



DIMENSIONAMENTO OTIMIZADO DE SAPATAS RÍGIDAS ISOLADAS

Jéssica Salomão Lourenção

Emerson Gentil Santos Andrião

Élcio Cassimiro Alves

jessica_lourencao@hotmail.com

emerson.andriao@gmail.com

elcio.calves1@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514 - Goiabeiras, CEP 29075-910, Espírito Santo, Brasil

Abstract. *Estruturas de fundações apresentam importante aplicabilidade nos projetos de engenharia das estruturas, pois são responsáveis pela transição e distribuição das cargas provenientes das superestruturas para o solo/terreno natural. O presente trabalho tem o objetivo de apresentar uma análise computacional objetivando otimizar o dimensionamento de uma sapata isolada do tipo rígida. O desenvolvimento da ferramenta computacional foi realizado no pacote computacional Matlab, tendo como base os preceitos formulados na ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6122:2010 e a solução do problema de otimização obtida via Algoritmo de Ponto Interior (IP), Algoritmo de Programação Quadrática Sequencial (SQP) e Algoritmo Genético (GA) para posterior comparações com exemplos da literatura.*

Keywords: *Otimização, Algoritmo ponto interior, Algoritmo de programação quadrática sequencial (SQP), Algoritmo genético (GA), Sapata isolada, ABNT NBR 6118:2014, ABNT NBR 6122:2010.*

1 INTRODUÇÃO

Os elementos de fundações são os responsáveis pela transmissão das cargas provenientes da superestrutura para o solo, por isso seu projeto e dimensionamento são de extrema importância para a utilização segura e continuada da estrutura. A base para o projeto deste elemento advém, primeiramente, da determinação da capacidade de carga, ou tensão admissível do solo, sendo esta obtida a partir de sondagens no terreno no local onde a estrutura será construída. O valor encontrado em cada um dos pontos sondados determinará a utilização da configuração mais adequada de fundação para este local, podendo esta ser do tipo direta ou do tipo indireta. O projeto de fundações diretas, também referidas como superficiais ou rasas, pode ser feito através de sapatas ou blocos de fundação. Assim, a escolha do tipo mais adequado para transmitir as forças atuantes da estrutura será determinada em função do projeto estrutural e das características do solo.

As sapatas são elementos de volume, que têm como função transmitir os esforços, provenientes de um pilar para o solo, através de uma área superficial determinada em função das dimensões da base deste elemento. Por ser um elemento que fica circundado e encoberto tanto pela própria superestrutura como pelo solo, sua inspeção visual é de difícil consecução, o que exige que seu projeto, dimensionamento e execução sejam realizados com o máximo de cuidado e segurança.

No Brasil, o projeto e dimensionamento das sapatas é realizado através do Método das Bielas e Tirantes (Velloso & Lopes, 2011 p.132) e normalizado através das normas técnicas ABNT NBR 6118:2014 e NBR 6122:2010. Este método adota uma analogia, para o dimensionamento da sapata de concreto armado, com uma treliça, onde faixas do concreto estão resistindo aos esforços de compressão e as armaduras de aço, localizadas na base do elemento, encontram-se resistindo aos esforços de tração.

Existem diversas soluções possíveis com relação as dimensões geométricas e características dos materiais utilizados no dimensionamento de uma sapata, mas dentre estas, é possível encontrar uma solução considerada como ótima, atendendo objetivos específicos, tais como um menor custo, menor peso, menor prazo de execução, dentre outros. Inicialmente o dimensionamento é realizado a partir da tensão admissível do solo, e da carga proveniente de um pilar, permitindo-se encontrar uma área, e, a partir desta, atribuir valores iniciais para as dimensões preliminares das arestas da base da sapata. Este pré-dimensionamento geométrico do elemento será aferido através da realização de verificações a partir desta geometria inicial, devendo atender as condições e aos critérios estabelecidos, se estes não forem satisfeitos, uma nova geometria é adotada, provocando um novo processo de. Na prática usual da engenharia este dimensionamento está sujeito a experiência do projetista, onde este definirá se a solução encontrada satisfaz os critérios propostos para utilização do elemento de fundação. Este tipo de processo não garante que uma solução ótima seja a escolhida, pois critérios extra técnicos podem ser utilizado pelo profissional responsável pelo projeto, tal como uma maior dimensão para garantir uma maior segurança além daquelas estabelecidas em norma.

