



VIBRAÇÕES E ESTABILIDADE DE BARRAS ESBELTAS PULTRUDADAS SOB COMPRESSÃO AXIAL

Julio C. Coaquira

jccoaquira@gmail.com

Daniel C. T. Cardoso

dctcardoso@puc-rio.br

Paulo B. Gonçalves

paulo@puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22451-900, RJ, Rio de Janeiro, Brasil

Resumo. Elementos estruturais com paredes finas e seções abertas são comumente encontrados em estruturas metálicas e, cada vez com mais frequência, nas estruturas projetadas com novos materiais, como os perfis pultrudados em polímeros reforçados com fibra de vidro (PRFV). As barras de paredes finas possuem, em geral, uma boa resistência à flexão, mas uma baixa rigidez a torção, condição suficiente para que instabilidades e vibrações provoquem um acoplamento entre flexão e torção. Neste trabalho apresentam-se as formulações para análise do comportamento local e global de colunas pultrudadas, axialmente comprimidas, com ênfase na determinação de cargas críticas e frequências naturais de vibração. Uma coluna com seção transversal em C é analisada e os resultados analíticos são comparados com os resultados numéricos obtidos através do programa GBTUL, desenvolvido na Universidade de Lisboa, baseados na teoria generalizada de vigas. Uma análise paramétrica, considerando diferentes materiais, mostra a influência do comprimento da coluna, das dimensões geométricas da seção e das constantes elásticas do material no comportamento global e local da estrutura.

Palavras-chave: Vigas, Seção aberta, Perfis pultrudados, Instabilidade, Dinâmica

1 INTRODUÇÃO

Um material composto é formado pela união de dois ou mais materiais de naturezas diferentes, resultando em um material de desempenho superior ao de seus componentes tomados separadamente. Ele é composto de um material mais rígido e resistente, denominado reforço, imerso em uma matriz com propriedades mecânicas inferiores às do reforço. Enquanto o reforço confere rigidez e resistência ao composto, a matriz é responsável pela proteção do reforço e distribuição de forças. Dentre os materiais compostos usados em engenharia, observa-se um crescente interesse naqueles obtidos pela combinação de fibras imersas em uma matriz polimérica, sobretudo produzidos pelo processo de pultrusão. (Cardoso et al., 2014a,b).

Estes perfis são compostos por chapas finas, geralmente de seções abertas e podem ser considerados como uma associação de placas esbeltas. Os modos de instabilidade que se desenvolvem neste tipo de perfis são caracterizados como flambagem local e global, sendo este último de flexão, torção ou flexo-torção (Schafer, 2002; Dinis et al., 2012). Os modos podem ocorrer de forma isolada ou conjunta, o que é chamado acoplamento, e estão condicionados às características geométricas dos perfis e às condições de apoio e carregamento. Na instabilidade global, ocorrem deslocamentos de translação e de rotação da seção transversal do perfil. Na flambagem global existem três modos de flambagem, um de flexão em torno do eixo menor de inércia e dois de flexo-torção caracterizados pela interação da flambagem por flexão nas duas direções principais de inércia com a flambagem por torção em torno do centro de cisalhamento.

Perfis compostos por chapas que apresentam elevada relação largura-espessura (b/h) quando submetidos à compressão axial, propiciam, dependendo do seu comprimento, o surgimento do modo de flambagem local. O modo de flambagem local é caracterizado pela flexão das placas que compõem a seção transversal. Geralmente, perfis que desenvolvem este modo de instabilidade, apresentam resistência pós-flambagem, tornando a carga última de colapso maior que a carga crítica de flambagem local devido à redistribuição das tensões originais no plano médio das placas.

Neste trabalho apresentam-se as formulações para análise do comportamento local e global de colunas pultrudadas, axialmente comprimidas, com ênfase na determinação de cargas críticas e frequências naturais de vibração. Uma coluna com seção transversal em C é analisada e os resultados analíticos são comparados com os resultados numéricos obtidos através do programa GBTUL, desenvolvido na Universidade de Lisboa, baseados na teoria generalizada de vigas (Bebiano et al., 2008). Uma análise paramétrica, considerando diferentes materiais, mostra a influência do comprimento da coluna, das dimensões geométricas da seção e das constantes elásticas do material no comportamento global e local da estrutura.

