$$\frac{\partial(C_p \rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(C_p \rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(C_p \rho v T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right). \quad (4)$$

donde u es la velocidad horizontal, v velocidad vertical, C_p calor específico, T temperatura, ρ la densidad, λ la conductividad térmica, α la difusividad térmica, β coeficiente de expansión térmica, P presión, ν viscosidad cinemática y μ viscosidad dinámica.

Para la aproximación de Boussinesq la densidad se supone constante y la fuente del movimiento es modelada por un término fuente en la ecuación de momento en la dirección vertical. Eso conduce a una formulación incompresible, que desprecia los efectos acústicos. Además, la presión estática media permanece constante en el tiempo. Suponiendo una dependencia lineal de la temperatura, el Boussinesq lineal como es explicado en Armengol (2017).

La aproximación se realiza reemplazando el último término de la ecuación (3) por:

$$(\rho - \bar{\rho})\vec{g} = \rho_0 \vec{g} \beta (T - T_0). \quad (5)$$

Los parámetros de adimensionalización para la escala velocidad es $U^* = \sqrt{g\beta\Delta TL}$. Finalmente el problema en forma adimensional queda en función del número de Rayleigh ($Ra = g\beta\Delta TL^3 / \alpha\nu$) y el número de Prandtl ($Pr = \nu / \alpha$).

2.1 Condiciones de contorno

Las cavidades rectangulares o cuadradas para caso de relación de aspecto 1. Están conformadas por sus paredes verticales isotérmicas donde se asume una temperatura constante y sus dos paredes horizontales, adiabáticas perfectas y la relación de aspecto ($AR=H/L$) definida como la relación entre la altura de la cavidad rectangular y la anchura o largura de la base. Como se muestre en “Fig. 1”

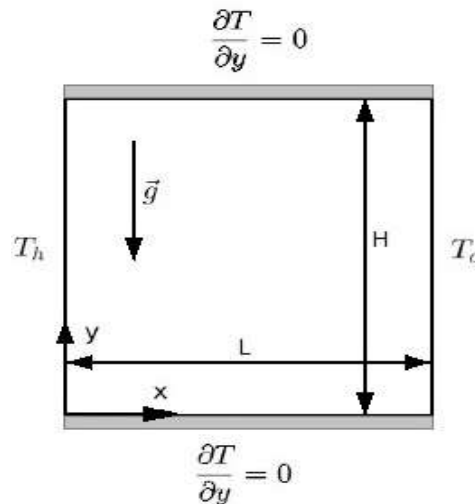


Figura 1. Modelo físico y condiciones de contorno

En la pared izquierda observamos una condición de frontera de primera clase (Dirichlet), en la cual se establece como condición una temperatura constante T_h ($T = T_h$) y una condición de no deslizamiento ($u=v=0$). Es decir, para pared izquierda ($x=0$; $0 < y < H$).

En la pared derecha se observa el mismo tipo de condición de frontera con un isotérmica igual T_c ($T = T_c$). Análogamente ($u=v=0$) en la pared derecha ($x=L$; $0 < y < H$).

En cambio para las paredes horizontales se observa una condición de segundo tipo para la temperatura (Von Neumann) donde el gradiente de temperatura es cero ($\partial T / \partial y = 0$), ya que se suponen las paredes perfectamente adiabáticas, mientras en el campo de velocidad se sigue asumiendo la condición de no deslizamiento ($u=v=0$). Entonces para ambas paredes verticales ($0 < x < L$; $y=H$) y ($0 < x < L$; $y=0$).

3 METODOLOGIA PARA LA SOLUCIÓN NUMERICA

Para resolver las ecuaciones que gobiernan el problema, ha sido escrito un código computacional escrito en lenguaje C++ bidimensional. Las ecuaciones fueron discretizadas en un esquema completamente implícito utilizando el método de volúmenes finitos y un mallado MAC (Patankar et al., 1980). El acople entre las ecuaciones conservativas de masa y momento se llevan a cabo mediante la implementación del algoritmo SIMPLE (Patankar y Spalding et al., 1972). Se utilizan tres diferentes esquemas para hacer una aproximación de los términos de convección, CENTRAL, UPWIND y LEY DE POTENCIA, inicialmente se utiliza el esquema CENTRAL arrojando una serie de resultados base y luego se utilizan los otros dos esquemas, a fin de cuantificar la diferencia de los resultados para cada esquema, mientras que un esquema de diferencia CENTRAL se utiliza para los términos difusivos para todos los casos. Cuando los residuos del balance de masa para cada volumen de control, así como los valores residuales para el resto de las ecuaciones gobernantes, son suficientemente bajos, se dice que se logra una convergencia global. Los valores residuales globales para cada ecuación de transporte se calculan utilizando la media cuadrática y se consideran convergentes cuando se obtienen valores inferiores a 10^{-6} .

El conjunto de ecuaciones algebraicas, resultante de la discretización, se resuelve mediante un método iterativo. Además, se han utilizado parámetros de relajación para minimizar el número de iteraciones requeridas para obtener soluciones convergentes.

Las mallas utilizadas son uniformes, con número de nodos descripto en la “Tabla 1”.