As técnicas de otimização, provenientes da pesquisa operacional, estão sendo cada vez mais utilizadas com o objetivo de encontrar soluções que, ao mesmo tempo sejam econômicas

e que mantenham a segurança de elemento de fundação dentro dos padrões estabelecidos em norma.

Objetiva-se neste trabalho apresentar uma formulação computacional do problema de otimização de uma sapata isolada rígida utilizando o Método das Bielas e Tirantes. Para a consecução deste objetivo foi utilizado o pacote computacional Matlab para a formulação e implementação das equações necessárias objetivando encontrar um valor ótimo para o menor custo de uma sapata isolada rígida, através de suas dimensões e propriedades dos materiais envolvidos na sua concepção.

2 DIMENSIONAMENTO DE SAPATAS RÍGIDAS

2.1 Prescrições da ABNT NBR 6118:2014

A ABNT NBR 6118:2014 define sapatas como sendo estruturas de volume usadas para transmitir ao terreno as cargas de fundação, podendo ser consideradas rígidas ou flexíveis. Para o modelo de cálculo e dimensionamento das sapatas, o método das bielas pode ser utilizado, onde a norma brasileira admite modelos tridimensionais lineares ou modelo biela-tirante tridimensionais, podendo quando for o caso, utilizar modelos de flexão.

2.2 Método das bielas e tirantes

O método das bielas é aplicado a sapatas rígidas (da Silva, 1998) e consiste em admitir uma treliça espacial idealizada no interior da sapata composta por barras tracionadas e comprimidas, unidas por meio de nós. Neste caso, as barras comprimidas são denominadas bielas e representam a compressão do concreto e as barras tracionadas são denominadas tirantes e representam as forças de tração das armaduras.

Como não há flexão numa sapata rígida e nem o excesso de compressão do concreto na proximidade do pilar, não há necessidade de verificar o esforço cortante. Portanto, o método consiste no cálculo dos esforços de tração na armadura, para determinação posteriormente da área de aço para resistir a tais esforços.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para otimizar o dimensionamento de sapatas isoladas de fundações, tendo como base o custo, tem-se a função objetivo e restrições contínuas e não lineares. A partir destas características foi escolhido três métodos de programação matemática não-linear para este trabalho. Dentro dos pacotes do Matlab existem alguns destes métodos implementados, como o método dos pontos interiores (IP), o método de programação quadrática sequencial (SQP) e o método do algoritmo genético (GA), os quais foram escolhidos para o presente estudo devido a eficiência na obtenção dos resultados para este tipo de problema. A formulação dos métodos escolhidos para o problema de otimização está descrita na Eq. (1).

$$\text{minimizar } f(x) \text{ tal que } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub, \end{cases} \quad (1)$$

onde:

x - é o vetor das variáveis do problema;

b - o vetor resposta do sistema de inequações lineares;

beq - o vetor resposta do sistema de equações lineares;

lb e ub - vetores de limite superiores e inferiores do valor das variáveis;

A - a matriz do sistema de inequações lineares;

$c(x)$ - o vetor que contém as inequações não lineares do problema;

$ceq(x)$ - o vetor que contém as equações não lineares do problema;

$f(x)$ - a função objetivo do problema;

x_o - o vetor com uma solução inicial viável do problema.

