



USO DO MÉTODO *MULTIGRID* NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CALOR 2D EM MALHAS ESTRUTURADAS NÃO-ORTOGONAIS

Daiane Cristina Zanatta

daiaczanatta@gmail.com

Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO, Irati-PR, Brasil

Luciano Kiyoshi Araki

Marcio Augusto Villela Pinto

lucaraki@ufpr.br

marcio_villela@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica, Curitiba-PR, Brasil

Resumo. O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento do método multigrid geométrico sobre o tempo de CPU (Central Processing Unit) para um problema matemático bidimensional de interesse da Dinâmica dos Fluidos Computacional (Computational Fluid Dynamics - CFD). O problema matemático considerado refere-se ao problema bidimensional linear de condução de calor, governado pela equação de Poisson, com condições de contorno de Dirichlet em uma geometria no formato de L. Para a geração de malhas não-ortogonais estruturadas foi utilizado o método algébrico que emprega interpolações de Lagrange. A análise foi feita utilizando-se um comparativo entre singlegrid e multigrid, queda do resíduo adimensionalizado, tempo de CPU e número de ciclos V. A equação diferencial é discretizada pelo Método dos Volumes Finitos (MVF) com esquema de aproximação de segunda ordem. As condições de contorno, do tipo Dirichlet, são aplicadas mediante a técnica de volumes fictícios. O sistema de equações algébricas é resolvido com o emprego do solver Gauss-Seidel. Para acelerar a convergência do esquema iterativo utilizou-se o método multigrid com esquema de correção (Correction Scheme - CS), ciclo V e razão de engrossamento $r = 2$.

Palavras-chave: CFD, Multigrid geométrico, Método dos Volumes finitos, Malhas não-ortogonais.

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas reais de Engenharia estão relacionados a geometrias complexas, em que o uso de um sistema de coordenadas cartesianas, cilíndricas ou esféricas não se mostra prático ou adequado.

Quando for possível discretizar o domínio de cálculo com uma malha estruturada, as linhas da malha formam um novo sistema de coordenadas, denominadas curvilíneas ou generalizadas (Maliska, 2010). Optando-se por transformar a equação do domínio físico para o domínio transformado e integrando-se a equação neste domínio, gera-se uma discretização em volumes finitos (Maliska, 2010).

A discretização de modelos matemáticos com MVF aproxima um sistema de equações diferenciais por um sistema de equações algébricas da forma:

$$A\Phi = f, \tag{1}$$

sendo A a matriz dos coeficientes, Φ o vetor das incógnitas, referente à solução aproximada em cada ponto da malha, e f o vetor dos termos independentes.

Os métodos de resolução numérica do sistema de equações algébricas podem ser divididos em diretos e iterativos (Maliska, 2010). Neste trabalho, esses métodos são chamados de *solvers*.

O método *multigrid* refere-se à uma família de métodos iterativos utilizados para resolver, com eficiência, sistemas de equações dados pela Eq. (1). O método *multigrid* percorre, ao longo do processo iterativo, várias malhas com diferentes espaçamentos. São utilizados operadores para transferir informações entre a malha fina e a malha imediatamente mais grossa (operadores de restrição); e entre a malha grossa e a malha imediatamente mais fina (operadores de prolongação) (Briggs et al., 2000). Em cada nível de malha executa-se, com um *solver*, iterações até atingir um critério de convergência especificado para o sistema na malha mais fina.

Neste artigo tratou-se do problema bidimensional linear de condução de calor governado pela equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet. A geometria adotada foi no formato de L. As malhas não-ortogonais estruturadas foram geradas com o método algébrico que emprega interpolações de Lagrange.

2 GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Existem na literatura vários métodos para geração de malhas. Fundamentalmente, esses métodos são classificados em algébricos e diferenciais (Thompson et al., 1985; Maliska, 2010). Os métodos algébricos utilizam-se de diferentes tipos de interpolação e são versáteis e rápidos (Maliska, 2010). Os métodos diferenciais empregam sistemas de equações diferenciais. Estes métodos são mais gerais, porém, apresentam tempo de computação e elaboração matemática maiores (Maliska, 2010).

Os métodos algébricos de geração de coordenadas são bastante poderosos e largamente empregados. Eles apresentam grandes vantagens, tais como a simplicidade e a redução do tempo computacional. Para muitas geometrias é possível a utilização desses métodos (Maliska, 2010). Neste trabalho, utiliza-se a interpolação de Lagrange para a geração da malha.

Para a interpolação de Lagrange, considere $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ o vetor posição de um ponto genérico e sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ os vetores posição de dois pontos pertencentes a uma mesma linha ξ ,

conforme mostrado na Fig. 1, sendo I o número de linhas coordenadas que interceptam essa linha ξ (Thompson et al., 1985; Maliska, 2010).