Tabla 1. Cantidad de nodos en malla

Relación de aspecto	Nodos en X	Nodos en Y
0.25	180	45
0.5	180	90
1	180	180
2	180	360
4	180	360

3.1 Verificación del código

La verificación del código se realiza mediante la comparación de resultados simulados con el código y soluciones de referencia de la literatura clásicas para la aproximación de Boussinesq. Para verificar el código numérico utilizado en el presente trabajo, algunos problemas de referencia se reproducen y comparan con los resultados del presente trabajo. En primer lugar, se comparan los resultados de la solución en estado estacionario con propiedades constantes y la aproximación de Boussinesq con algunas soluciones J Xamán (2015).

Un conjunto de comparaciones se realiza bajo la aproximación de Boussinesq con propiedades constantes para el problema de la cavidad cuadrada clásica con paredes verticales calentadas diferencialmente haciendo uso de la “Ec. (5)”. Los resultados para el régimen de estado estacionario para los números de Rayleigh entre 10^3 y 10^6 se comparan con las soluciones de referencia (J Xamán et al., 2015) para $Pr=0.71$. Los resultados comparativos seleccionados son: la velocidad horizontal máxima, u_{Max} , en el plano medio vertical ($x=0.5L$); La velocidad vertical máxima, v_{Max} , en el plano medio horizontal ($y=0.5H$); Y el número máximo, mínimo y medio de Nusselt en la pared caliente, Nu_{max} , Nu_{min} , Nu . La diferencia es bastante razonable con una desviación máxima del 2.85% con respecto a J. Xamán (2015).

4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección inicialmente serán presentados los resultados obtenidos con el esquema CENTRAL, en las distintas relaciones de aspecto y los números de Rayleigh estudiados de manera gráfica. Luego serán realizadas comparaciones de los esquemas numéricos UPWIND y LEY DE POTENCIA respecto al CENTRAL.

4.1 Variación de la relación de aspecto

De modo a comprender mejor el efecto en la variación de la relación de aspecto, se presentan imágenes de los campos de velocidades U y V, el campo de temperatura y las líneas de corriente, para cada número de Rayleigh estudiado, variando la relación de aspecto.

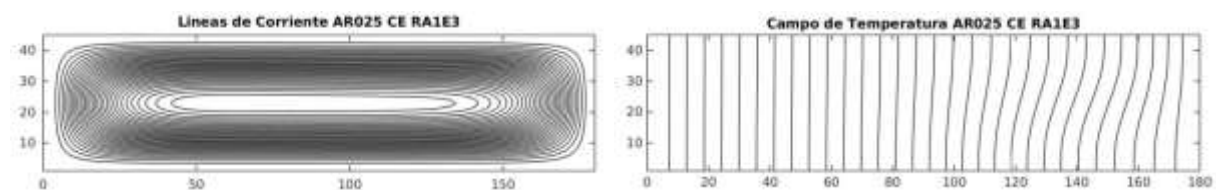


Figura 2. Graficas de relación de aspecto 0.25 para $Ra=10^3$.

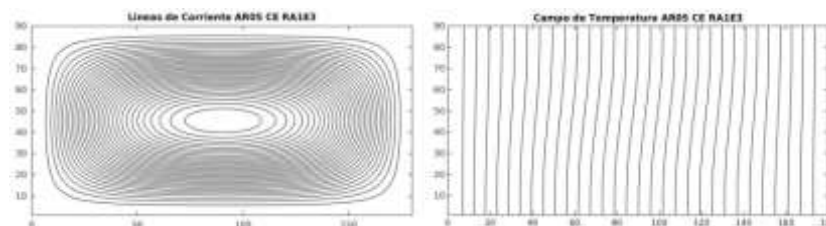


Figura 3. Graficas de relación de aspecto 0.5 para $Ra=10^3$.

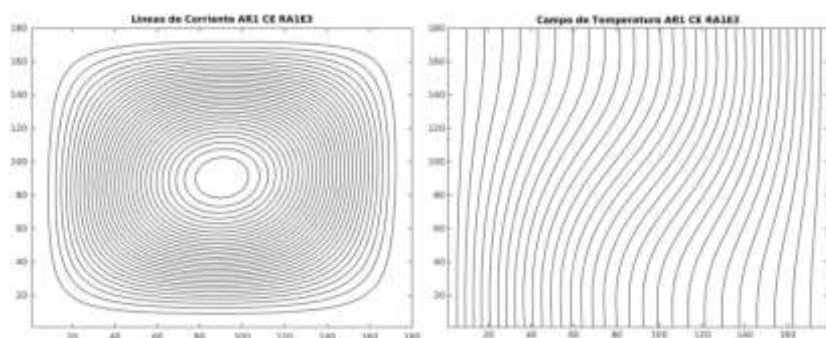


Figura 4. Graficas de relación de aspecto 1 para $Ra=10^3$.

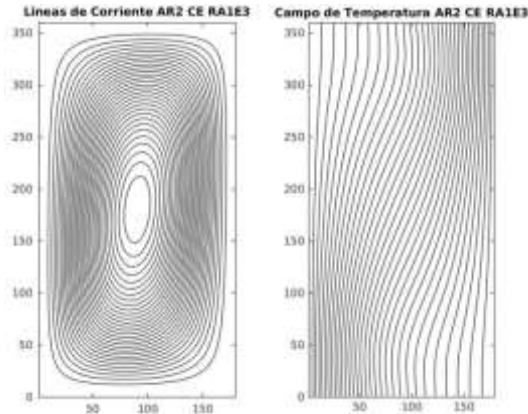


Figura 5. Graficas de relación de aspecto 2 para $Ra=10^3$.

