



A SIMPLE TECHNIQUE OF CAVITIES CREATION TO SOLVE TOPOLOGY OPTIMIZATION PROBLEMS USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

Hélio Luiz Simonetti

helio.simonetti@ifmg.edu.br

Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG

Campus Betim, Rua Itamarati, 140, São Caetano Betim, MG-Brasil, 32677-564

Valério Silva Almeida

valerio.almeida@usp.br

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)

São Paulo – SP-Brasil.

Francisco de Assis das Neves

fassis@em.ufop.br

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, 35400-000, Ouro Preto-MG-Brasil.

Vitor Manuel A. Leitão

vitor.leitao@tecnico.ulisboa.pt

CERIS – Instituto Técnico de Lisboa, Universidade de Lisboa, Av. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

Abstract. *This present paper approaches the topology optimization in plane linear elasticity problems considering minimizing the volume with stress constraint via Boundary Element Method (BEM). For this proposal, the method (ESO) Evolutionary Structural Optimization is coupled to BEM to perform the optimization process. This optimization procedure is based on the gradual removal of internal points, with smaller stresses, compared to the maximum stress of the structure this procedure is called "hard-kill". Thus, is created cavities surrounding internal points that Von Mises stresses are lower using the ESO removal criterion, generating a hole around this point that are hexagonal polygons whose sides are linear elements which are included in the influence equations that result in the final linear system. The process is repeated until the final topology is reached. This research presents some examples that show the efficiency and effectiveness of the implemented topology optimization formulation.*

Keywords: *Evolutionary Structural Optimization, Topology Optimization, Boundary Element Method.*

1 INTRODUÇÃO

A Otimização Topológica é um método para descobrir uma distribuição ótima de material dentro do domínio de projeto predefinido. O problema de otimização de topologia inclui função objetivo, domínio de projeto e restrições de projeto. A função objetivo representa o objetivo do método de otimização, que é definido como minimização ou maximização. Assim, é importante determinar a configuração ótima de projeto que atendam determinados objetivos e restrições, isto é, determina uma conectividade ótima para a estrutura extremizando a função objetivo e respeitando suas restrições. Por este motivo, ao longo das últimas décadas, um grande número de pesquisadores tem se dedicado ao desenvolvimento de técnicas de otimização de topologia. Essas técnicas podem ser divididas em dois grupos: a) *Microestrutural* (material) - Na abordagem microestrutural, o problema é representado por um projeto inicial que é discretizado com uma malha adequada de Elementos Finitos (EF). O procedimento de otimização consiste em determinar se cada elemento no contínuo deve conter material ou não. Para este fim, a densidade de material dentro de cada elemento finito é utilizada como uma variável de projeto definida entre os limites 1 ($\rho = 1$, material sólido) e 0 ($\rho = 0$, vazio), este problema é conhecido como o problema 0 - 1. Essa formulação, no entanto, tem sido relatada como dependente da malha e instável, Bendsøe (1995). Isto é, os verdadeiros resultados ótimos podem conter cavidades infinitesimais de áreas cinzentas ($0 < \rho < 1$ densidades intermediárias) que não são realizadas usando modelo 0 - 1. Entre os métodos de otimização com esta abordagem podemos citar: *Homogenization-Based Optimization (HBO)* e o *Solid Isotropic Microstructure with Penalty (SIMP)* e b) *Macroestrutural* (geométrica) - Nesta abordagem a topologia da estrutura é modificada através da inserção de furos no domínio. Como exemplo deste grupo de OT podemos citar: o *Evolutinary Structural Optimization (ESO)* que é baseado no cálculo da função objetivo quando um elemento é removido da malha de elementos finitos e o *Topological Sensitivity Analysis (TSA)* que é baseado em uma função escalar, denominada Derivada Topológica, que fornece para cada ponto do domínio de definição do problema a sensibilidade da função objetivo quando um pequeno furo é criado, Labanowski *et al.* (2004).

A partir das diferentes técnicas de otimização de topologia apresentadas, o método de ESO, Xie e Steven (1997) é escolhido como base para a atual pesquisa. A abordagem clássica do ESO, Xie e Steven (1993) baseia-se na ideia de remover material ineficiente de um domínio. O processo de remoção é realizado excluindo as regiões tomadas por elementos com baixas tensões. Ao repetir este processo e remover pequenas quantidades de material em cada estágio, a topologia da estrutura evolui gradualmente para uma estrutura mais eficiente. Seguindo esta abordagem básica, desde então, houve uma série de modificações e refinamentos, como o BESO, Querin *et al.* (1998), onde não só os elementos são removidos, mas também são adicionados em áreas de alta tensão. Dentre as várias aplicações do ESO, Steven *et al.* (2002) cobrem várias situações físicas considerando os termos de sensibilidade à modificação de elementos. Essas sensibilidades são usadas para gerar o processo de remoção e adição, a fim de atingir um mínimo (ou máximo) da função objetivo.

No entanto, o método ESO tem algumas desvantagens, principalmente aquelas relacionadas aos critérios de rejeição, como foi relatado por Zhou e Rozvany (2001). Outra desvantagem, comum em otimização estrutural baseada em MEF, é a presença de configurações na forma de um tabuleiro de xadrez, Li *et al.* (2001). Estes referem-se ao fenômeno da presença alternada de elementos vazios e sólidos ordenados como um tabuleiro de xadrez

(checkerboard). Tais padrões resultam em imprecisões de análise estrutural que complicam a interpretação da distribuição ótima de material e a extração da geometria. A formação do tabuleiro de xadrez está relacionada ao uso de elementos de baixa ordem nas aproximações dos elementos finitos. A solução deste problema está no uso de elementos finitos de alta ordem que são capazes de reduzir este fenômeno pagando para isso um alto custo computacional. Neste sentido, podemos citar os trabalhos de Díaz e Sigmund (1995), Jog e Haber (1996), Sigmund (1997), Sigmund e Petersson (1998), Zhou *et al.* (2001), Bendsøe e Sigmund (2003). De outra forma, Kim *et al.* (2000) propõe um algoritmo de criação de cavidade inteligente (CCI) baseado no ESO, no qual padrões de xadrez (com inúmeras cavidades) podem ser eliminados através do controle do número de cavidades estruturais na topologia final.