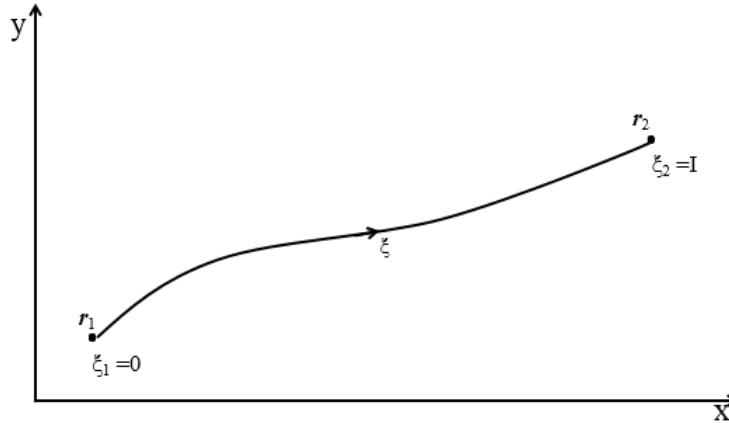


Figura 1: Interpolação unidimensional (adaptado de Maliska (2010))

Deseja-se determinar as coordenadas das interseções, uma vez que elas serão os pontos da malha. O polinômio de interpolação genérico (Thompson et al., 1985; Maliska, 2010) é dado por

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) \mathbf{r}_n, \quad (2)$$

sendo $\mathbf{r}(\xi)$ os vetores posições dos pontos interpolados, $\mathbf{r}_n$ os pontos fornecidos por onde passará o polinômio, N a ordem do polinômio e ϕ_n definida como

$$\phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) = \prod_{k=1}^N \frac{\xi - \xi_k}{\xi_n - \xi_k}, \quad (3)$$

com $k \neq n$. As seguintes propriedades podem ser demonstradas para a função ϕ :

1. $\phi_n \left(\frac{\xi_m}{I} \right) = \delta_{mn}$, sendo o símbolo $\delta_{m,n}$ denominado delta de Kronecker e definido como

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases};$$
2. $\mathbf{r}(\xi_m) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\frac{\xi_m}{I} \right) \mathbf{r}_n = \sum_{n=1}^N \delta_{mn} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_m$.

3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A transformação (mesmo que numérica) entre o sistema de coordenadas original (normalmente o cartesiano) e o sistema de coordenadas generalizadas, coincidente com a geometria irregular, permite o mapeamento da geometria irregular, escrita no sistema (x, y) em uma geometria regular no sistema (ξ, η) , conforme mostra a Fig. 2 (Ferziger e Peric, 2002; Maliska, 2010).

Em casos simples, pode-se determinar relações analíticas da transformação de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas. Porém, na maior