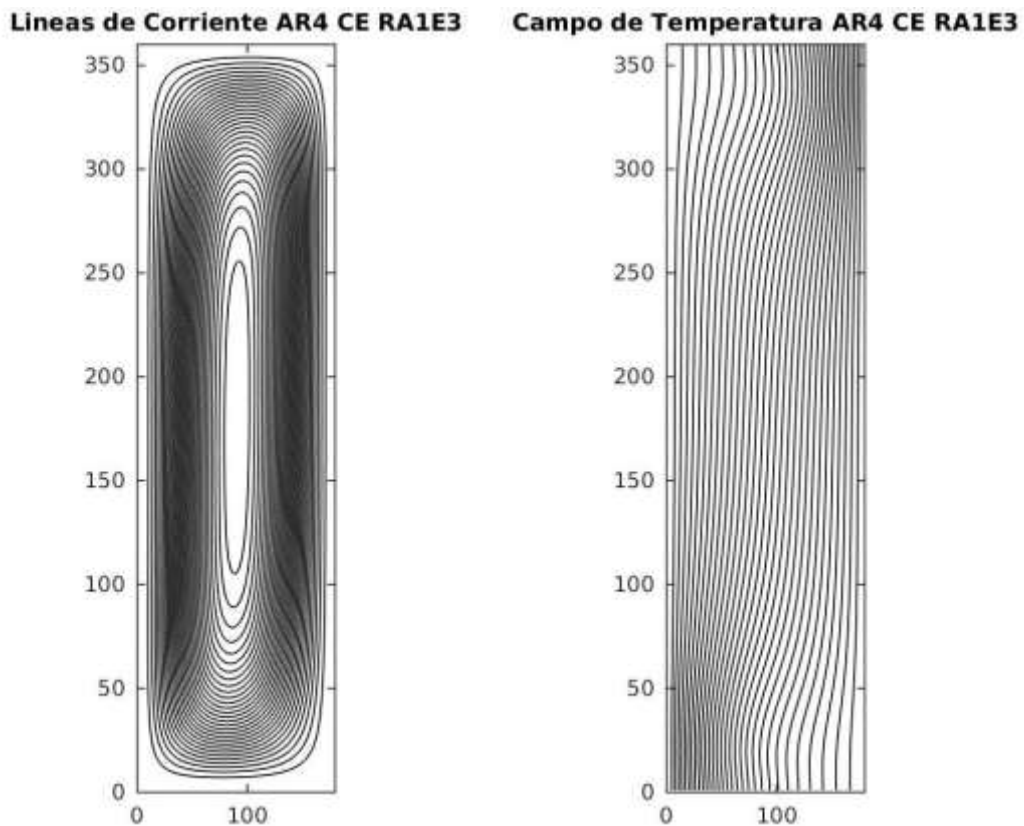


Figura 6. Graficas de relación de aspecto 4 para $Ra=10^3$.

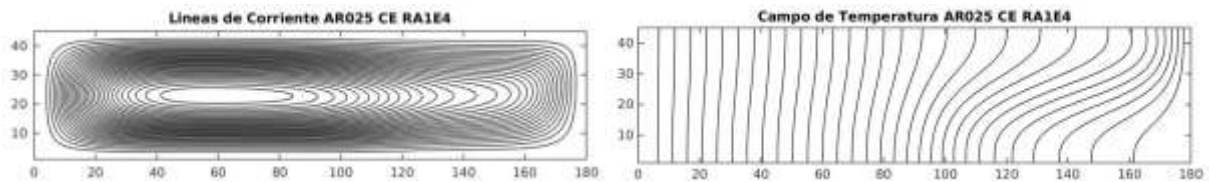


Figura 7. Graficas de relación de aspecto 0.25 para $Ra=10^4$.

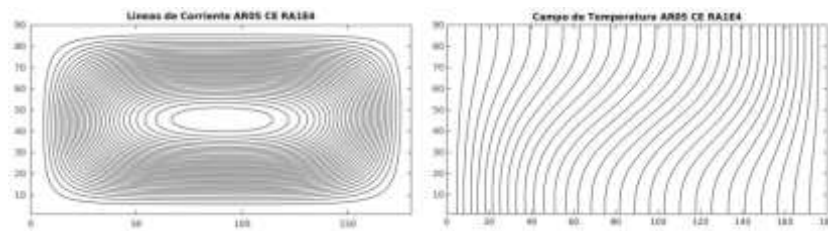


Figura 8. Graficas de relación de aspecto 0.5 para $Ra=10^4$.