3.1 Formulação pelo método das bielas e tirantes

Utilizando o método das bielas para o dimensionamento de sapatas rígidas e adequando-o para a formulação de problema de otimização encontra-se, em Fig.1, as variáveis do problema. A altura total da sapata (H) e o ângulo de inclinação da sapata (β) não são tomadas como variáveis do problema, porém são dependentes das mesmas, sendo calculadas segundo as prescrições da ABNT NBR 6118:2014, alínea 22.6.1. Já a altura da sapata na extremidade (h_o) é um valor pré-estabelecido de altura maior ou igual a 25cm.

x_1 - comprimento da sapata na direção x (a)

x_2 - comprimento da sapata na direção y (b)

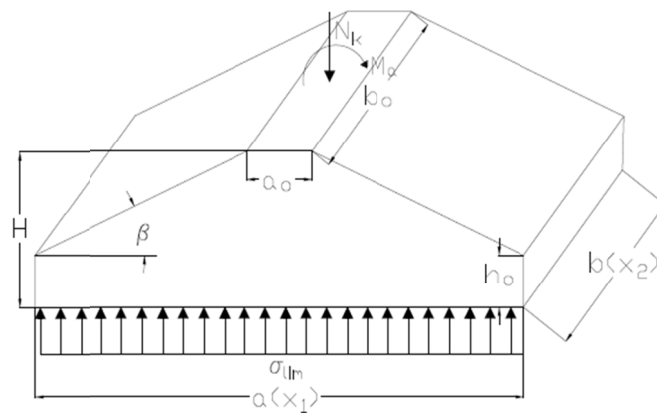


Figura 1. Sapata isolada rígida com altura variável – variáveis do problema

Função objetivo (minimizar):

$$f(x) = V_c \cdot p_c + (A_{sa} + A_{sb}) \cdot \gamma_a \cdot p_a \quad (\text{custo da sapata}) \quad (2)$$

onde:

V_c - volume de concreto;

p_c - preço por metro cúbico do concreto;

A_{sa} - área de aço na direção x;

A_{sb} - área de aço na direção y;

γ_a - peso específico do aço;

p_a - preço por kg do aço.

Restrições:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(1) : V_d - V_{rd2} \leq 0 \\ c(2) : FS - \frac{(N_k + PP_s) \frac{x_1}{2}}{M_a} \leq 0 \\ c(3) : FS - \frac{(N_k + PP_s) \frac{x_2}{2}}{M_b} \leq 0 \\ c(4) : \sigma_{\max} - \sigma_{lim} \leq 0 \\ c(5) : -\frac{1}{6} + \left(\frac{e_a}{x_1} + \frac{e_b}{x_2} \right) \leq 0 \\ c(6) : x_1 - x_2 - (a_o - b_o) \leq 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

sendo que:

$$PP_s = \left[\left(\frac{H-h_o}{6} \right) [(2x_1 + a_o)x_2 + (2a_o + x_1)b_o] + x_1x_2h_o \right] \gamma_c \quad (4)$$

onde:

V_d - carga solicitante de cálculo;

V_{rd2} - tensão nas bielas (ruptura por compressão diagonal);

FS - fator de segurança contra tombamento, 1,5;

N_k - força normal característica do pilar;

PP_s - peso próprio da sapata;

H - altura total da sapata junto à face do pilar;

h_o - altura da sapata na extremidade;

γ_c - peso específico do concreto;

M_a - momento solicitante na direção x;

M_b - momento solicitante na direção y;

$\sigma_{\max}$ - tensão máxima exercida pela sapata;

σ_{lim} - tensão admissível do solo;

e_a - excentricidade na direção x;

e_b - excentricidade na direção y;

a_o - comprimento do pilar na direção x;

b_o - comprimento do pilar na direção y.

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

As soluções otimizadas apresentadas nos exemplos foram obtidas através do software desenvolvido que utiliza o método dos pontos interiores (IP), o método de programação quadrática sequencial (SQP) e o método de algoritmo genético (GA) e comparados com exemplos existentes na literatura para validação do software desenvolvido. O dimensionamento otimizado foi realizado duas vezes para cada exemplo atendo as restrições do método das bielas.