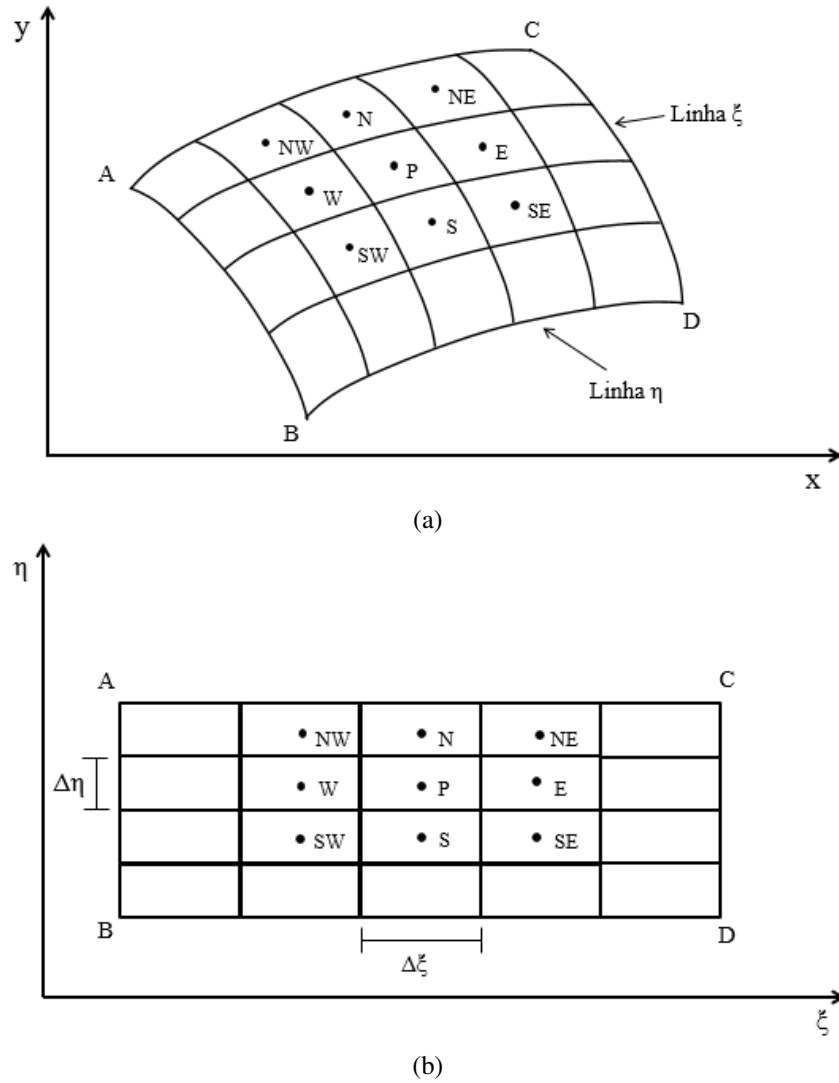


Figura 2: Domínio (a) físico e (b) transformado (adaptado de Maliska (2010))

parte dos casos, existirá apenas uma tabela associando os valores discretos do plano físico (x, y) a valores discretos do plano transformado (ξ, η) (Maliska, 2010). Esta tabela, na realidade, se constitui na malha obtida por um gerador.

Na transformação de coordenadas, é necessário conhecer em quais parâmetros estão embutidas as informações da forma e do tamanho real do domínio de cálculo (Maliska, 2010). As coordenadas curvilíneas de um ponto são relacionadas ao sistema cartesiano pelas equações de transformação do tipo:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

As informações sobre a geometria física são fornecidas ao programa computacional pelas métricas da transformação dadas pela Eq. (4), que aparecem nas equações de conservação transformada (Maliska, 2010).

Considerando $f = f(\xi, \eta)$, pela regra da cadeia, tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (6)$$

Substituindo f por x e y na Eq. (5), obtém-se:

$$\xi_x = y_\eta J, \quad (7)$$

$$\eta_x = -y_\xi J, \quad (8)$$

e, substituindo f por x e y na Eq. (6), tem-se:

$$\xi_y = -x_\eta J, \quad (9)$$

$$\eta_y = x_\xi J, \quad (10)$$

sendo $J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$ o jacobiano da transformação.

A matriz jacobiana da transformação de coordenadas é dada por

$$J_1 = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}, \quad (11)$$

cujos elementos são as métricas da transformação do sistema (x, y) para o sistema (ξ, η) , obtidas pelo teorema da função inversa. Estas grandezas são necessárias na equação transformada. De acordo com Maliska (2010), admite-se a existência da inversa da transformação dada por

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}, \quad (12)$$

em que as métricas da transformação inversa são dadas por

$$y_\eta = \frac{\xi_x}{J}, \quad (13)$$

$$y_\xi = -\frac{\eta_x}{J}, \quad (14)$$

$$x_\eta = -\frac{\xi_y}{J}, \quad (15)$$

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{J}. \quad (16)$$

A matriz Jacobiana da transformação inversa é dada por

$$J_2 = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}. \quad (17)$$

O jacobiano J da transformação está relacionado com o determinante da matriz Jacobiana da transformação inversa da seguinte forma:

$$J = \det(J_1) = \frac{1}{\det(J_2)} = (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)^{-1}. \quad (18)$$

Como a Eq. (12) fornece os valores de x e y e, portanto, permite calcular diretamente os elementos da matriz jacobiana (17), o jacobiano é então calculado usando-se a expressão dada pela Eq. (18).

4 MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

4.1 Modelo matemático

Considera-se o problema linear de condução de calor bidimensional, em regime permanente, em coordenadas cartesianas, governado pela equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = S. \quad (19)$$

Na Eq. (19), as variáveis x e y são as coordenadas espaciais e T é a temperatura. O domínio de cálculo deste problema, ilustrado na Fig. 3, é definido por:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 & \text{se } 0 \leq y \leq 0,5; \\ 0 \leq x \leq 0,5 & \text{se } 0,5 < y \leq 1 \end{cases} \quad (20)$$

e

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 0,5; \\ 0 \leq y \leq 0,5 & \text{se } 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \quad (21)$$

e o termo fonte é $S = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$.

As condições de contorno são dadas por:

$$\begin{cases} T(x, 0) = T(0, y) = 0 \\ T(x, 1) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ T\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ T(1, y) = \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), & \text{se } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ T\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), & \text{se } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (22)$$

A solução analítica é dada por:

$$T(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right). \quad (23)$$

A equação governante transformada é expressa como (Ferziger e Peric, 2002; Maliska, 2010):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] = \frac{S}{J}, \quad (24)$$

sendo $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$ e $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$ as componentes do tensor métrico em duas dimensões.