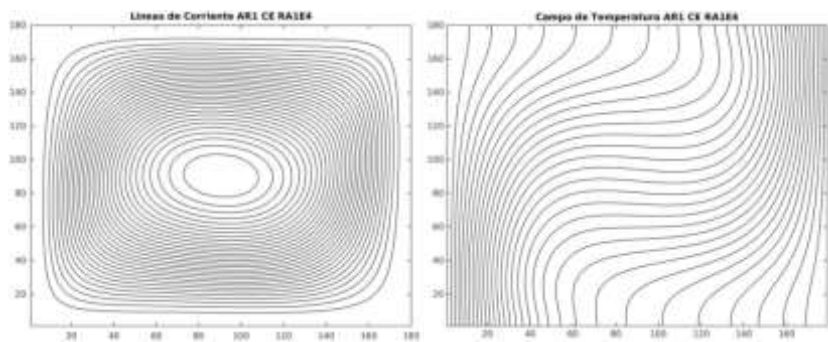


Figura 9. Graficas de relación de aspecto 1 para $Ra=10^4$.

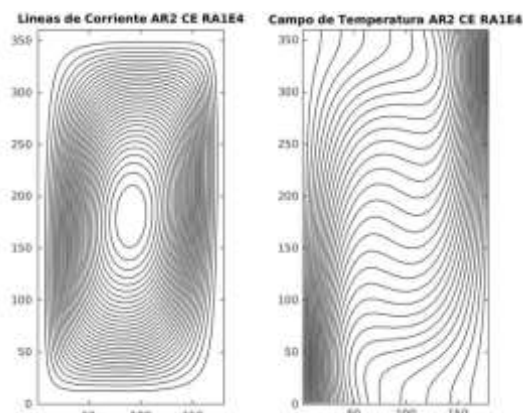


Figura 10. Graficas de relación de aspecto 2 para $Ra=10^4$.

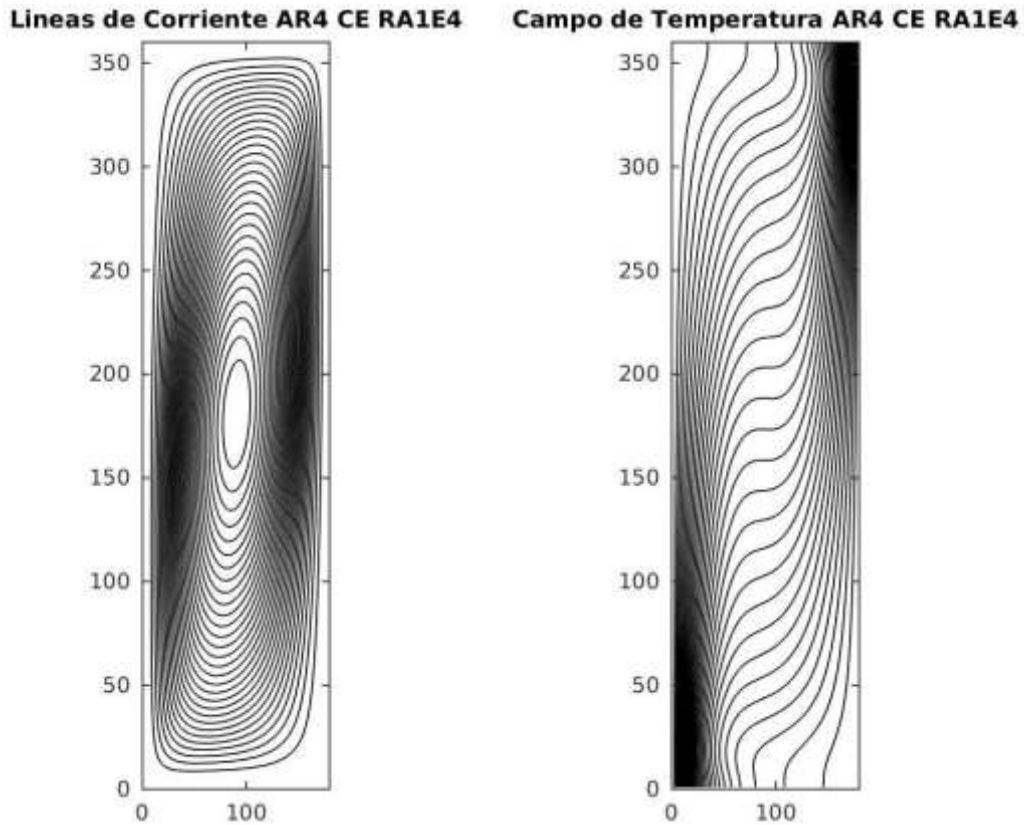


Figura 11. Graficas de relación de aspecto 4 para $Ra=10^4$.

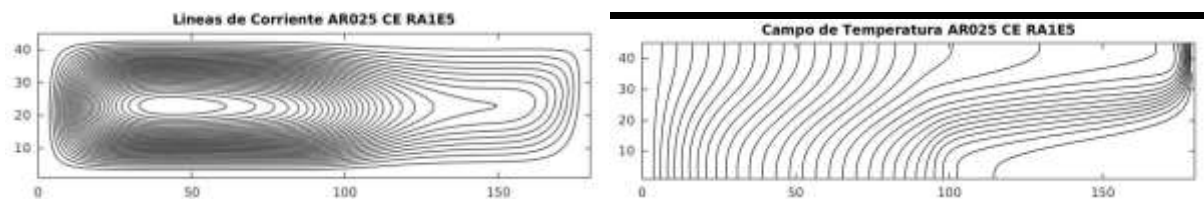


Figura 12. Graficas de relación de aspecto 0.25 para $Ra=10^5$.