2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA ESTRUTURAL

Considere um perfil pultrudado de seção C, simplesmente apoiado, de comprimento L e massa por unidade de comprimento m , submetido a uma carga axial compressiva. Um segmento indeformado do perfil é mostrado na Fig. 1, juntamente com o sistema de

referências adotado. Adota-se como origem do sistema de eixos o centro de gravidade da seção, denotado por CG . Na Fig. 1, X , Y e Z definem o sistema retangular de coordenadas globais, localizado no centro de gravidade CG da seção transversal, onde Y e Z são os eixos principais de inércia e X o eixo longitudinal da viga. Em seções com um único eixo de simetria (monossimétricas) ou assimétricas, o centro de cisalhamento SC , não coincide com o centro de gravidade, sendo suas coordenadas dadas por coordenadas (y_c, z_c) . Um ponto M , ao longo do contorno da seção, utilizado no modelo de Vlasov para torção não uniforme (Vlasov, 1961), é identificado pelas coordenadas (y, z) e pela área setorial ω_s .

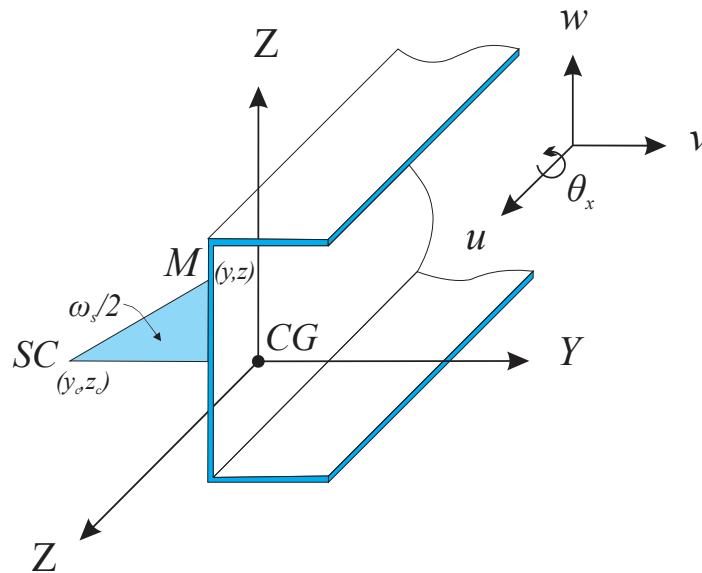


Figura 1. Perfil C – características geométricas e sistema de referência

3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento que descrevem a flambagem global e vibrações de uma viga simplesmente apoiada são obtidas através da teoria não linear de vigas-coluna de seção aberta desenvolvida por Mohri et al. (2004). Para a flambagem e modos de vibração locais, utiliza-se o método de Ritz e a teoria não linear de placas esbeltas de von Kármán (Brush and Almroth, 1975).

3.1 Teoria não linear de vigas-coluna de seção aberta

A coluna bi-apoiada tem seu modo de flambagem a flexão descrito por $\sin(m\pi x/L)$ onde m é o número de semiondas axiais e L o comprimento do perfil. Considerando que a torção está impedida nas extremidades, tem-se que a torção é dada por $\sin(\pi x/L)$. Assim, as equações de movimento de uma coluna bi-apoiada, considerando os termos não lineares até a terceira ordem, são dadas por (ver detalhes em Mancilla et al., 2014 e Coaquira et al., 2016):