O MEC é uma alternativa bastante atraente em relação MEF na análise estrutural porque requer a discretização somente no contorno da estrutura. Essa redução da dimensionalidade do problema simplifica consideravelmente a tarefa de reconstrução da malha. Além disso, o MEC evita a aproximação no contorno, o que é o caso das abordagens de tipo de grade fixa normalmente empregada. Desta forma, suas soluções de tensões no contorno são rápidas e robustas e o tornam uma escolha natural no campo da otimização de forma e topologia. Neste sentido, alguns pesquisadores acoplaram o MEC a um programa de otimização.

Cervera e Trevelyan (2005) usaram o acoplamento ESO-MEC para otimização estrutural de problemas de duas e três dimensões. O algoritmo desenvolvido cria buracos no domínio da estrutura durante o processo de otimização baseado no critério de tensão de von Mises. O conceito de derivada topológica baseado em elementos de contorno foi utilizado por Cisilino (2006) e Marczak (2007) para a otimização de topologia em problemas de potencial, esses dois trabalhos tem toda fundamentação teórica baseada na derivada topológica apresentada por Novotny *et al.* (2003), que propôs uma nova abordagem da análise de sensibilidade topológica. Neches e Cisilino (2008), propõem a otimização via MEC usando uma formulação direta. O modelo é discretizado por elementos lineares e uma distribuição de pontos internos no domínio. A energia potencial total é selecionada como função objetivo. A avaliação da derivada topológica nos pontos internos é realizada como um procedimento pós-processamento. Em seguida, remove-se os pontos internos com valores mais baixos da derivada topológica. Um algoritmo de "triangulação", capaz de detectar "furos", é usado para reconstrução da malha e da nova geometria. O procedimento é repetido até que um determinado critério de parada seja satisfeito. A estratégia mostrou-se flexível e robusta. Em todos os métodos discutidos, um mecanismo adicional é sempre necessário para lidar com mudanças topológicas, ou seja, a fusão de buracos entre si ou com o contorno durante as iterações de otimização. Além disso, a geometria em evolução e a topologia ótima também exibem bordas irregulares.

Na última década, vários pesquisadores usaram o MEC para otimização de topologia acoplando-o Level Set Method (LSM) podemos destacar os trabalhos de Abe *et al.* (2007), Allaire e Jove (2008), Yamada *et al.* (2010,2013), Yamasaki *et al.* (2011), Ullah e Trevelyan (2013), Isakari *et al.* (2014) e Ullah *et al.* (2014,2015,2016). Abe *et al.* (2007) foi o primeiro a acoplar o LSM ao MEC. O LSM é usado como uma distância entre o limite e os pontos internos, enquanto o MEC é usado para calcular as tensões e deformações, os elementos de contorno são criados quando a distância é mínima, isto é, zero. Allaire e Jove (2008), combinaram derivada de forma e topológica para apresentar uma metodologia LSM de inserção de buracos automaticamente onde a derivada de forma foi usada para definir os campos de velocidades e a

derivada topológica usada para localizar a região de inserção de buracos. Yamada *et al.* (2010,2013) usaram LSM para a otimização topológica de estruturas 3D. Neste procedimento, o Conjunto de Nível da Função (LS) é usado para controlar o contorno ótimo da estrutura, a sensibilidade é usada para atualizar a função LS e os multiplicadores de Lagrange que estiverem presentes. O procedimento é repetido até as restrições sejam satisfeitas e a função LS seja praticamente constante. Yamasaki *et al.* (2011,2013) propuseram o acoplamento LSM-MEC onde as coordenadas dos elementos de contorno são substituídas por funções nodais do LSM e as coordenadas nodais da malha Euleriana que mantêm a evolução da função LS. Esta substituição das coordenadas gera uma imersão na malha Euleriana, então a formulação é denominada "BEM-immersed". A imersão elimina os problemas de escala de cinza, tabuleiro de damas e outras dificuldades numéricas comuns em problemas de otimização topológica. Isakari *et al.* (2014) utilizou o acoplamento LSM-MEC em aplicações de um método multipolar rápido (FMBEM). Nesse trabalho, eles investigaram um método de OT para problemas de dispersão de ondas escalares tridimensionais que podem ser definidos em um domínio ilimitado. Ullah *et al.* (2014,2015,2016) utilizaram um procedimento evolutivo de otimização de topologia com acoplamento LSM-MEC e aplicaram em problemas 2D e 3D. O método tem a capacidade de inserir automaticamente cavidades e o zero LS descreve as geometrias externas e internas da estrutura. O procedimento é aplicado a problemas 2D e o limite é representado por curvas B-spline racionais não-uniformes (NURBS). Os movimentos de fronteira no método tridimensional de otimização baseado em LS permitem a formação de nucleação automática de furos através da interseção de duas superfícies movendo-se umas para as outras. No entanto, para suavização da malha foi utilizado "HC-Laplacian" que é um algoritmo útil que supera a perda volumétrica associada a algoritmos mais simples. Isso elimina a necessidade de uma ferramenta de discretização adicional e fornece um vínculo natural entre a geometria implicitamente representada e seu modelo estrutural ao longo do processo de otimização.