4.1 Exemplo 1 – sapata retangular com altura variável submetida a carga vertical

O primeiro exemplo é de uma sapata retangular com altura variável submetida a carga vertical apresentada na Fig. 2 e solução dada por Campos (2015). Dados do problema:

- Largura do pilar em x (a_o) = 80cm
- Largura do pilar em y (b_o) = 30cm
- Carregamento vertical (N_k) = 1890kN
- Altura da sapata na extremidade (h_o) = 50cm
- Tensão limite do solo (σ_{lim}) = 255kPa
- Resistência do concreto (f_{ck}) = 20MPa

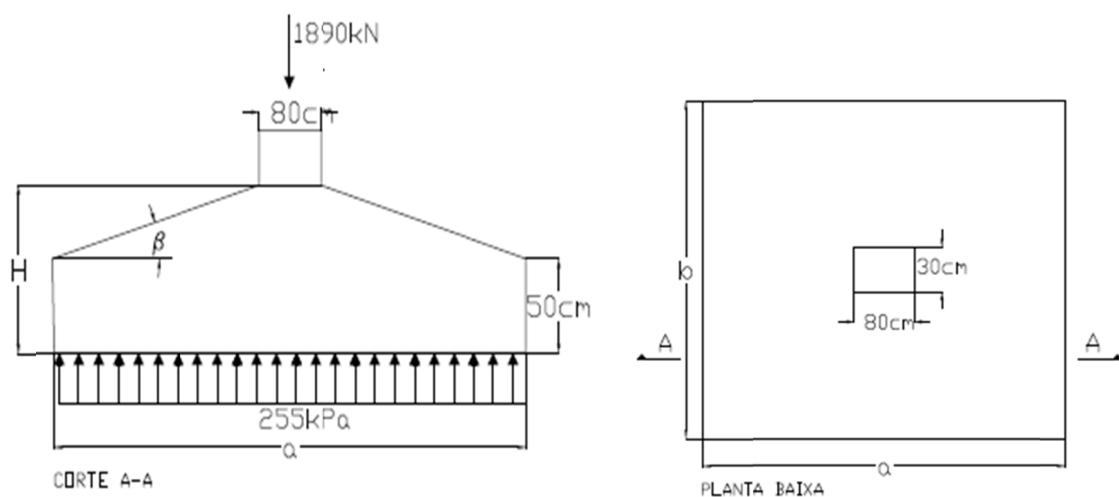


Figura 2. Sapata retangular com altura variável e carga vertical

Na Tabela 1 é apresentada as dimensões, a altura, o ângulo de inclinação, as áreas de aço e o custo dos três softwares desenvolvidos. O primeiro é o dimensionamento existente na literatura, apresentado por Campos (2015). O segundo e terceiro são o dimensionamento otimizado pelo processo dos pontos interiores (IP e pelo processo de programação quadrática sequencial (SQP). Já o quarto é o dimensionamento otimizado pelo algoritmo genético (GA), sendo que os três softwares desenvolvidos atendem as restrições do método das bielas e tirantes.

Tabela 1. Resultados das restrições da sapata retangular com altura variável e carga vertical

Método	a (cm)	b (cm)	H (cm)	β (°)	A_{sa} (cm ² /m)	A_{sb} (cm ² /m)	σ_{max} (kN/cm ²)
Campos (2015)	310	260	80	14.04	8.97	8.97	0.023
IP	306.79	256.79	75.59	12.72	11.34	11.34	0.0255
SQP	306.79	256.79	75.59	12.72	11.34	11.34	0.0255
GA	307	257	75.67	12.74	11.35	11.35	0.0255

A Tabela 2 apresenta o volume de concreto, a quantidade de aço e o custo final da sapata. Foi realizada uma comparação somente entre o exemplo existente na literatura e o dimensionamento otimizado pelo algoritmo genético, pois os resultados gerados pelo mesmo são próximos da realidade, e além disso, os dois outros dimensionamentos otimizados possuem os mesmos resultados.