$$\begin{aligned}
& m \left[0.5L \left(\frac{d^2}{dt^2} v_o \right) + 0.5z_c L \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_o \right) \right] + EI_z \left(\frac{\pi^4 v_o}{2L^3} + \frac{\pi^6 v_o^3}{16L^5} \right) - \\
& P \left(-\frac{\pi^2 v_o}{2L} - \frac{\pi^2 z_c \theta_o}{2L} - \frac{2\pi y_c \theta_o^2}{3L} \right) + (EI_z - EI_y) \left(\frac{4\pi^3 w_o \theta_o}{3L^3} - \frac{3\pi^4 v_o \theta_o^2}{8L^3} \right) - \\
& \frac{2}{\pi} q_y L + 74.8275 \left(\frac{d}{dt} v_o \right) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& m \left[0.5L \left(\frac{d^2}{dt^2} w_o \right) - 0.5y_c L \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_o \right) \right] + EI_y \left(\frac{\pi^4 w_o}{2L^3} + \frac{\pi^6 w_o^3}{16L^5} \right) - \\
& P \left(-\frac{\pi^2 w_o}{2L} + \frac{\pi^2 y_c \theta_o}{2L} - \frac{2\pi z_c \theta_o^2}{3L} \right) + (EI_z - EI_y) \left(\frac{4\pi^3 v_o \theta_o}{3L^3} + \frac{3\pi^4 w_o \theta_o^2}{8L^3} \right) - \\
& \frac{2}{\pi} q_z L + 74.8275 \left(\frac{d}{dt} w_o \right) = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
& m \left[\frac{L}{2} I_o \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_o \right) + \frac{1}{2} z_c L \left(\frac{d^2}{dt^2} v_o \right) - \frac{1}{2} y_c L \left(\frac{d^2}{dt^2} w_o \right) \right] + \frac{\pi^4 EI_w \theta_o}{2L^3} + \frac{\pi^2 GJ \theta_o}{2L} + \frac{3\pi^4 EI_t \theta_o^3}{16L^3} - \\
& P \left[-\frac{\pi^2 I_o \theta_o}{2L} + y_c \left(\frac{\pi^2 w_o}{2L} - \frac{4\pi v_o \theta_o}{3L} \right) + z_c \left(-\frac{\pi^2 v_o}{2L} - \frac{4\pi w_o \theta_o}{3L} \right) \right] + \\
& (EI_z - EI_y) \left(\frac{4\pi^3 v_o w_o}{3L^3} - \frac{3\pi^4 \theta_o v_o^2}{8L^3} + \frac{3\pi^4 \theta_o w_o^2}{8L^3} \right) + \\
& \frac{1}{2\pi} q_z L (\pi e_z \theta_o - 4e_y) + 13.364976 \left(\frac{d}{dt} \theta_o \right) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

onde v e w são, respectivamente os deslocamentos transversais devidos à flexão nas direções Y e Z , θ é a rotação em torno do eixo x , P é o esforço normal devido a uma carga axial P , E o módulo de Young, G o modulo de elasticidade transversal e J é a constante de torção de St-Venant, I_y e I_z são os momentos de inércia em torno dos eixos Y e Z , respectivamente, I_o , o momento polar de inercia e I_t , uma constante de torção.

3.2 Teoria clássica não linear de placas

A energia potencial total de uma placa carregada nos bordos é a soma da energia interna de deformação, U , e o potencial das cargas aplicadas, Ω : $\Pi = U + \Omega$. A energia interna de deformação para uma placa fina de espessura h pode ser escrita como a soma da energia de membrana, U_m , e da energia interna de flexão, U_b , $U = U_m + U_b$, onde (Brush and Almroth, 1975):

$$U_m = \frac{1}{2} \iint (A_{11} \varepsilon_x^2 + 2A_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + A_{22} \varepsilon_y^2 + A_{66} \gamma_{xy}^2) dx dy. \tag{4}$$

$$U_b = \frac{1}{2} \iint (D_{11} \kappa_x^2 + 2D_{12} \kappa_x \kappa_y + D_{22} \kappa_y^2 + D_{66} \kappa_{xy}^2) dx dy. \tag{5}$$

A expressão para a energia potencial das cargas nos bordos depende da natureza das cargas. Para uma carga uniformemente distribuída ao longo dos bordos $x = 0, a$, a energia potencial pode ser escrita como (Brush and Almroth, 1975):

$$\Omega = P_x \frac{1}{b} \int_0^b \int_0^a u_{,x} dx dy. \tag{6}$$

A energia cinética, considerando que a placa tem uma massa por unidade de volume ρ , é dada por:

$$T = \frac{\rho h}{2} \int \int \left[\dot{u}^2 + \frac{h^2}{12} \dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}^2 + \frac{h^2}{12} \dot{w}_{,y}^2 + \dot{w}^2 \right] dx dy . \quad (7)$$

Considerando a função de Lagrange, $L = T - \Pi = T - U - \Omega$, e aplicando o princípio de Hamilton e desprezando-se os termos de inércia à rotação, obtêm-se as equações de movimento.