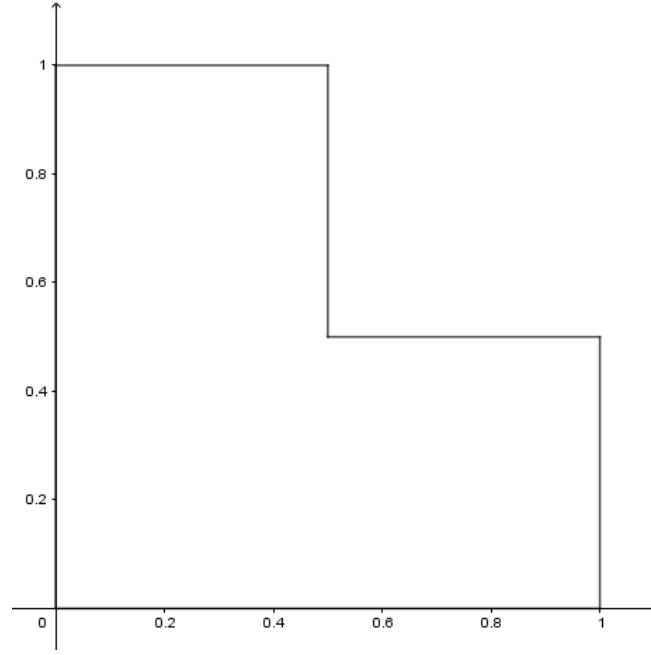


Figura 3: Domínio de cálculo

4.2 Modelo numérico

A Fig. 4 apresenta uma malha gerada, empregando-se interpolações de Lagrange (Thompson, 1985).

Integrando-se a Eq. (24) sobre o volume de controle P , no plano transformado, gera-se uma discretização em volumes finitos (Fortuna, 2000; Ferziger e Peric, 2002; Versteeg e Malalasekera, 2007; Maliska, 2010), que resulta na expressão:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right]_w^e \Delta \eta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \left(\gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right]_s^n \Delta \xi = \frac{S}{J} \Delta \xi \Delta \eta, \quad (25)$$

sendo w , e , s e n as faces oeste, leste, sul e norte do volume P , respectivamente, conforme mostra a Fig. 5.

Aproximando as derivadas da Eq. (25) por diferenças centrais, obtém-se:

$$\begin{aligned} & J_e \alpha_e \frac{T_E - T_P}{\Delta \xi} \Delta \eta - J_w \alpha_w \frac{T_P - T_W}{\Delta \xi} \Delta \eta - J_e \beta_e \frac{T_N + T_{NE} - T_S - T_{SE}}{4 \Delta \eta} \Delta \eta + \\ & J_w \beta_w \frac{T_N + T_{NW} - T_S - T_{SW}}{4 \Delta \eta} \Delta \eta + J_n \gamma_n \frac{T_N - T_P}{\Delta \eta} \Delta \xi - J_s \gamma_s \frac{T_P - T_S}{\Delta \eta} \Delta \xi - \\ & J_n \beta_n \frac{T_E + T_{NE} - T_W - T_{NW}}{4 \Delta \xi} \Delta \xi + J_s \beta_s \frac{T_E + T_{SE} - T_W - T_{SW}}{4 \Delta \xi} \Delta \xi = S_P \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_P}. \end{aligned} \quad (26)$$

A Eq. (26) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} a_p T_p &= a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + a_{sw} T_{SW} + a_{se} T_{SE} + a_{nw} T_{NW} + \\ & a_{ne} T_{NE} + b_p = \sum_{nb} a_{nb} T_{NB} + b_p, \end{aligned} \quad (27)$$