Tabela 2. Resultados dos custos do exemplo 1

Método	Vol. Concreto (m ³)	Qntd. de aço (kg)	Custo (R\$)	Δ Custo (%)
Campos (2015)	4.99	40.14	1901.24	0.60
GA	4.77	50.25	1889.94	

O dimensionamento otimizado por meio do algoritmo genético apresentou um custo 0,6% menor do que o custo de Campos (2015), atendendo a todas as restrições impostas pelo método.

4.2 Exemplo 2 – sapata retangular com altura constante submetida a carga vertical e a flexão oblíqua

Neste exemplo, a sapata retangular com altura constante está submetida a uma carga vertical e a flexão oblíqua, Fig. 3, apresentado por Musso (2017). Dados do problema:

- Largura do pilar em x (a_o) = 400cm
- Largura do pilar em y (b_o) = 80cm
- Carregamento vertical (N_k) = 6370Kn
- Momento na direção em x (M_a) = 900kN.m
- Momento na direção em y (M_b) = 1200kN.m
- Tensão limite do solo (σ_{lim}) = 400kPa
- Resistência do concreto (f_{ck}) = 20MPa

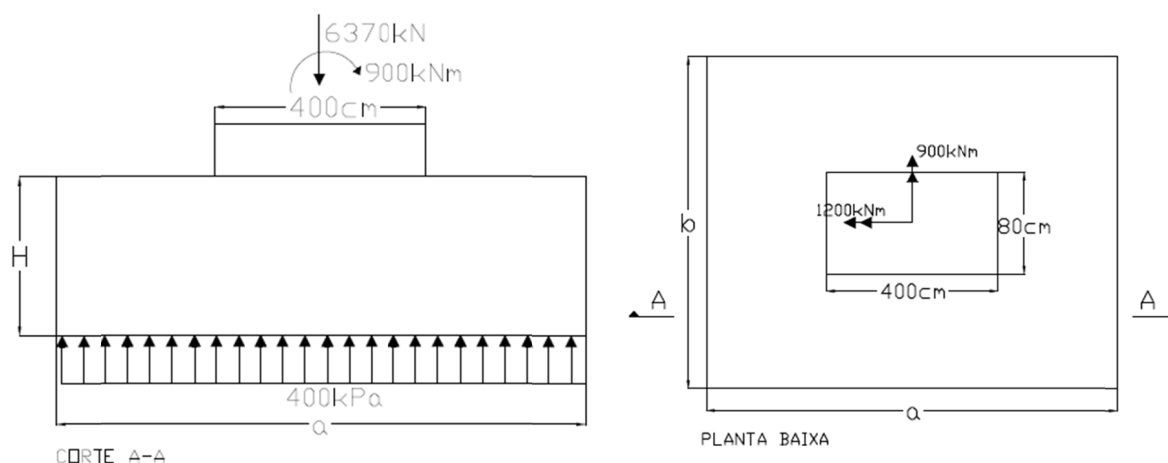


Figura 3. Sapata retangular com altura constante, carga vertical e flexão oblíqua

Na Tabela 3 é apresentada os resultados das restrições do exemplo 2. O primeiro é o dimensionamento existente na literatura, apresentado por Musso (2016) e os outros dimensionamentos são os provenientes dos softwares desenvolvidos, nos quais os valores projetados são próximos à solução ótima encontrada pelo método das bielas e tirantes.

Tabela 3. Resultados das restrições da sapata retangular com altura constante, carga vertical e flexão oblíqua

Método	a (cm)	b (cm)	H (cm)	β (°)	A_{sa} (cm ² /m)	A_{sb} (cm ² /m)	σ_{max} (kN/cm ²)
Musso (2015)	700	380	100	0	29.64	16.10	0.0365
IP	678.71	358.71	92.90	0	24.03	13.94	0.04
SQP	678.39	358.39	92.77	0	24.05	13.92	0.04
GA	679	359	93	0	24.00	13.95	0.039

A Tabela 4 apresenta o volume de concreto, a quantidade de aço e o custo final da sapata. Foi realizada uma comparação entre o exemplo de Musso (2017) e o dimensionamento otimizado pelo algoritmo genético, pois os resultados gerados pelo mesmo são próximos da realidade. Além disso, observa-se que o dimensionamento otimizado por meio do algoritmo genético apresentou um custo 17,65% menor do que o custo de Musso (2017), devido a uma redução no volume de concreto, como também na quantidade de aço.