O presente trabalho propõe o acoplamento do método ESO-MEC para otimização de topologia, a geometria ótima é descrita pela distribuição das tensões no domínio da solução realizando apenas otimização topológica sem a realização da otimização de forma. Assim, evita-se o uso de gradientes, como no Método Level Set (MLS), que possuem um grau maior de dificuldade na sua implementação pois requer uma eficiência no cálculo dos gradientes o que nem sempre é possível. Apesar do algoritmo proposto ser dependente da malha de pontos internos, isto é, aumenta o custo computacional com o aumento do número de pontos internos a precisão do MEC para calcular as tensões em pontos internos proporciona uma topologia ótima usando uma malha menos densa de pontos internos. A cavidade hexagonal é criada automaticamente em torno dos pontos onde a tensão de von Mises atende ao critério de remoção ESO. Escolheu-se a cavidade hexagonal pois ela permite que a conectividade dos nós no domínio da estrutura seja realizada com mais facilidade que outras geometrias e apresenta menor angulosidade do que as geometrias triangulares e quadrangulares. A técnica proposta é bem simples e mostrou-se eficiente e robusta nos exemplos numéricos avaliados.

Este trabalho é organizado da seguinte forma: os detalhes básicos da formulação do MEC são introduzidos na seção 2, o ESO e o algoritmo implementado é desenvolvido na seção 3. Na seção 4, são apresentados os detalhes do algoritmo de inserção de cavidades no domínio. Os resultados obtidos com o programa de otimização proposto com a presente formulação são apresentados na seção 5. O artigo é finalizado com as conclusões apresentadas na seção 6.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Nesta seção são apresentadas as equações integral de contorno e a solução fundamental de Kelvin. Para desenvolvimento desta seção foram consultadas as seguintes referências: Wittmann (1983), Brebbia e Dominguez (1989), Lopes (1996), Venturini (1988) e Wutzow (2003).

2.1 O PROBLEMA DO VALOR DE CONTORNO

Devido à precisão e confiabilidade na modelagem de problemas de domínio infinitos e sua grande vantagem de se associar a outros métodos numéricos. O MEC está ganhando espaço e credibilidade nos principais centros de pesquisa. A Identidade Somigliana, Eq. (1), é o ponto de partida para a escrita das equações de contorno considerando um corpo definido por seu domínio e fronteira ($\Omega(\text{domínio}) + \Gamma(\text{contorno})$).

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega \quad (1)$$

A *Identidade Somigliana* (1) fornece os valores dos deslocamentos dos pontos internos em função dos valores de contorno e de forças de volume. Os termos u_{ij}^* e p_{ij}^* são valores de deslocamentos e forças de superfície conhecida, pois advém da resolução da equação diferencial parcial do problema elástico para certa combinação de condições de contorno. São expressões obtidas analiticamente. Caso não se considerem as forças de volume do problema em análise, a Eq. (1) é reduzida a:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \quad (2)$$

Que a não ser a parcela $u_i(s)$, as demais integrais são relativas apenas ao contorno.

Fisicamente, a solução fundamental de Kelvin corresponde à obtenção das soluções das equações de equilíbrio para um corpo homogêneo e isótropo de geometria arbitrária, sendo que os campos mobilizados de deslocamentos e tensões que ocorrem em um ponto “q” - ponto campo – devido a uma tensão unitária aplicada em “s” - ponto fonte – (source point) na direção k. O termo tensão unitária está substituindo o termo tradicional *força unitária* pois, força unitária em problemas planos resulta em tensão infinita já que a área é nula. A Fig. 1 ilustra fisicamente o problema fundamental.

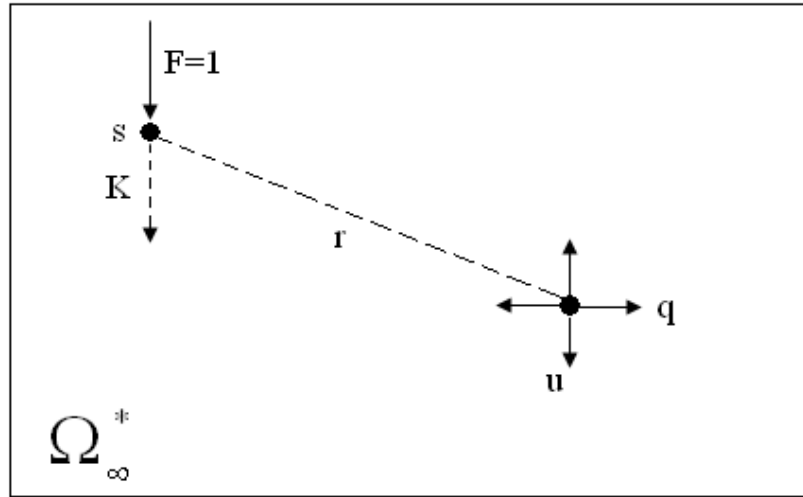


Figura 1 – Problema Fundamental

A equação integral para pontos do contorno será deduzida a partir da Identidade Somigliana, Eq. (1). Na Fig. 2 apresenta-se um contorno expandido com um semicírculo de raio ε e seja s um ponto do contorno.

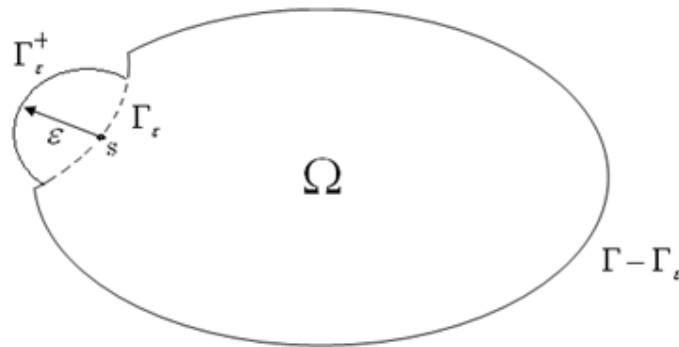


Figura 2 – Contorno Expandido bi-dimensional.