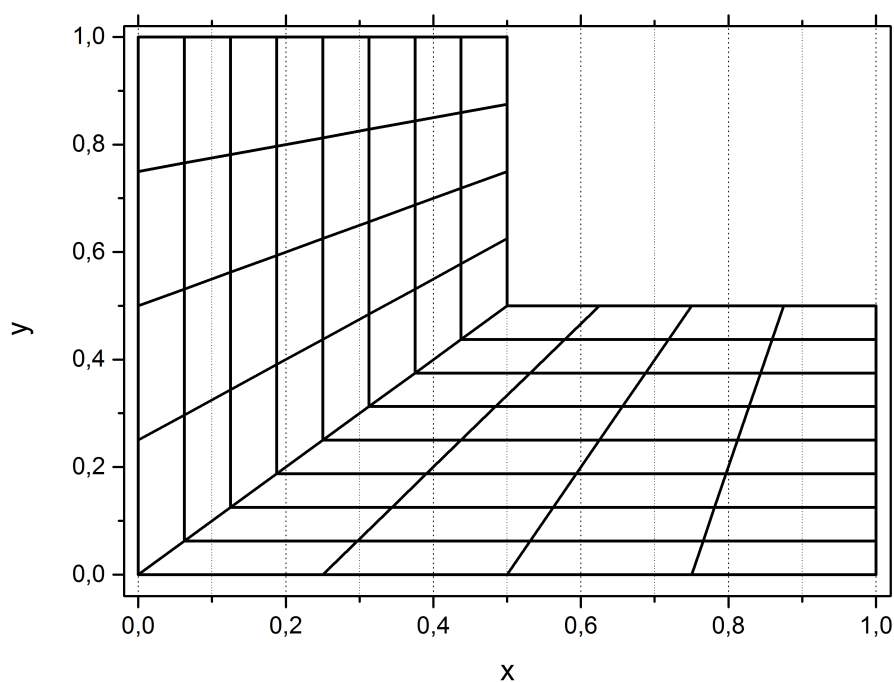


Figura 4: Malha gerada utilizando interpolações de Lagrange com 8 volumes nas direções ξ e η

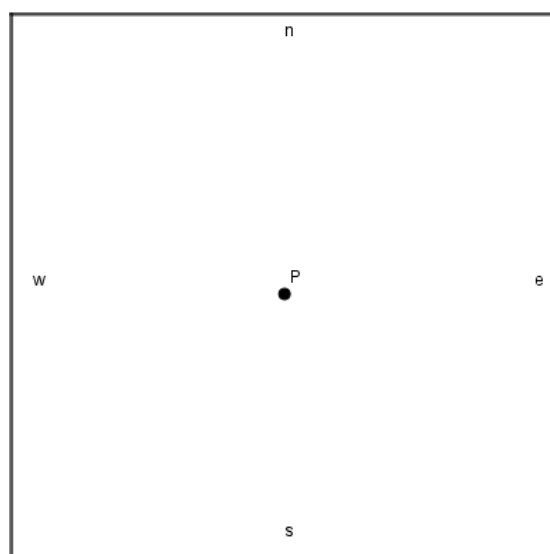


Figura 5: Volume de controle

sendo

$$a_w = J_w \alpha_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + \frac{1}{4} J_n \beta_n - \frac{1}{4} J_s \beta_s, \quad (28)$$

$$a_e = J_e \alpha_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} - \frac{1}{4} J_n \beta_n + \frac{1}{4} J_s \beta_s, \quad (29)$$

$$a_s = J_s \gamma_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + \frac{1}{4} J_e \beta_e - \frac{1}{4} J_w \beta_w, \quad (30)$$

$$a_n = J_n \gamma_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} - \frac{1}{4} J_e \beta_e + \frac{1}{4} J_w \beta_w, \quad (31)$$

$$a_{sw} = -\frac{1}{4} J_w \beta_w - \frac{1}{4} J_s \beta_s, \quad (32)$$

$$a_{se} = \frac{1}{4} J_e \beta_e + \frac{1}{4} J_s \beta_s, \quad (33)$$

$$a_{nw} = \frac{1}{4} J_w \beta_w + \frac{1}{4} J_n \beta_n, \quad (34)$$

$$a_{ne} = -\frac{1}{4} J_e \beta_e - \frac{1}{4} J_n \beta_n, \quad (35)$$

$$b_p = -S_p \frac{\Delta \xi \Delta \eta}{J_p} \quad (36)$$

e

$$a_p = J_e \alpha_e \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + J_w \alpha_w \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} + J_n \gamma_n \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + J_s \gamma_s \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} = \sum_{nb=1}^8 a_{nb}, \quad (37)$$

em que nb representa os 8 volumes vizinhos a P .

Neste trabalho, as condições de contorno de Dirichlet foram aplicadas mediante a técnica dos volumes fictícios (Maliska, 2010).

5 MÉTODO MULTIGRID

Os métodos iterativos básicos, tais como Gauss-Seidel e Jacobi, são eficientes na suavização das componentes de alta frequência (oscilatórios) em malhas refinadas nas primeiras iterações. Porém, após algumas iterações o processo torna-se lento, sinalizando a predominância de modos de baixa frequência (suaves) (Briggs et al., 2000). Neste momento é recomendável transferir as informações para a malha imediatamente mais grossa, pois os modos de erros suaves tornam-se mais oscilatórios e o esquema de relaxação será mais eficiente (Wesseling, 1992; Briggs et al., 2000; Trottenberg et al. 2001).