Tabela 4. Resultados dos custos do exemplo 2

Método	Vol. Concreto (m ³)	Qntd. de aço (kg)	Custo (R\$)	ΔCusto (%)
Musso (2016)	26.60	176.89	10267.75	17.65
GA	22.67	142.01	8727.31	

4.3 Exemplo 3 – sapata retangular com altura variável submetida a carga vertical e a flexão oblíqua

Neste exemplo, a sapata retangular com altura constante, do exemplo 2, foi redimensionada para uma sapata retangular com altura variável apresentada na Fig. 4, para posteriores comparações em relação ao custo. Dados do problema:

- Largura do pilar em x (a_o) = 400cm
- Largura do pilar em y (b_o) = 80cm
- Carregamento vertical (N_k) = 6370Kn
- Momento na direção em x (M_a) = 900kN.m
- Momento na direção em y (M_b) = 1200kN.m
- Tensão limite do solo (σ_{lim}) = 400kPa
- Resistência do concreto (f_{ck}) = 20MPa
- Altura da sapata na extremidade (h_o) = 50cm

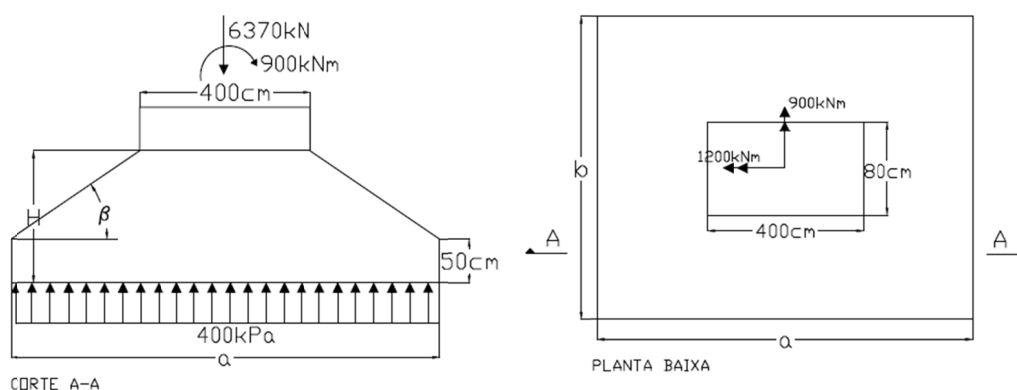


Figura 4. Sapata retangular com altura variável, carga vertical e flexão oblíqua

A Tabela 5 apresenta os resultados das restrições do exemplo 3. O primeiro resultado, no entanto, é o dimensionamento otimizado pelo software desenvolvido por meio do algoritmo genético do exemplo 2 e o segundo dimensionamento é o realizado para uma sapata retangular de mesmas solicitações que o exemplo 2, porém neste exemplo a mesma possui uma altura variável.

Tabela 5. Resultados das restrições da sapata retangular com altura variável, carga vertical e flexão oblíqua

Método	a (cm)	b (cm)	H (cm)	β (°)	A_{sa} (cm ² /m)	A_{sb} (cm ² /m)	σ_{max} (kN/cm ²)
GA (ex. 2)	679	359	93	0	24.00	13.95	0.039
GA	676	356	92	16.93	24.24	13.80	0.040

A Tabela 6 apresenta o volume de concreto, a quantidade de aço e o custo final da sapata. Uma comparação entre o exemplo 2, sapata retangular com altura constante, e o exemplo 3, sapata retangular com altura variável, foi realizado. Observa-se que o dimensionamento otimizado para uma sapata retangular com altura variável apresenta um custo 29,88% menor do que o custo de uma sapata retangular com altura constante, ocasionada devido a uma redução no volume de concreto e na quantidade de aço.