Para a análise da estabilidade local do perfil C considera-se que o mesmo é formado por três placas retangulares como mostrado na Fig. 2. Como o perfil é simplesmente apoiado, as extremidades carregadas das três placas estão simplesmente apoiadas. Entre as placas, considera-se que há continuidade das rotações e os outros bordos dos dois flanges estão livres.

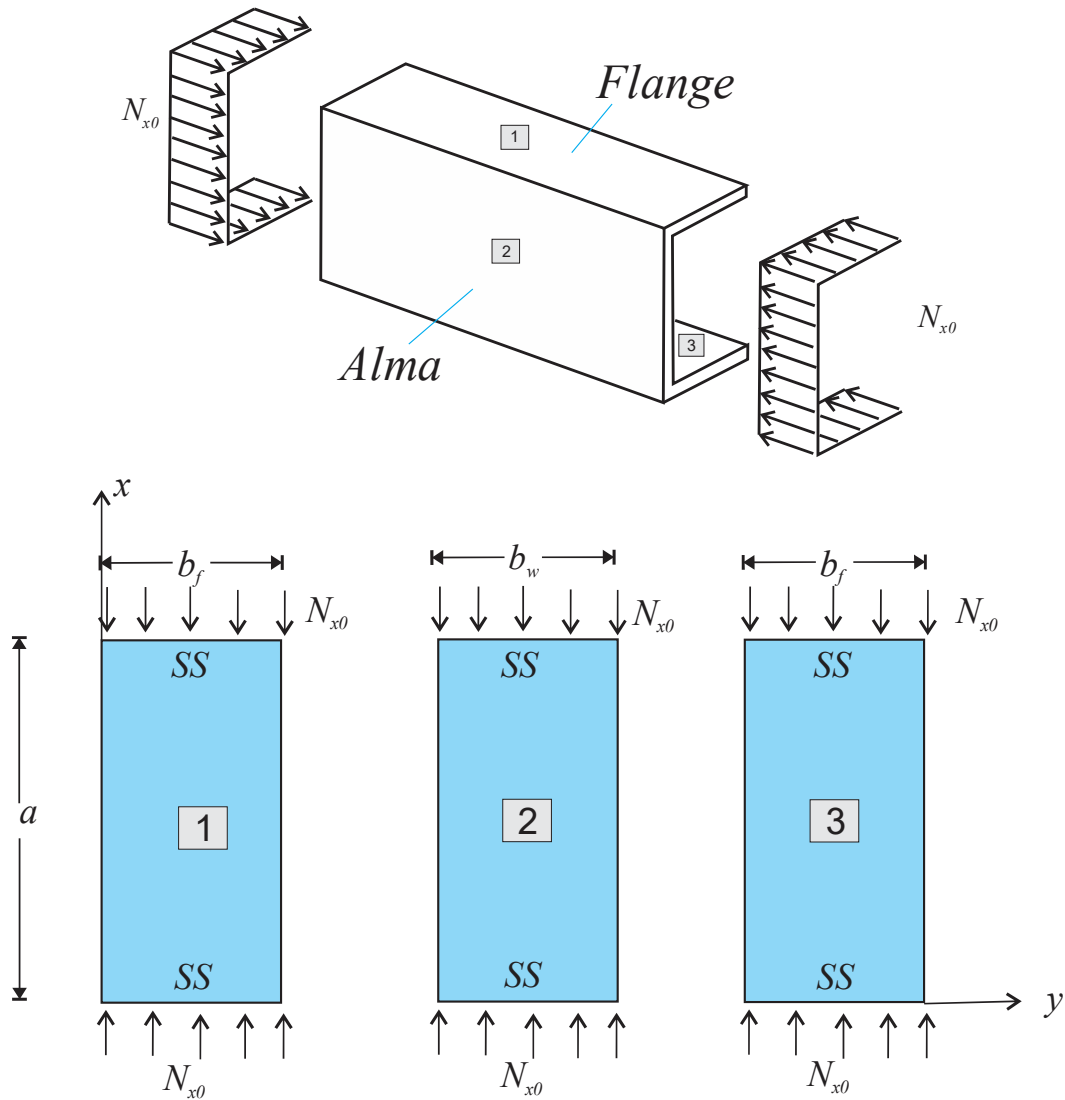


Figura 2. Placas da alma e flanges do Perfil C, submetidas a forças axiais de compressão