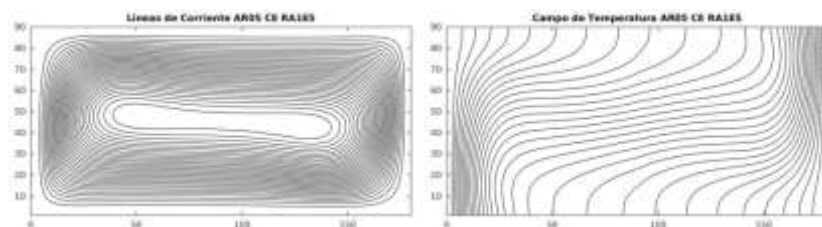


Figura 13. Graficas de relación de aspecto 0.5 para $Ra=10^5$.

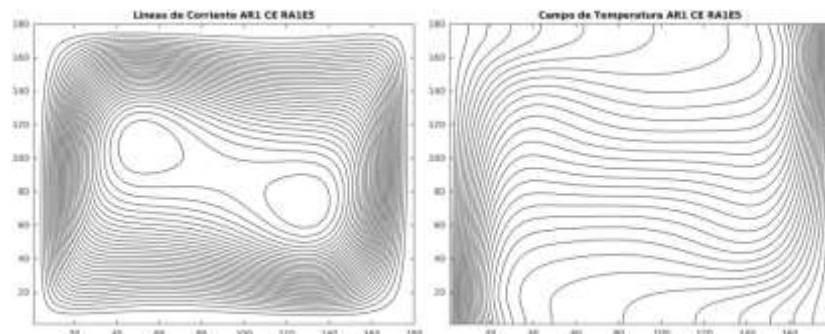


Figura 14. Graficas de relación de aspecto 1 para $Ra=10^5$.

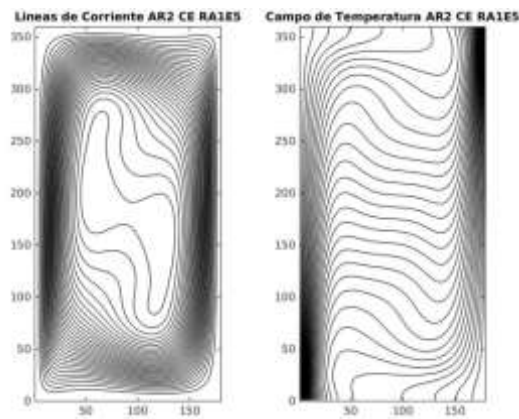


Figura 15. Graficas de relación de aspecto 2 para $Ra=10^5$.

Los gráficos de líneas de corriente desde “Fig. 2” hasta la “Fig. 21” nos permiten ver como el vórtice se desplaza con dirección a la pared caliente a medida que disminuye la relación de aspecto, haciéndose más notorio el desplazamiento con los altos números de Rayleigh. Basta con comparar

Mientras que en las gráficas de temperatura desde “Fig. 2” hasta la “Fig. 21”, podemos ver que las isotermas tienden a tomar una posición más horizontal a medida que la relación de aspecto aumenta, evidenciando así una existencia de gradiente de temperatura en la dirección Y, en centro de la cavidad.

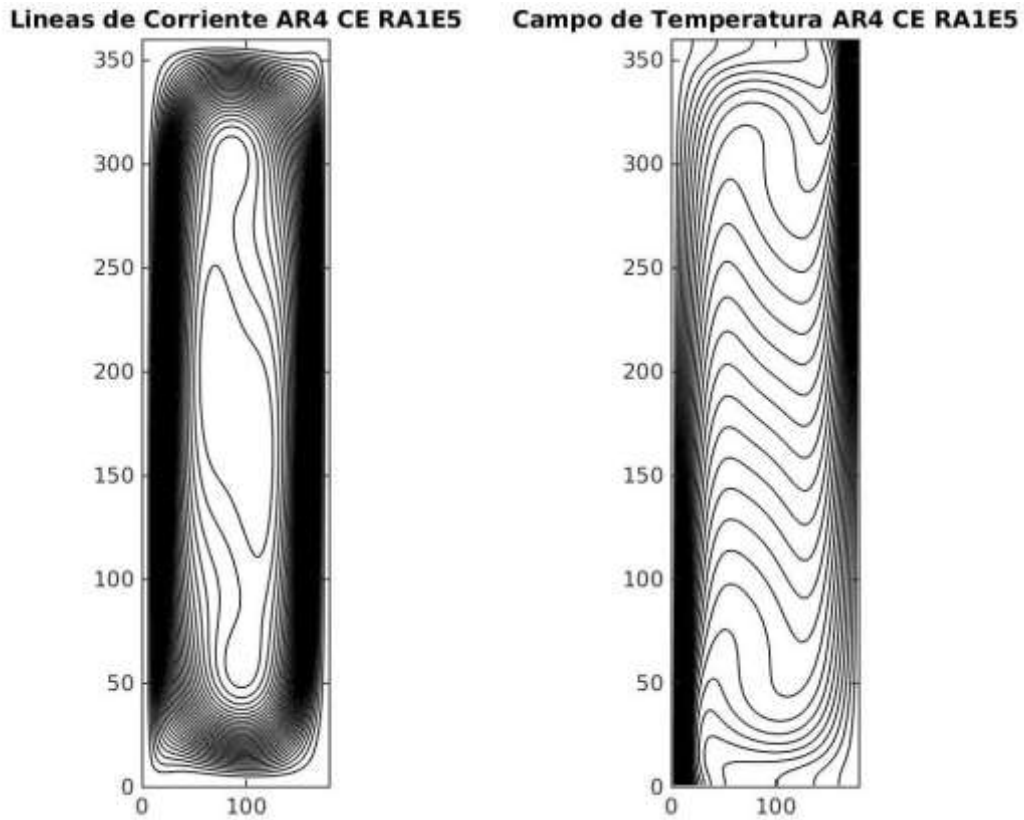


Figura 16. Graficas de relación de aspecto 4 para $Ra=10^5$.