Assim, usando manipulações matemáticas da teoria dos limites, a expressão deve ser levada ao contorno e, finalmente, a equação integral para deslocamentos no contorno pode ser escrita como:

$$c_{ij}(s)u_i(s) = -VPC \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q)u_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q)p_j(q)d\Gamma \quad (3)$$

onde $VPC \int_{\Gamma} (...)d\Gamma$ indica uma equação integral avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy. Para o caso bi-dimensional com contornos suaves, como mostra a Fig. 2, $c_{ij}(s)$ assume os seguintes valores: $c_{ij}(s)u_i(s) = \frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(s)$ com δ_{ij} o delta de Kronecker. Vale ressaltar que os deslocamentos satisfazem a condição de continuidade de Hölder. A Eq. (2) fornece os

deslocamentos ou forças no contorno da estrutura quando uma das variáveis é conhecida. Quando o ponto p (ponto campo) está localizado na parte suave do contorno u_{ij}^* e p_{ij}^* são as soluções fundamentais dadas pelas equações:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (4)$$

$$p_{ij}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \quad (5)$$

Onde G é o módulo de cisalhamento e ν é o coeficiente de Poisson.

Nos problemas bidimensionais, as singularidades são de ordem zero ($\ln(1/r)$). Portanto, é possível dividir essa integral em duas partes: uma singular e outra não singular. A parte não singular é integrada numericamente utilizando-se a quadratura de Gauss convencional ou de forma analítica ambas, desenvolvida neste trabalho. A parte singular é também integrada usando a quadratura de Gauss convencional, logarítmica ou como desenvolvida neste trabalho analiticamente. Neste caso quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a outra parcela do limite dada por

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{(\Gamma_\varepsilon)} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma \right] \text{ tenderá a zero, pois, depende do produto } r \ln\left(\frac{1}{r}\right) \rightarrow 0 \text{ onde}$$

$r = |x(s) - x(p)|$ é localmente continua de Hölder, uma vez que $r \rightarrow 0$, Simonetti (2016).

Assim, para obter o sistema de equações, é suficiente a discretização da Eq. (3). Este sistema será expresso por:

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} \quad (6)$$

Onde $[H]$ e $[G]$ são as matrizes de influência. Finalmente, a Eq. (6) pode ser transformada em um sistema de equações algébricas lineares onde os valores desconhecidos dos deslocamentos e forças de superfície de contorno são agrupados no vetor coluna x , conforme a Eq. (7).

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (7)$$

Desta forma, $[A]$ é a matriz formada pelas colunas de $[H]$ e $[G]$; $\{x\}$ é o vetor que contém as variáveis (deslocamento e forças de superfície) do problema; $\{b\}$ o vetor formado pelas colunas $[H]$ e $[G]$ multiplicadas pelas condições de contorno prescritas. A resolução do sistema, Eq. (7), fornece a determinação dos valores de contorno desconhecido.

2.2 – CÁLCULO DAS TENSÕES

Para calcular as tensões nos pontos internos "p" são usadas equações constitutivas, transformadas com a aplicação da relação de deformação-deslocamento dadas pela Eq. (8).

$$\sigma_{ij}^p = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} u_{l,l} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (8)$$

Manipulando os termos de deslocamento da Eq. (8) na identidade Somigliana e desprezando o termo do domínio, obtém-se a expressão:

$$\sigma_{ij}^p = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} u_k d\Gamma \quad (9)$$

Reescrevendo a Eq. (9) em forma matricial obtém-se a expressão:

$$\{\sigma\}^p = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{ne} [D]^{ijk} \{p\}_n^k - \sum_{j=1}^{ne} [S]^{ijk} \{u\}_n^k \quad (10)$$

onde $[D]^{ijk}$ e $[S]^{ijk}$ são matrizes cujas expressões discretizadas de seus elementos são dadas por:

$$[D]^{ijk} = \begin{bmatrix} D_{111} & D_{211} \\ D_{112} & D_{212} \\ D_{122} & D_{222} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ [r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} d\Gamma \quad (11)$$

$$[S]^{ijk} = \begin{bmatrix} S_{111} & S_{211} \\ S_{112} & S_{212} \\ S_{122} & S_{222} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} & 2r_{,n} [(1-2\nu) \delta_{jk} r_{,i} + \nu (\delta_{ji} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}) + 4r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \\ & + 2\nu (n_j r_{,k} r_{,i} + n_k r_{,j} r_{,i}) \\ & + (1-2\nu) [n_i r_{,j} r_{,k} + n_k \delta_{ji} + n_j \delta_{ki}] - (1-4\nu) n_i \delta_{jk} \end{aligned} \right\} d\Gamma \quad (12)$$

onde $r_{,n}$ indica a derivada do raio na direção do vetor normal unitário do elemento.

3 ACOPLAMENTO ESO-MEC E O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

3.1 – ACOPLAMENTO ESO-MEC

Neste trabalho a OT será tratada na sua abordagem macroestrutural, isto é, geométrica. A topologia da estrutura é modificada pela inserção de cavidades no domínio e a geometria da configuração ótima é obtida pela distribuição das tensões no domínio da solução. Como exemplo deste grupo de OT pode-se citar o ESO, Xie e Steven (1996), Chu *et al.* (1996),

Christie *et al.* (1998), Liang *et al.* (2000), Reynolds *et al.* (1999), Canfield e Frecker (2000), Querin, (1997), Querin *et al.* (2000a,b), Rong *et al.* (2000), Almeida *et al.* (2013), Simonetti *et al.* (2014). Neste método, o domínio é discretizado usando uma malha de elementos finitos e os elementos submetidos a um estado de tensão de menor intensidade para a estrutura são removidos com base em critérios heurísticos de modo que a configuração ótima em última análise é obtida na forma de um subconjunto ótimo de elementos finitos.