Para se aplicar o método de Ritz. Primeiro deve-se escolher uma solução para os deslocamentos transversais w na forma de uma série de funções admissíveis contendo

coeficientes indeterminados W_i ($i = 1, 2, \dots$). As funções admissíveis têm que satisfazer as condições de contorno forçadas e as condições de continuidade na junção entre as placas. Como a coluna, as placas flambam na direção longitudinal com um dado número de ondas senoidais, sendo o campo de deslocamentos descrito pela função a forma $\text{sen}(m\pi x/a)$ onde m é o número de semiondas axiais e a o comprimento do perfil. Cabe destacar que estas funções atendem todas as condições de contorno nesta direção. Resultados experimentais e análises numéricas indicam que na direção perpendicular o perfil assume após a flambagem a forma ilustrada na Fig. 3.

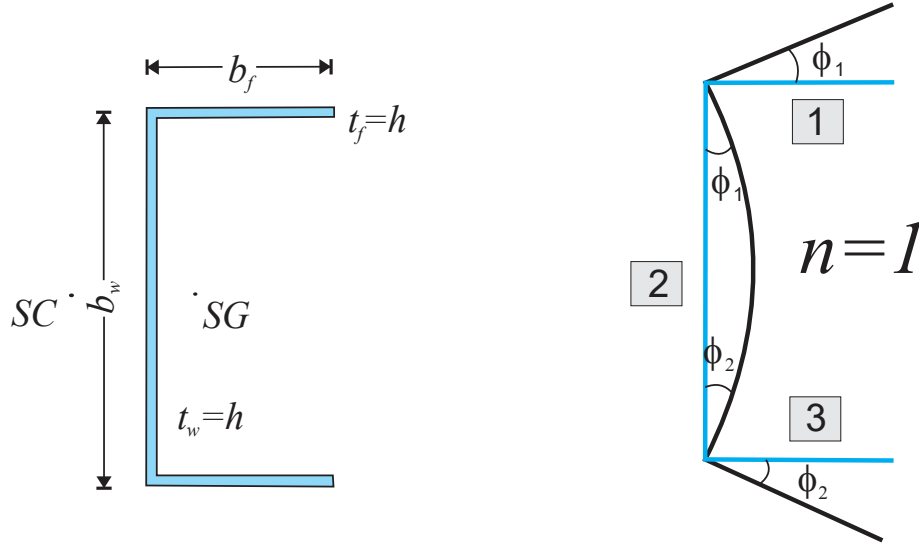


Figura 3. Modo de flambagem local do perfil C e compatibilidade das rotações entre as placas

Assim tem-se para a alma a função

$$w_2(x, y) = W \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right). \quad (8)$$

onde n é o número de semiondas na direção y .

Considerando a continuidade das rotações, são derivadas as funções de forma das placas 1 e 3, a saber:

$$w_1(x, y) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{y=0} = W \frac{n\pi}{b} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right). \quad (9)$$

$$w_3(x, y) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{y=b} = -W \frac{n\pi}{b} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \text{ para } n = 1, 3, 5, \dots \quad (10)$$

$$w_3(x, y) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{y=b} = W \frac{n\pi}{b} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right), \text{ para } n = 2, 4, 6, \dots \quad (11)$$

Nota-se que as funções de forma para as três placas que formam o perfil C são função de uma variável, W que expressa a amplitude modal.

Para obter a carga crítica $P_x = N_{x0}b$, o sistema de equações algébricas é resolvido como um problema de autovalor, resultando em:

$$P_x = b \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sum_{i=1}^n \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx dy} \quad (12)$$

onde i , refere-se a cada placa que forma parte da seção transversal.

Extremando o funcional, tem-se para a frequência natural.

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\frac{\rho h}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^a \int_0^b w_i^2 dx dy} \quad (13)$$

4 RESULTADOS NUMERICOS

Os resultados fornecidos neste trabalho foram obtidos para as propriedades dos materiais mostradas na Tabela 1, onde são considerados 3 materiais pultrudados ortotrópicos e um material isotrópico. Como propriedades geométricas da seção têm-se, base $b = 10,00$ cm, altura $h = 20,00$ cm, espessura da mesa $t_f = 0,50$ cm, espessura da alma $t_w = 0,50$ cm, coordenadas do centro de cisalhamento $y_{sc} = -6,0818$ cm e $z_{sc} = 0,00$ cm, área da seção transversal $A = 19,50$ cm², momentos de inércia $I_y = 1236,60$ cm⁴, $I_z = 193,45$ cm⁴ e $I_R = 350530,00$ cm⁶ e constante de torção de St-Venant $J = 1,67$ cm⁴. Os resultados da presente formulação são comparados com aqueles obtidos pelo GBTUL (Bebiano et al., 2008) que permite analisar as flambagem e vibrações de vigas de seção aberta e avaliar a contribuição dos modos locais e globais de deformação considerados no programa fornecido nos modos de flambagem ou vibração de um dado perfil.