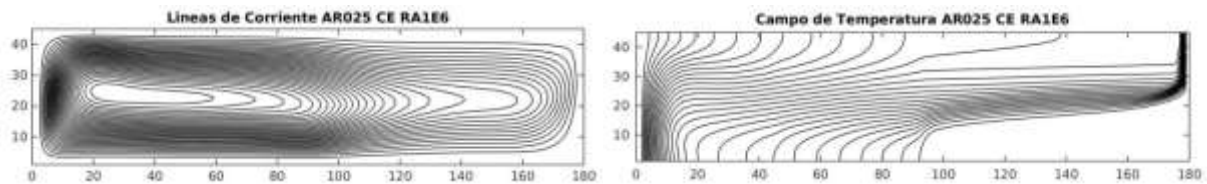


Figura 17. Graficas de relación de aspecto 0.25 para $Ra=10^6$.

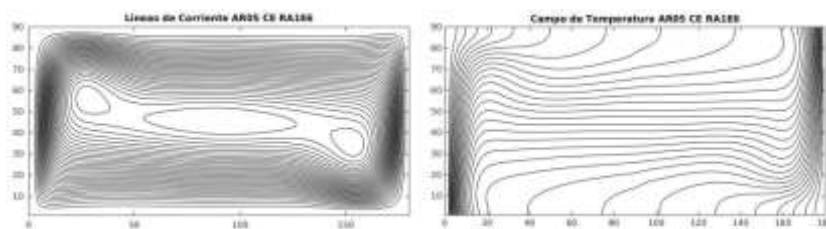


Figura 18. Graficas de relación de aspecto 0.5 para $Ra=10^6$.

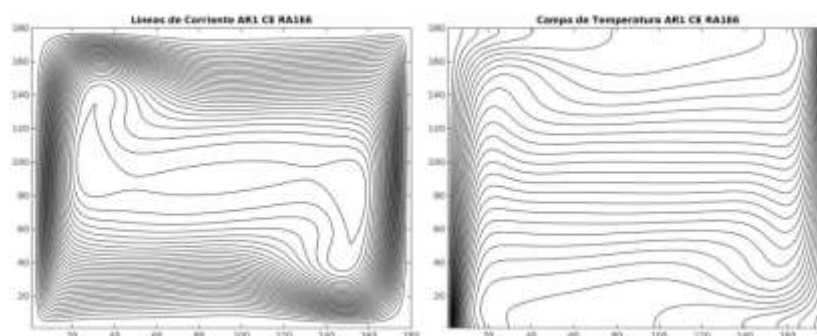


Figura 19. Graficas de relación de aspecto 1 para $Ra=10^6$.

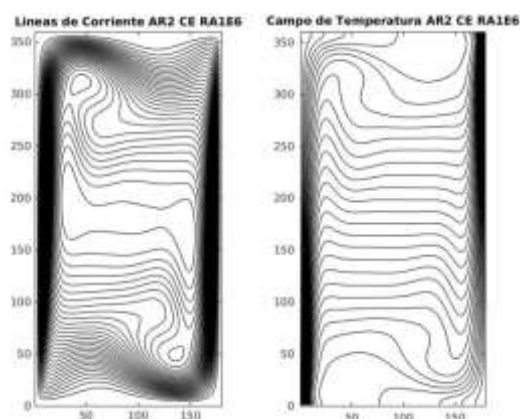


Figura 20. Graficas de relación de aspecto 2 para $Ra=10^6$.