O procedimento utilizado por Xie e Steven (1996) foi adaptado para análise de OT via MEC. Assim, os parâmetros de interesse para o problema de otimização são avaliados num processo iterativo, a fim de diminuir o volume através da utilização do critério de tensão máxima da estrutura. Deste modo, a densidade não é levada em consideração, senão $\int_{\Omega} bu^* d\Omega$

deveria ser calculada. Uma malha inicial de elementos lineares de contorno circunscreve toda a estrutura, incluindo as condições de contorno (forças, deslocamentos, cavidades e outras condições iniciais) e é definido um número de pontos internos (NPI) preenchendo todo o domínio.

Assim, o problema é resolvido de forma evolucionária numa análise elástica usando MEC; a tensão de Von Mises é calculada em cada ponto interno. Deste modo, para cada ponto interno que atende esta desigualdade 13, uma cavidade hexagonal, cujas arestas são elementos lineares de contorno é criada para fazer o buraco na estrutura.

$$\sigma_e^{vm} < RR_k \cdot (\sigma_{e,max}^{vm}) \quad (13)$$

$$RR_{k+1} = RR_k + ER \quad (14)$$

Onde σ_e^{vm} representa a tensão de von Mises em um ponto interno, $\sigma_{e,max}^{vm}$ representa a tensão máxima de Von Mises comparando todos os pontos internos da estrutura, RR é a razão de rejeição e ER é a razão evolucionária. A ER, definida na Eq. (14), é usada para controlar o processo de inclusão de cavidades no domínio. Em cada iteração o problema é resolvido elasticamente considerando as cavidades inseridas no domínio “cavidade hexagonal”, utilizando o procedimento referido no passo 3 do algoritmo resumido mostrado adiante. O mesmo ciclo de remover as cavidades usadas pela desigualdade 13 é repetido até que não haja mais regiões que satisfaçam esta desigualdade; quando isto ocorre, um estado de equilíbrio é atingido. Este procedimento é conhecido como “hard-kill” e pode ser interpretado como se segue:

$$D(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma \\ 0 & \text{se } j \in \bar{\Gamma} \end{cases} \quad (15)$$

onde $D(j)$ é a matriz constitutiva da cavidade $j \in \Omega$, D_0 é a matriz constitutiva inicial, $\Omega = \Gamma + \bar{\Gamma}$ é o domínio da estrutura, $\Gamma = \{\Omega / (\sigma_e^{vm} / \sigma_{max}^{vm}(\Omega)) \geq RR\}$ representa o domínio da estrutura onde não serão criadas as cavidades e $\bar{\Gamma} = \Omega - \Gamma = \{\Omega / (\sigma_e^{vm} / \sigma_{max}^{vm}(\Omega)) < RR\}$ representa o domínio da estrutura onde as cavidades serão inseridas e os pontos internos removidos.

Resumidamente, o algoritmo do procedimento evolucionário pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Análise de MEC – Discretizar o contorno com elementos lineares, gerar os pontos internos do domínio (NPI), definir o volume final desejado;
2. Resolver o problema elástico linear, aplicando as condições de contorno, essências e/ou naturais;
3. Determinar a tensão de Von Mises em todos os pontos internos e calcular a máxima tensão da estrutura;
4. Remover as sub-regiões que atendem a desigualdade $\sigma_e^{vm} < RR_k(\sigma_{e,max}^{vm})$;
5. Atualizar $RR = RR + ER$;
6. Enquanto $V_i > V_{final}$, repetir as etapas 3 a 6; (até que um estado de equilíbrio seja alcançado), plotar a topologia final.

3.2 – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Na abordagem macroestrutural, a topologia da estrutura é modificada pela inserção de buracos no domínio do problema. O ESO pode ser citado como um exemplo desse grupo de OT, que é baseado na solução da função objetivo quando uma região do domínio é removida. Tanskanen (2002) mostrou matematicamente que a heurística de remoção de material do ESO está associada a regiões com baixos níveis de energia de deformação e é um procedimento de minimização não explícito em relação ao seu peso se comparado a um método determinístico, como o algoritmo de otimização da técnica denominada Programação Linear Sequencial (PLS). E, de acordo com Querin (1997), o ESO é um subconjunto do método de programação Linear Inteira. As principais diferenças são que as funções de restrição de desigualdade não são limitadas por um número finito, em vez disso usa-se uma função linear ou não linear evolutiva, as restrições de desigualdade mudam ou evoluem de valor de um valor inicial zero para o valor final definido. Assim, a representação matemática generalizada para o problema de otimização através do método ESO-MEC pode ser definida como:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize } F(W, X_i) \\
 &\text{sujeito a } [H]\{U\} - [G]\{P\} = 0, \{U\} = \{\bar{U}\} \text{ em } \Gamma_u \text{ e } \{P\} = \{\bar{P}\} \text{ em } \Gamma_p \\
 &\quad \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \leq 0 \\
 &\quad \alpha * (\alpha * \sigma_e^{vm} - RR * \sigma_{e,max}^{vm}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Com $\{U\}$ e $\{P\}$ os vetores nodais de deslocamentos e forças de superfície no contorno e $\alpha \in X = \{0,1\}$ com $\alpha \in X_i$. F é a função objetivo, V é o volume da estrutura e $V_{\max}$ é o volume final prescrito. A forma do domínio Ω é representada pela variável de projeto X_i e W representa a variação dos vetores $\{U\}$ e $\{P\}$.