O método *multigrid* percorre um conjunto de malhas com diferentes espaçamentos. Com um *solver* executam-se iterações em cada nível de malha até atingir o critério de convergência especificado para o sistema de equações na malha mais fina. A sequência com que as diversas malhas são percorridas é denominada de ciclo *multigrid*. Em Wesseling (1992) e Trottenberg et al. (2001) podem ser vistos detalhes dos ciclos V, W, F, entre outros. Assim, o método *multigrid* melhora a taxa de convergência de *solvers* iterativos empregados na resolução de sistemas lineares (Tannehill et al., 1997; Briggs et al., 2000). Isto ocorre porque o método *multigrid*, associado a um método iterativo, suaviza o erro e corrige a solução em diferentes tamanhos de malhas.

Os operadores que transferem informações da malha fina Ω^h para a malha imediatamente mais grossa Ω^{2h} são chamados de operadores de restrição, denotados genericamente por I_h^{2h} , com h e $2h$ denotando malha fina e grossa, respectivamente.

Uma prática comum para restringir o resíduo (Kumar et al., 2009) é somar os resíduos relativos dos volumes de controle da malha fina que correspondem àquele da malha mais grossa, ou seja,

$$I_h^{2h} \phi^h = \phi_{i,j}^{2h} = \phi_{i,j}^h + \phi_{i+1,j}^h + \phi_{i,j+1}^h + \phi_{i+1,j+1}^h. \quad (38)$$

Os operadores que transferem informações da malha grossa Ω^{2h} para a malha fina Ω^h são chamados de operadores de prolongação, também conhecidos como interpolação, são denotados genericamente por I_{2h}^h . O operador de prolongação que foi utilizado neste trabalho foi o operador de interpolação bilinear. A interpolação bilinear é um dos operadores de prolongação mais comuns na literatura (Wesseling, 1992). As expressões para a prolongação bilinear da propriedade ϕ são dadas por:

$$I_{2h}^h \phi^{2h} = \begin{cases} \phi_{i,j}^h = \frac{9\phi_{i,j}^{2h} + 3\phi_{i-1,j}^{2h} + 3\phi_{i,j-1}^{2h} + \phi_{i-1,j-1}^{2h}}{16} \\ \phi_{i+1,j}^h = \frac{9\phi_{i,j}^{2h} + 3\phi_{i+1,j}^{2h} + 3\phi_{i,j-1}^{2h} + \phi_{i+1,j-1}^{2h}}{16} \\ \phi_{i,j+1}^h = \frac{9\phi_{i,j}^{2h} + 3\phi_{i-1,j}^{2h} + 3\phi_{i,j+1}^{2h} + \phi_{i-1,j+1}^{2h}}{16} \\ \phi_{i+1,j+1}^h = \frac{9\phi_{i,j}^{2h} + 3\phi_{i+1,j}^{2h} + 3\phi_{i,j+1}^{2h} + \phi_{i+1,j+1}^{2h}}{16} \end{cases}. \quad (39)$$

6 RESULTADOS

O algoritmo foi implementado na linguagem Fortran 2003, versão 11.1 da Intel com precisão dupla. As simulações foram realizadas num microcomputador com processador Intel(R) Core(TM) i7-3770, CPU 3.40 GHz, 8 GB RAM e sistema operacional Windows xp 64 bits.

O sistema de equações algébricas representado pela Eq. (27) foi resolvido com o método *multigrid* geométrico (Wesseling, 1992; Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001), usando-se o esquema de correção CS. O tipo de ciclo utilizado foi o ciclo V. O processo de restrição é feito somando-se os resíduos relativos dos volumes de controle da malha fina que correspondem àquele da malha mais grossa. A prolongação é feita através de interpolação bilinear. Neste trabalho, utilizou-se a razão de engrossamento de malhas padrão, ou seja, $r = 2$. O *solver* utilizado foi o método de Gauss-Seidel lexicográfico (Burden e Faires, 2003). Neste trabalho, o número de iterações empregadas na pré-suavização, ν_1 , é igual na pós-suavização, ν_2 , sendo $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 3$. O número de incógnitas é dado por $N = N_\xi N_\eta$, sendo N_ξ e N_η o número de volumes na direção ξ e η , respectivamente.

As Tabelas 1 e 2 apresentam, respectivamente, resultados do *multigrid* e *singlegrid* para o erro numérico da temperatura média e para o erro numérico da norma infinito. Para obter estes resultados, o processo iterativo foi levado até que o erro de iteração atingisse o erro de máquina.

Pode-se observar que, tanto para o *multigrid* quanto para o *singlegrid*, o erro numérico da temperatura média e o erro numérico da norma infinito são praticamente iguais, uma propriedade desejável. Além disso, pode-se observar que o comportamento do erro de discretização (Ferzig e Peric, 2002; Tannehill, 1997) para as variáveis estudadas está de acordo com o esperado, ou seja, diminui com o refino da malha.