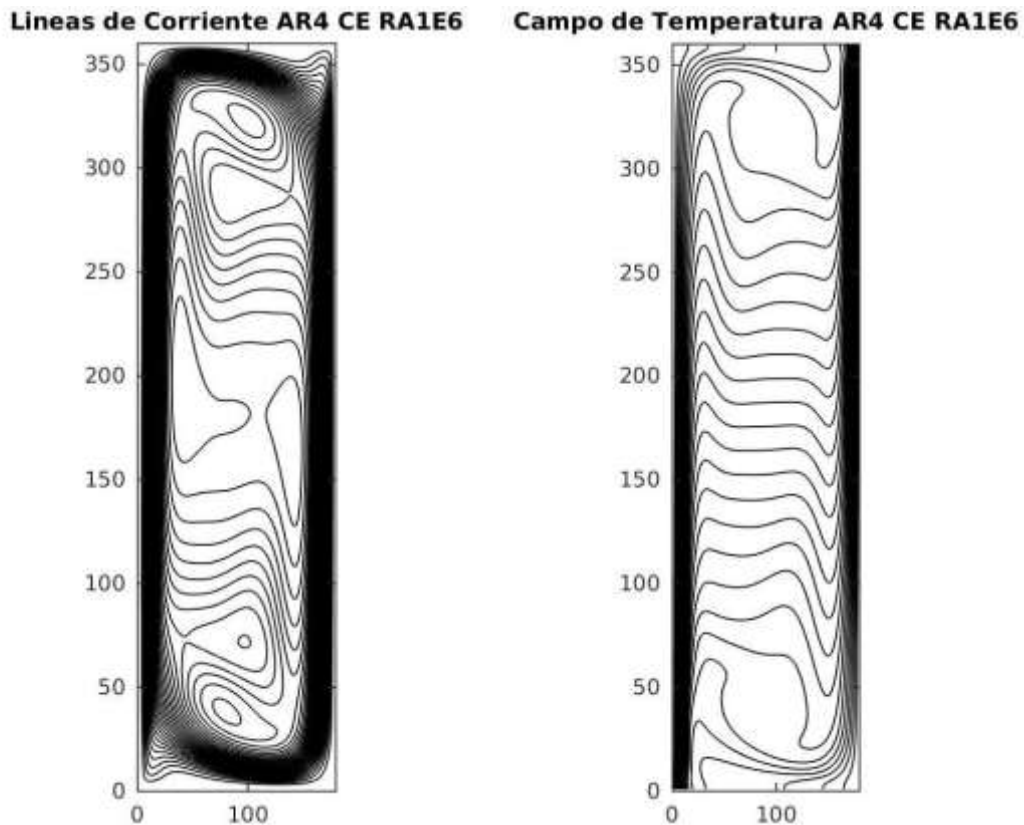


Figura 21. Graficas de relación de aspecto 4 para $Ra=10^6$.

4.2 Diferencias entre esquemas

Para realizar un análisis de los esquemas UPWIND y LEY DE POTENCIA, nos basta con analizar numéricamente las diferencias locales en cada nodo entre sus matrices de velocidades horizontales y verticales y las de sus matrices de presión y temperatura con las del esquema CENTRAL a través de las “Tabla 2”, “Tabla 3”, “Tabla 4”, “Tabla 5” y “Tabla 6”, donde se contrastan las diferencias medias relativas (no porcentuales).

Tabla 2. Diferencias medias locales de los esquemas UPWIND y LEY DE POTENCIA respecto al esquema CENTRAL o CENTRADO para relación de aspecto 0.25

Ra	Esquema	Matriz U	Matriz V	Matriz P	Matriz T
10^3	UPWIND	0.0017	0.0175	5.9090e-07	2.9774e-04
	LEY DE POTENCIA	1.4235e-05	0.0035	2.1834e-09	1.0999e-06
10^4	UPWIND	0.0094	0.0884	6.8476e-06	0.0016
	LEY DE POTENCIA	3.5484e-04	0.0021	0.3417	6.1307e-05

CILAMCE 2017

10^5	UPWIND	0.0172	0.1038	1.5776e-05	0.0017
	LEY DE POTENCIA	0.0017	0.0044	2.1980e-06	2.3343e-04
10^6	UPWIND	0.0295	0.5322	2.2019e-05	0.0013
	LEY DE POTENCIA	0.0036	0.0536	8.6288e-06	3.9486e-04

Tabla 3. Diferencias medias locales de los esquemas UPWIND y LEY DE POTENCIA respecto al esquema CENTRAL o CENTRADO para relación de aspecto 0.5

Ra	Esquema	Matriz U	Matriz V	Matriz P	Matriz T
10^3	UPWIND	7.0397e-04	0.0011	2.2498e-07	4.2401e-05
	LEY DE POTENCIA	3.5087e-05	1.1053e-04	2.8354e-09	1.3065e-09
10^4	UPWIND	0.0054	0.0225	2.2325e-06	2.9005e-04
	LEY DE POTENCIA	8.4581e-06	1.2174e-04	4.6072e-09	2.7089e-07
10^5	UPWIND	0.0218	0.1387	1.3491e-05	7.3408e-04
	LEY DE POTENCIA	7.7187e-04	0.0036	3.1276e-07	1.8930e-05
10^6	UPWIND	0.0548	0.5324	3.7815e-05	0.0013
	LEY DE POTENCIA	0.0038	0.0381	2.5058e-06	8.9918e-05

Tabla 4. Diferencias medias locales de los esquemas UPWIND y LEY DE POTENCIA respecto al esquema CENTRAL o CENTRADO para relación de aspecto 1

Ra	Esquema	Matriz U	Matriz V	Matriz P	Matriz T
10^3	UPWIND	0.0116	0.0074	8.5818e-07	2.3417e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0702	0.0443	5.6818e-06	4.2709e-08
10^4	UPWIND	0.0119	0.0378	3.4329e-06	6.1877e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0231	0.0489	6.7180e-06	8.1240e-06
10^5	UPWIND	0.0342	0.2286	9.9243e-06	9.8501e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0354	0.1025	7.6284e-06	3.0025e-05

10^6	UPWIND	0.2067	0.4773	2.6009e-05	0.0013
	LEY DE POTENCIA	0.0471	0.1171	4.2449e-06	9.7211e-05

Tabla 5. Diferencias medias locales de los esquemas UPWIND y LEY DE POTENCIA respecto al esquema CENTRAL o CENTRADO para relación de aspecto 2