4 – CRITÉRIO PARA CRIAÇÃO DE CAVIDADES

Esta seção discute os critérios de inserção das cavidades, sua correlação e os detalhes de implementação. Numa análise do MEC, a tensão no domínio do projeto é calculada em pontos internos. Esses resultados são usados para orientar a inserção das cavidades no local desejado. A Eq. (14), além de controlar o processo evolutivo nesta formulação da OT, também controla a criação de cavidades, isto é, controla o tamanho do passo no processo de otimização. Na presente formulação constatou-se que o procedimento de otimização via ESO-MEC não é tão sensível a esses parâmetros como nas aplicações da OT usando o MEF.

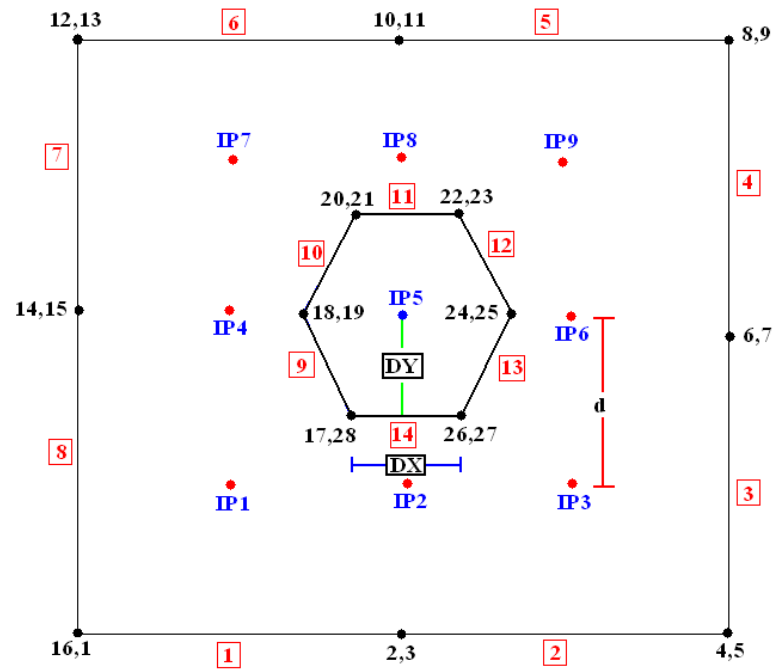


Figura 3 – Criação de cavidade hexagonal

Na Fig. 3, tem-se que DY é a distância entre o ponto interno IP5 e elemento 14, DX é o comprimento do elemento 14. Considerando o ponto interno IP5 satisfazendo a inequação 13 faz-se necessário a criação da cavidade hexagonal em torno do ponto IP5, Fig. 3. Desta forma, os elementos 11 e 14 têm comprimento $L = DX$ e os outros elementos são calculados usando a expressão (17):

$$L = \sqrt{\left(\frac{DX}{2}\right)^2 + (DY)^2} \quad (17)$$

Assim, quando $0 < DY < \frac{d}{2}$ as cavidades adjacentes não terão elementos comuns e não é necessário o acoplamento das regiões. Se $DX = DY = \frac{d}{2}$ tem-se os nós e elementos comuns na região de domínio da estrutura, neste caso é necessário a realização das conectividades de nós e elementos durante o processo de otimização. Considerando $DY = \frac{DX \cdot \sqrt{3}}{2}$ a cavidade hexagonal será regular. A seguir, é apresentado o fluxograma com processo de criação de cavidades, Fig. 4.