Tabela 1. Propriedades dos materiais ortotrópicos e isotrópico, utilizados

Propriedade			M-1	M-2	M-3	M-3-Iso
Modulo de Elasticidade longitudinal	E_1	kN/mm^2	20	20	28	28
Modulo de Elasticidade transversal	E_2	kN/mm^2	10	5	19.3	28
Modulo de cisalhamento	G_{12}	kN/mm^2	5	2.2	2.6	11.38
Coefficiente de Poisson	ν_{12}		0.23	0.23	0.23	0.23
Coefficiente de Poisson	ν_{21}		0.115	0.0575	0.1585	0.23

As Figuras 4 e 5 mostram resultados da carga crítica e frequência natural mínima em função do comprimento do perfil L obtidos pela presente formulação e pelo programa *GBTUL*.

Na Fig. 4 tem-se a variação da carga crítica para os quatro materiais considerados com o comprimento do perfil L . A curva em vermelho corresponde à carga de flambagem local obtida da “Eq. (12)” para um número crescente de semiondas axiais m , a curva em verde corresponde aos resultados obtidos da análise global e a curva em azul corresponde ao resultado do GBTUL considerando uma semionda axial ($m=1$). Observa-se, os resultados da

análise linear (linha verde) têm boa aproximação com os resultados da flambagem global do GBTUL (linha azul), conseqüentemente, uma análise da flambagem local tem que ser feita. Verifica-se uma boa correlação entre os resultados aqui obtidos e aqueles fornecidos pelo GBTUL. Verifica-se para cada material um comprimento crítico onde se muda de um modo local para o global. O mesmo é observado na Fig. 5, onde mostra-se a variação da frequência natural mínima com o comprimento do perfil.