Ra	Esquema	Matriz U	Matriz V	Matriz P	Matriz T
10^3	UPWIND	0.0148	0.0106	1.7552e-04	2.9172e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0193	0.0079	8.7825e-05	7.5381e-06
10^4	UPWIND	0.0145	0.0447	5.1399e-04	5.1501e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0088	0.0148	5.0531e-04	3.6302e-05
10^5	UPWIND	0.1133	0.1250	6.3065e-04	7.8755e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0115	0.0091	4.4773e-04	1.0701e-04
10^6	UPWIND	0.2384	1.1997	8.7489e-04	0.0017
	LEY DE POTENCIA	0.0281	0.0747	4.8616e-04	1.6282e-04

Tabla 6. Diferencias medias locales de los esquemas UPWIND y LEY DE POTENCIA respecto al esquema CENTRAL o CENTRADO para relación de aspecto 4

Ra	Esquema	Matriz U	Matriz V	Matriz P	Matriz T
10^3	UPWIND	0.0763	0.0051	5.6285e-05	2.2702e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0439	6.8954e-04	2.5213e-05	4.5409e-06
10^4	UPWIND	0.0355	0.0269	0.0018	5.9973e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0103	0.0016	0.0012	5.5316e-05
10^5	UPWIND	0.4164	0.1113	0.0013	6.9027e-04
	LEY DE POTENCIA	0.0573	0.0105	6.5654e-04	1.2926e-04
10^6	UPWIND	0.1982	0.6391	7.1956e-05	0.0011
	LEY DE POTENCIA	0.0290	0.0654	5.8324e-04	1.9456e-04

La primera observación al comparar los tres esquemas es que la diferencia entre sus matrices de presión y temperatura es muy pequeña en el peor de los casos de un orden del 0.2% observados en la “Tabla 6” en la mayoría de sus casos, mientras solo en los casos de Rayleigh alto para las “Tabla 2”, “Tabla 3”, “Tabla 4” y “Tabla 5”. No así con las velocidades en la cual se observa un aumento conforme aumenta el número de Rayleigh para todas las relaciones de aspecto, acentuándose en las relaciones de aspecto mayores y en la matriz de la velocidad vertical V.

El esquema de LEY DE POTENCIA, se muestra más coincidente en las tablas de diferencia con el esquema CENTRAL que el esquema UPWIND con el CENTRAL.

4.3 Conclusión

Fue escrito un código computacional que permitió realizar el cálculo de convección natural para casos de cavidades con variación de aspecto entre 0.25 y 4, números de Rayleigh entre 10^3 y 10^6 y en los esquemas numéricos LEY DE POTENCIA, CENTRAL y UPWIND, el cual fue previamente verificado con soluciones de referencia.

La primera conclusión es que una menor relación de aspecto afecta a las líneas de corriente, tendiendo a desplazar el vórtice con dirección a la pared más caliente. En baja relación de aspecto, más notoriamente en 0.25 los gradientes de temperatura en el eje Y se encuentran acentuados en las proximidades de las paredes frías mientras que con el aumento de la relación de aspecto, los gradientes de temperatura en el eje Y se acentúan en el centro de la cavidad.

Finalmente la última conclusión es que conforme aumenta números de Rayleigh aumenta significativamente la diferencia media comparada entre los esquemas numéricos estudiados, LEY DE POTENCIA, CENTRAL y UPWIND en los campos de velocidad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores gustaría de agradecer en primer lugar a la Universidad Estadual de Campinas, por todo el apoyo académico requerido para la investigación, al programa paraguayo de becas Carlos Antonio López (BECAL) por el apoyo financiero. Y al candidato a PhD. Jan M. Armengol por su apoyo en el área numérica para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- Bañri A, Zarco-Pernia E, De María J-MG. A review on natural convection in enclosures for engineering applications. the particular case of the parallelogrammic diode cavity. *Appl Therm Eng* 2014;63:304e22.
- De Vahl Davis G, Jones I. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. *Int J Numer Methods Fluids* 1983;3:227e48.
- Hortmann M, Peric M, Scheuerer G. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions. *Int J Numer Methods Fluids* 1990;11:189e207.
- Huelsz G, Rechtman R. Heat transfer due to natural convection in an inclined square cavity using the lattice boltzmann equation method. *Int J Therm Sci* 2013;65:111e9.
- J.M. Armengol, F.C. Bannwart, J. Xaman, R.G. Santos. Effects of variable air properties on transient natural convection for large temperature differences. *Int J Therm Sci* 2017;120:63e79.
- J. Xamán, M. Gijón-Rivera. *Dinámica de fluidos computacional para ingenieros*. Palibrio 2015.
- Leal M, Perez-Guerrero J, Cotta R. Natural convection inside two-dimensional cavities: the integral transform method. *Commun Numer Methods Eng* 1999;15:113e25.
- Patankar S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press; 1980.
- Patankar SV, Spalding DB. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int J Heat Mass Transf* 1972;15(10):1787e806.
- Saitoh T, Hirose K. High-accuracy bench mark solutions to natural convection in a square cavity. *Comput Mech* 1989;4:417e27.