Tabela 6. Resultados dos custos do exemplo 3

Método	Vol. Concreto (m ³)	Qntd. de aço (kg)	Custo (R\$)	Δ Custo (%)
GA (ex. 2)	22.67	142.01	8727.31	29.88
GA	17.23	140.98	6719.64	

5 CONCLUSÕES

O dimensionamento ótimo de sapatas utilizando técnicas de otimização matemática foi desenvolvido para estimar o menor custo total deste elemento estrutural, baseando-se nas propriedades e custos unitários dos materiais utilizados para sua construção, bem como as diversas restrições impostas pelas normas vigentes no país.

No exemplo 1, apresentado por Campos (2015), observa-se que a utilização da otimização fornece uma redução no custo total da sapata de 0,6%, o que indica uma redução

apenas marginal para esta situação, pois a sapata já apresenta dimensões executivas próximas as da solução ótima, como pode ser observado pela pequena diferença nas suas dimensões. Destarte que a redução de custo obtida pelo menor volume de concreto foi compensado pela utilização de uma maior quantidade volumétrica de aço.

No exemplo 2, apresentado por Musso (2017), apresenta-se uma economia para com o custo total da sapata, no valor de 17,65%, pois o processo de otimização possibilitou a redução dos volumes de concreto e aço utilizados no dimensionamento deste elemento. A redução do custo, neste caso, beneficiou-se de uma redução expressiva dos volumes de concreto (aprox. 15%) e aço (aprox. 20%).

No exemplo 3, pode-se observar como a geometria do tipo de sapata influencia no seu custo total. Utilizou-se os dados do exemplo 2 para o dimensionamento e posterior comparação de custos entre uma sapata rígida isolada de altura constante com a de altura variável, sendo ambas de base retangular. Neste caso, embora os volumes de aço sejam praticamente iguais (var. aprox. 0,7%), o custo total foi reduzido através da diminuição do volume de concreto (aprox. 24%), o que já era inferido a priori devido as diferenças nas formas geométricas destes elemento.

Embora as técnicas e algoritmos de otimização, utilizados para o dimensionamento de elementos estruturais, apresentem uma redução nos seus custos totais, tais como nos exemplos anteriormente apresentados, cabe destacar que, em alguns casos (ex. 1), as dimensões obtidas em busca da solução ótima não são exequíveis na prática de engenharia por apresentarem valores não inteiros. Por outro lado, como observado nos exemplos 2 e 3, a utilização destas técnicas matemáticas possibilitam ao profissional uma análise mais analítica e racional para a escolha do tipo, bem como das dimensões deste elemento estrutural, apresentando redução de valores expressivos para seu custo total. Isso é mais relevante quando tem-se um projeto onde o quantitativo de sapatas isoladas a serem executada influi no custo total acumulado para a execução das fundações.

REFERÊNCIAS

- Al-Ansari, M. (2013). Structural Cost of Optimized Reinforced Concrete Isolated Footing. World Academy of Science, Engineering and Technology, *International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering*, vol.7, n. 4, pp.290-297.
- Associação Brasileira De Normas Técnicas. NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro.
- _____. NBR 6120:2010 – Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro.
- Campos, J. C. (2015). *Elementos de fundações em concreto*. São Paulo: Oficina de Textos.
- Da Silva, E. (1998). Análise dos modelos estruturais para determinação dos esforços resistentes em sapatas isoladas. Dissertação (Mestre em Engenharia de Estruturas), Universidade de São Paulo, São Paulo.

Musso Junior, F. (2017). *Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado de acordo com a NBR 6118:2014*. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

Rojas, A., Chavarría, S., & Elizondo, M. (2017). Optimal design for rectangular isolated footings using the real soil pressure. *Ingeniería e Investigación*, vol. 37, n. 2, pp.25-33.

Velloso, D. A., & Lopes, F. R. (2011). *Fundações – Critérios de Projeto, Investigação do Subsolo, Fundações Superficiais, Fundações Profundas*. São Paulo: Oficina de Textos.