Daqui para frente, o critério de parada usado para interromper o processo iterativo da variável de interesse (temperatura) é a norma L1 do resíduo na iteração atual adimensionalizada pelo

Tabela 1: Dados do *multigrid*

L	N	Erro numérico da temperatura média	Erro numérico da norma infinito
2	4x4	5,4133471599E-03	8,2418758948E-03
3	8x8	2,4144156220E-03	8,0998745230E-03
4	16x16	1,0739848980E-03	6,0168246569E-03
5	32x32	4,8881962698E-04	3,6202176360E-03
6	64x64	2,2940267167E-04	1,9830399602E-03
7	128x128	1,1043420200E-04	1,0372815627E-03
8	256x256	5,4065120527E-05	5,3035851433E-04
9	512x512	2,6730492486E-05	2,6814960721E-04
10	1024x1024	1,3287351704E-05	1,3482372918E-04

Tabela 2: Dados do *singlegrid*

N	Erro numérico para temperatura média	Erro numérico da norma infinito
4x4	5,4133471599E-03	8,2418758948E-03
8x8	2,4144156220E-03	8,0998745230E-03
16x16	1,0739848980E-03	6,0168246569E-03
32x32	4,8881962697E-04	3,6202176360E-03
64x64	2,2940267167E-04	1,9830399602E-03
128x128	1,1043420196E-04	1,0372815627E-03
256x256	5,4065120370E-05	5,3035851425E-04
512x512	2,6730491854E-05	2,6814960689E-04

resíduo na estimativa inicial (Trottenberg et al., 2001). A Fig. 6 apresenta o comportamento de tal critério para um problema com $N = 128 \times 128$.

Pode-se observar que, para o caso *multigrid*, o resíduo adimensionalizado atinge o erro de máquina com poucas iterações.

A Tabela 3 apresenta a temperatura média e a sua norma infinito do erro numérico para o caso do *multigrid*. Nesta tabela foi utilizado uma tolerância fixa igual 10^{-12} para obter os resultados.

Observa-se que, a partir de um certo tamanho de problema, o número de iterações (número

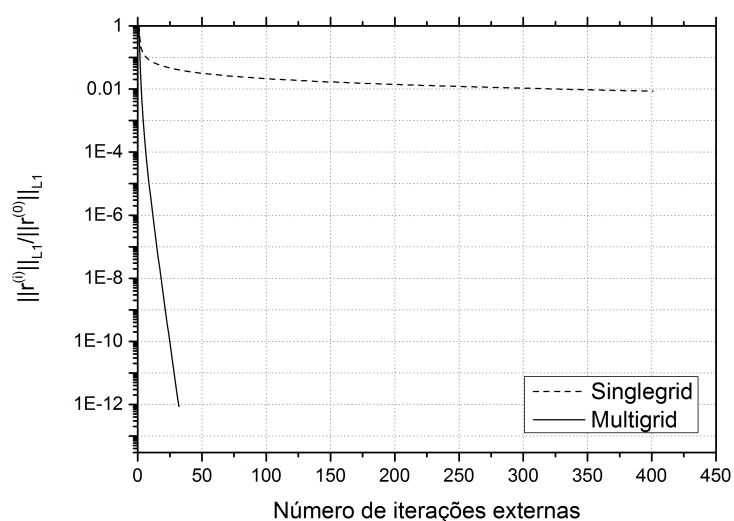


Figura 6: Queda da norma L_1 do resíduo na iteração atual adimensionalizada pelo resíduo na estimativa inicial

Tabela 3: Erro da temperatura média e norma infinito do erro numérico

L	N	Iterações	Erro da temperatura média	Norma infinito do erro
2	4x4	6	5,4133471599E-03	8,24187589481E-03
3	8x8	10	2,4144156220E-03	8,09987452242E-03
4	16x16	17	1,0739848980E-03	6,01682465691E-03
5	32x32	23	4,8881962698E-04	3,62021763677E-03
6	64x64	28	2,2940267167E-04	1,98303995947E-03
7	128x128	31	1,1043420200E-04	1,03728155752E-03
8	256x256	32	5,4065120527E-05	5,30358504297E-04
9	512x512	32	2,6730492486E-05	2,68149593178E-04
10	1024x1024	32	1,3287351704E-05	1,34823715098E-04

de ciclos) fica constante, ou seja, grosseiramente o número de iterações independe do tamanho do problema (Ferziger e Peric, 2002).

A Figura 7 apresenta os tempos de CPU do *multigrid* e do *singlegrid*. A tolerância utilizada também foi 10^{-12} .

Pode-se observar que, de acordo com Ferziger e Peric (2002), quanto mais fina a malha, ou seja, quanto maior o número de volumes de controle, maior é a vantagem do método *multigrid* em relação ao método *singlegrid*.