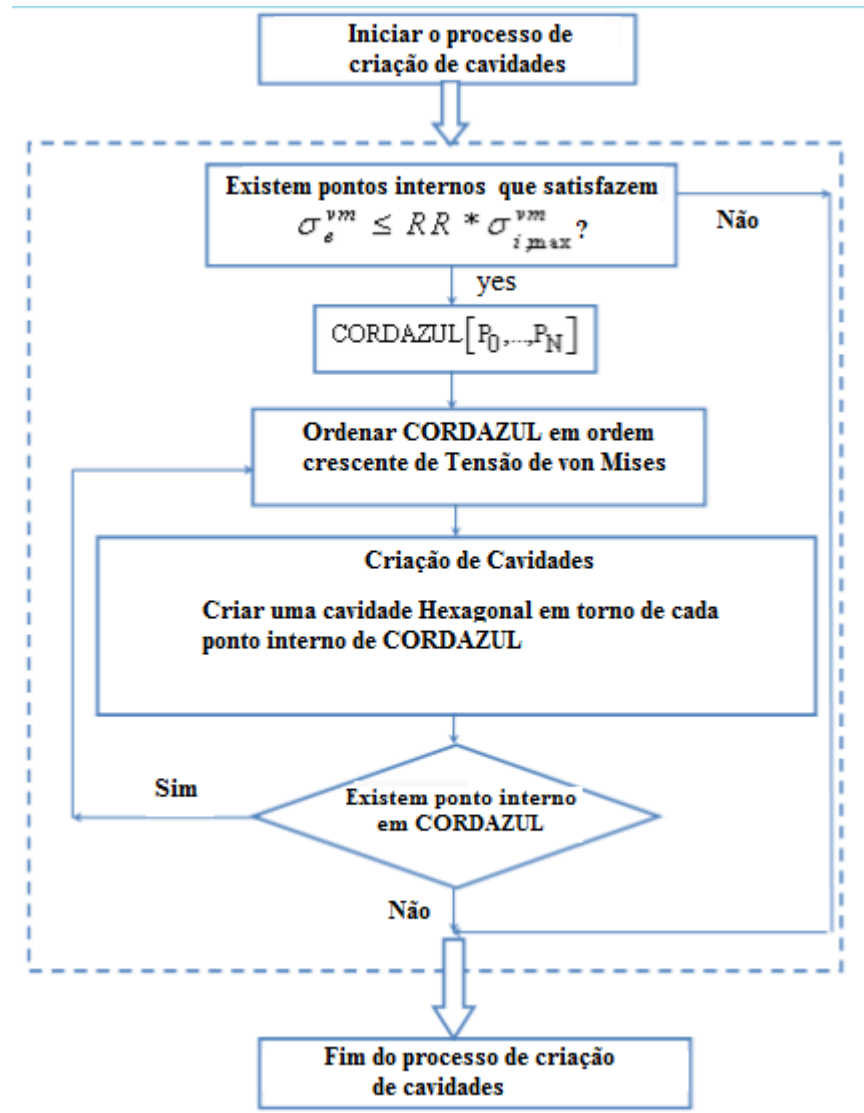


Figura 4 – Fluxograma do processo de criação de cavidades

Com a inserção da cavidade e consequentemente a remoção de material do domínio as tensões em pontos mais próximos desta cavidade aumentam. Neste sentido, para suavizar as tensões em regiões próximas a essas cavidades, foi criada uma média ponderada, ver Fig. 5. Assim, a remoção de material do domínio é realizada de tal forma que a tensão no ponto interno (i), é dada pela média ponderada das tensões nos pontos internos (j) dentro de um Círculo de raio (R), cujos pesos são as distâncias do elemento (i) aos elementos (j) e foi comparada com as tensões nos pontos interiores. Matematicamente, a média das tensões é dada pela Eq. (18):

$$\bar{\sigma}_i^{vm} = \frac{\sum_{j=1}^N w_j \sigma_j^{vm}}{\sum_{j=1}^N w_j} \quad (18)$$

Onde $\bar{\sigma}_i^{vm}$ é a média das tensões de von Mises no ponto interno i (centro do círculo) σ_j^{vm} é a tensão de von Mises no ponto interno j . N é o número de pontos internos j dentro do círculo de raio R e w_j é a distância entre os pontos internos i e j dada pela Eq. (19).

$$w_j = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (19)$$

Assim, o critério de remoção é dado pela inequação 20 e é capaz de determinar a influência das tensões dos elementos j em torno do ponto central i quando uma cavidade é criada suavizando sensivelmente as tensões.

$$\bar{\sigma}_i^{vm} < RR_k \cdot (\sigma_{i,max}^{vm}) \quad (20)$$

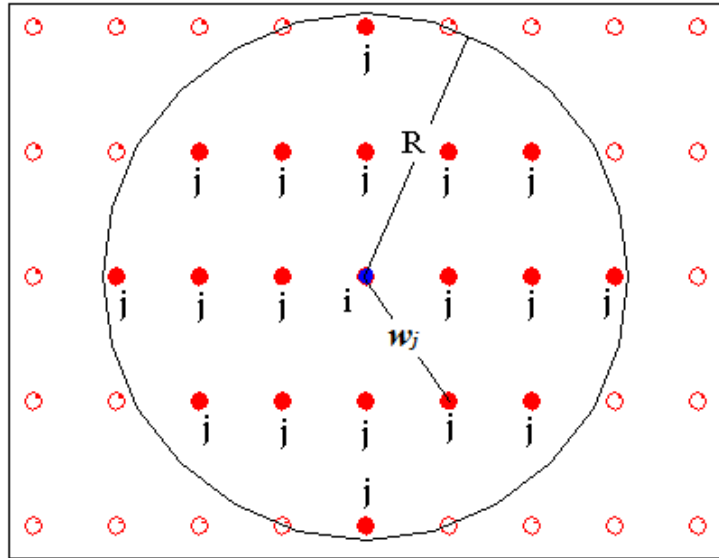


Figura 5 – Média ponderada das tensões no ponto central i .

A poligonal fechada lisa com segmentos de linha de comprimento uniforme utilizada para criar as cavidades hexagonais são necessárias para ser usada na análise estrutural na próxima iteração. Na análise dos elementos de contorno, se os pontos de intersecção forem usados diretamente como pontos nodais do elemento, dois pontos de intersecção podem estar muito próximos um do outro, o que poderia causar dificuldades e instabilidades durante a análise do elemento contorno. No entanto, toda a formulação apresentada usa a técnica de nós duplos o que permite a descontinuidade do elemento e a suavidade da geometria poligonal utilizada não produz altas concentrações de tensão. Por esta razão, não foi utilizada na presente formulação nenhum tipo de técnica adicional para tratar as tensões, a não ser o filtro espacial que por si tem a capacidade de fazê-lo.

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

5.1 VIGA CURTA EM BALANÇO

Neste primeiro exemplo, o problema de otimização é resolvido para uma viga em curta em balanço com uma razão igual 1. As condições de contorno prescritas são: deslocamento zero nas partes superior e inferior da borda do lado esquerdo. A carga é aplicada no lado direito da borda inferior como está ilustrado na Fig. 6a. A fração de volume para este exemplo é $V = 0,38 \cdot V_0$. Este problema foi proposto por Ullah e Trevelyan (2013). O histórico do processo de otimização usando o critério de tensão de von Mises, proposto pelos autores, pode ser observado na Fig. 6b, 6c e 6d (topologia ótima).