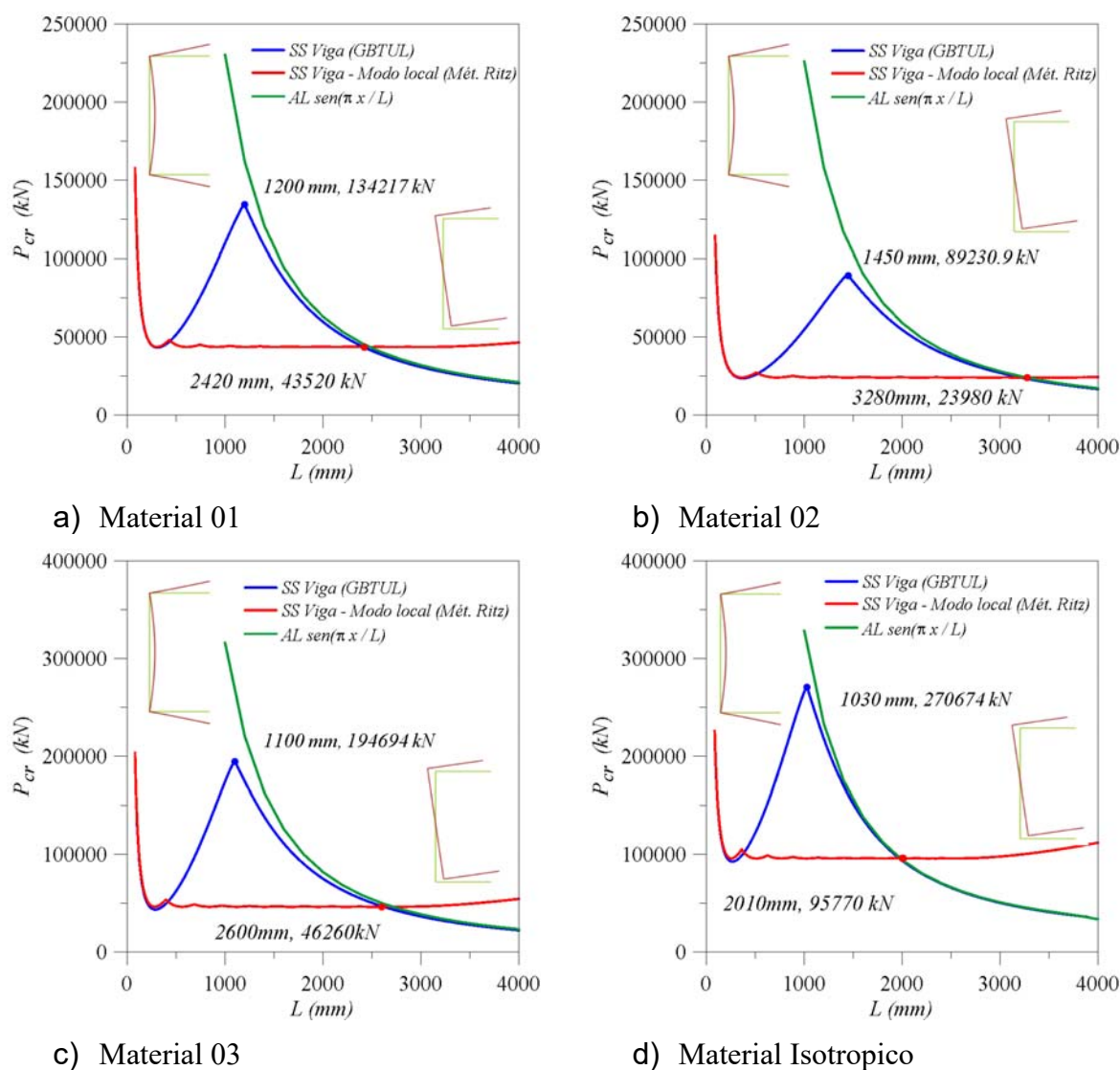


Figura 4. Cargas críticas do perfil simplesmente apoiado de seção C 200x100

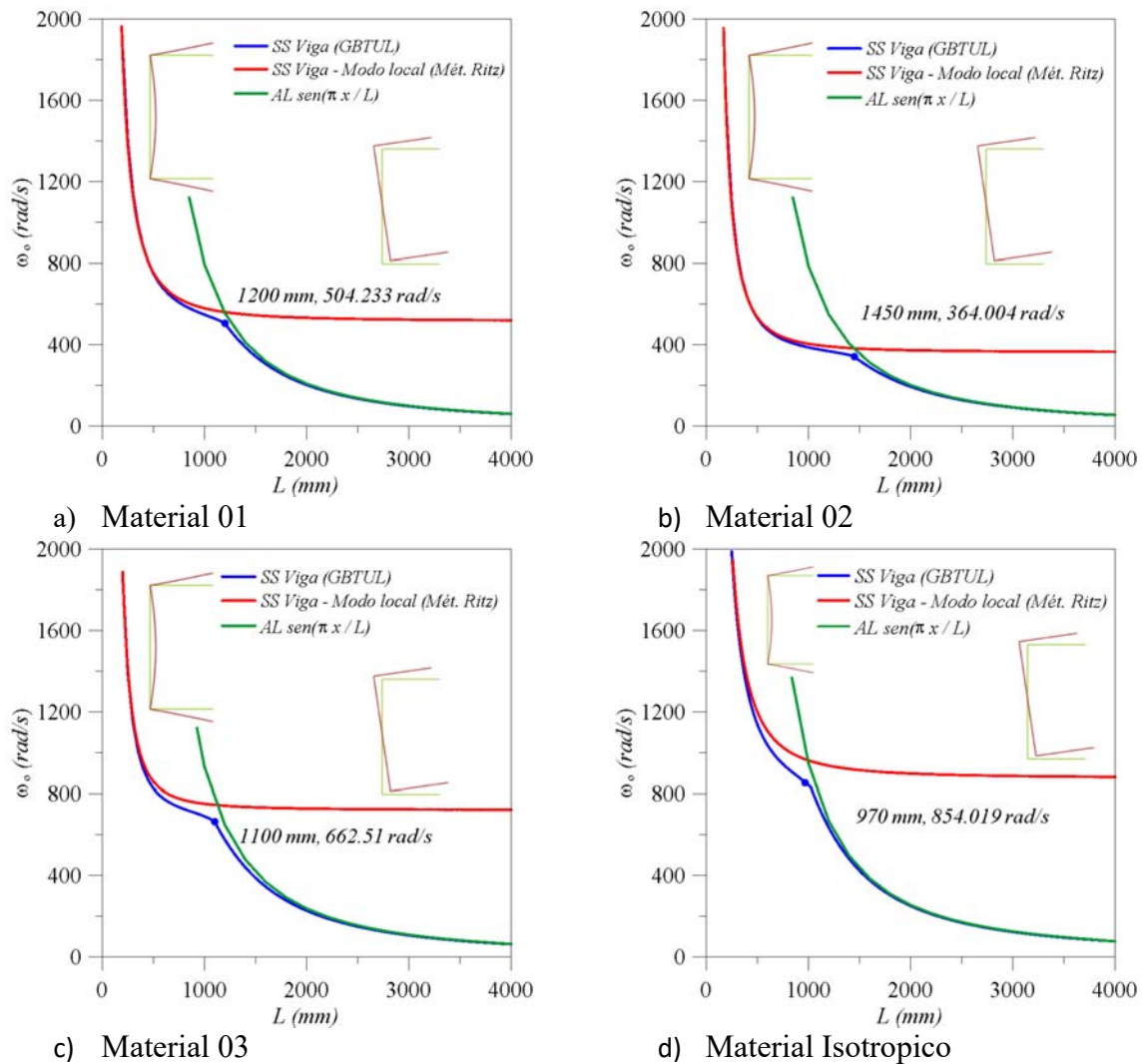


Figura 5. Frequência natural mínima

5 CONCLUSÕES

Neste artigo apresenta-se uma formulação para o cálculo de flambagem local e global e frequências naturais de vibração de perfis pultrudados com diferentes propriedades elásticas. A carga crítica relativa ao modo global e as frequências naturais são obtidas da linearização das equações diferenciais não lineares de movimento, obtidas pela teoria não linear de vigas-coluna de seção aberta. Para a análise da flambagem local, utiliza-se a teoria não linear de placas de von Kármán e o método de Ritz. Os resultados são validados comparando-se os mesmos com resultados obtidos pelo GBTUL, obtendo-se excelente correlação, o que demonstra a eficiência da formulação aqui apresentada.

REFERENCES

- Bebiano, R., Pina, P., Silvestre, N., & Camotim, D. (2008). GBTUL–buckling and vibration analysis of thin-walled members. DECivil/IST, *Technical University of Lisbon* (<http://www.civil.ist.utl.pt/gbt>).
- Brush, B. O., Almroth, B. O., "Buckling of bars, plates and shells." Mc Graw-Hill, New York 48 (1975): 173.
- Cardoso, D. C., Harries, K. A., & Batista, E. D. M. (2014a). Compressive local buckling of pultruded GFRP I-sections: development and numerical/experimental evaluation of an explicit equation. *Journal of Composites for Construction*, 19(2), 04014042.
- Cardoso, D. C., Harries, K. A., & Batista, E. D. M. (2014b). Closed-form equations for compressive local buckling of pultruded thin-walled sections. *Thin-Walled Structures*, 79, 16-22.
- Coaquira, J. C., Gonçalves, P. B., & Carvalho, E. C. (2016). Dynamic Instability of Cantilever Beams with Open Cross-Section. In: *ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (pp. V04BT05A012-V04BT05A012). American Society of Mechanical Engineers.
- Dinis, P. B., Batista, E. M., Camotim, D., & dos Santos, E. S. (2012). Local–distortional–global interaction in lipped channel columns: Experimental results, numerical simulations and design considerations. *Thin-Walled Structures*, 61, 2-13.
- Mancilla, R.C., Gonçalves, P.B., Carvalho, E.C., “Vibrações não lineares de perfis esbeltos com seção aberta”. In: *XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2014*, 2014, Fortaleza - CE - Brasil. Proceedings of CILAMCE 2014, 2014.
- Mohri, F., Azrar, L. and Potier-Ferry, M., “Vibration Analysis of buckled thin-walled beams with open sections”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 275, pp. 434-446, 2004.
- Vlasov, V.Z., Thin-walled elastic beams, Israel Prog. for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.