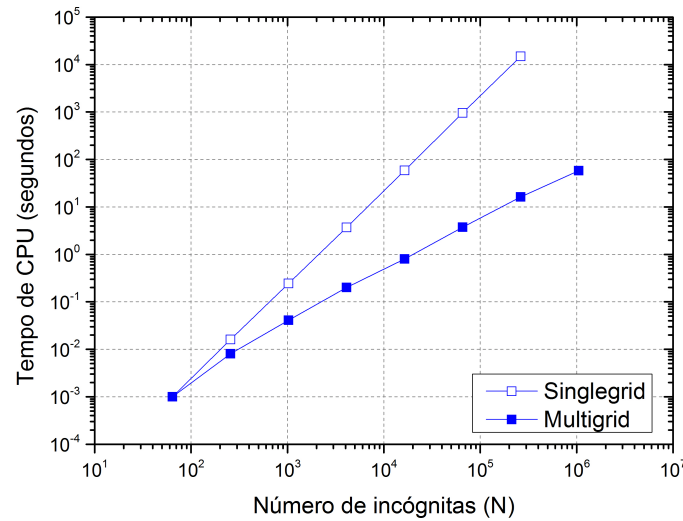


Figura 7: Tempo de CPU versus número de incógnitas para o multigrid e singlegrid

Para cada curva da Fig. 7, foi feito o ajuste tempo de CPU:

$$tCPU(N) = cN^p, \quad (40)$$

onde N é tamanho do problema, $tCPU$ é o tempo de CPU, p representa a ordem de complexidade (a inclinação de cada curva na escala bilogarítmica) e c é uma constante que depende do *solver*. Para o método *multigrid* ideal, $p = 1$, significando que o esforço computacional cresce linearmente com o tamanho da malha (Trottenberg et al., 2001).

Os coeficientes c e p obtidos do ajuste de curva para cada método são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Coeficientes c e p para os métodos *singlegrid* e *multigrid*

Problema	SG		MG	
	c	p	c	p
Poisson	2,43E-07	1,99056	3,05E-05	1,05048

Os valores obtidos para o expoente p através do ajuste de curvas estão conforme esperado (Wesseling, 1992; Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001), ou seja, próximo de 1 para o *multigrid* e próximo de 2 para o *singlegrid*.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, o modelo matemático considerado é um problema bidimensional linear de condução de calor, governado pela equação de Poisson com condições de contorno de Dirichlet. O domínio de cálculo é no formato de L. As malhas não-ortogonais estruturadas foram geradas com interpolações de Lagrange. A equação governante foi transformada do sistema cartesiano para o sistema generalizado. A equação transformada foi discretizada usando o MVF. O sistema

de equações algébricas foi resolvido com o emprego do *solver* Gauss-Seidel. Para acelerar a convergência do esquema iterativo utilizou-se o método multigrid com esquema CS e ciclo V.

Com base nos resultados deste trabalho, verificou-se que:

1. O erro de discretização diminui com o refino da malha;
2. O resíduo adimensionalizado obtido usando o método *multigrid* atinge o erro de máquina com poucas iterações;
3. A partir de um certo tamanho de problema o número de ciclos V fica constante;
4. O desempenho do *multigrid* melhora significativamente nas malhas mais refinadas com relação ao *singlegrid*;
5. O valor obtido para o expoente p da Eq. (40) foi 1,05048 para o *multigrid* e 1,99056 para o *singlegrid*. Esses valores concordam com aqueles da literatura.

8 AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece à Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) pelo afastamento integral de atividades docentes para qualificação. O segundo autor agradece ao CNPq por recursos financeiros de projeto. Os autores agradecem ao Laboratório de Experimentação Numérica (LENA) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia pela infraestrutura.

REFERÊNCIAS

- Briggs, W. L., Henson, V. E., & McCormick, S. F., 2000. *A Multigrid Tutorial*. 2. ed. SIAM.
- Burden, R., Faires, J., 2003. *Análise numérica*. Pioneira Thomson Learning.
- Ferziger, J. H., & Peric, M., 2002. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. ed. Springer.
- Fortuna, A. O., 2000. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. Edusp.
- Kumar, D. S., Kumar, K.S., & Das, M. K., 2009. A Fine Grid Solution for a Lid-Driven Cavity Flow Using Multigrid Method. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, vol. 3, n. 3, pp. 336-354.
- Maliska, C. R., 2010. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacionais*. 2. ed. LTC.
- Tannehill, J. C., Anderson, D. A., & Pletcher, R. H., 1997. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis.
- Thompson, J. F., Warsi, Z. U.A., & Mastin, C. W., 1985. *Numerical grid generation: foundations and applications*. North-holland.
- Trottenberg, U., Oosterlee, C. W., & Schuller, A., 2001. *Multigrid*. Academic Press.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W., 2007. *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*. 2. ed. Pearson.
- Wesseling, P., 1992. *An introduction to Multigrid Methods*. John Wiley & Sons.