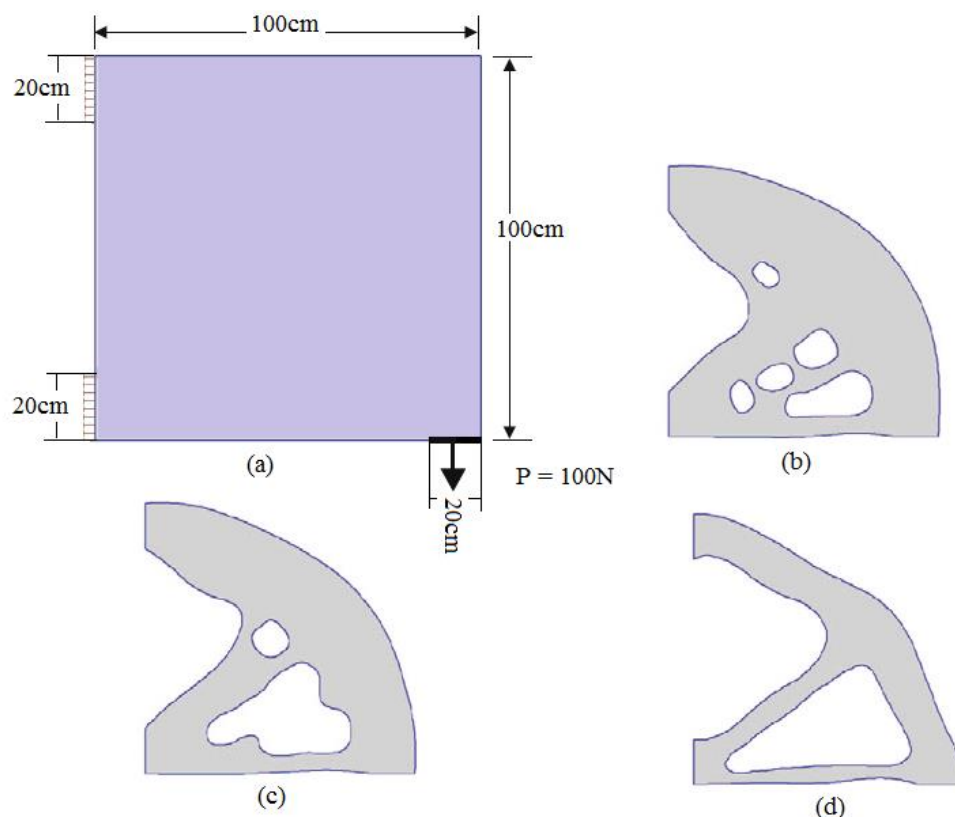


Figura 6 – (a) Domínio de projeto, (b), (c) e (d) – Histórico da otimização por Ullah e Trevelyan (2013)

A Fig. 7a mostra a discretização do contorno com 40 elementos lineares e 361 pontos internos no domínio da estrutura. A estrutura é submetida a uma carga de 100 N e as características do material e da espessura são as seguintes: módulo de Young $E = 210$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e espessura $t = 1$ mm. As medidas indicadas nesta figura representam o comprimento de cada elemento em diferentes zonas. As cavidades hexagonais possuem medidas $L = 0,3538$ cm, $DX = 0,375$ cm, $DY = 0,30$ cm e $d = 0,75$ cm. A redução de volume é de 62% do volume inicial e a integração numérica foi avaliada com 12 pontos de Gauss. As Fig. 7b, 7c, 7d e 7e, mostram o histórico do processo de otimização com a presente formulação, as geometrias são obtidas com a distribuição das tensões no domínio da solução. É possível observar que durante o processo de otimização o filtro de tensões aplicado proporciona uma suavização nas tensões.

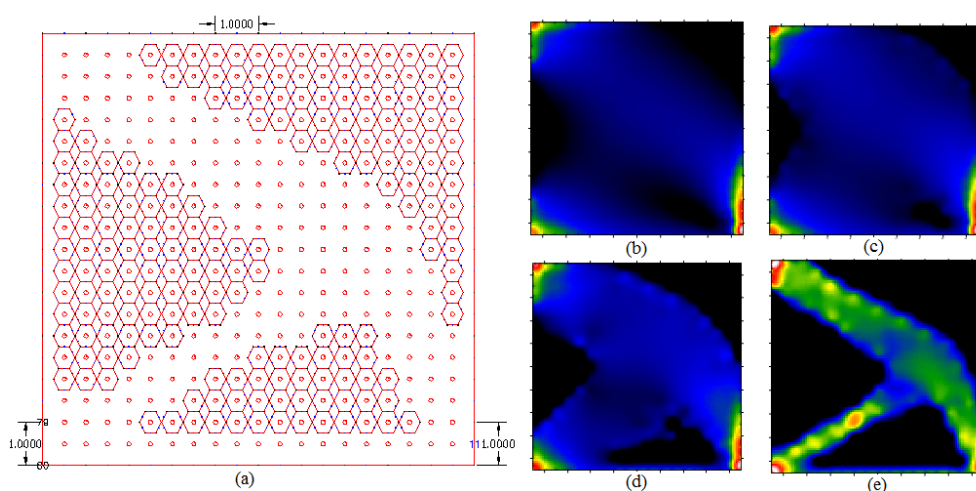


Figura 7 – (a) Discretização do contorno da estrutura, (b), (c) e (d) Histórico nas iterações 1, 6 e 12, respectivamente e (e) Topologia ótima na iteração 18.

Destaca-se que o algoritmo apresentado neste trabalho não exige o cálculo de gradientes, que nem sempre estão disponíveis, características do método Level Set usados por Ullah e Trevelyan (2013), que não usa nenhum tipo de técnica adicional para construção da geometria. Além disso, tem um custo computacional baixo, em torno de 5 minutos para este exemplo, usando CPU 2,40 GHz, processador intel (R), core (TM) i3-2370M e apresentou uma redução de volume da ordem de 70% do volume inicial.

A Fig. 8a mostra o gráfico da variação do volume durante o processo de otimização e a Fig. 8b mostra a evolução da função $f = U * V$ proposta por Ullah e Trevelyan (2013) onde U é a energia de deformação e V é o volume da estrutura. Como pode ser observado, a função diminui bruscamente da primeira para a segunda iteração devido a uma variação maior do volume devido a razão de rejeição ($RR=8,05\%$) e a razão evolucionária ($ER=3,05\%$) que permite a inserção de mais cavidades no domínio. Ao longo do processo iterativo percebe-se que esta função decai suavemente por que o efeito da criação das cavidades não afeta de maneira drástica esta função, pois as cavidades inseridas são iguais.

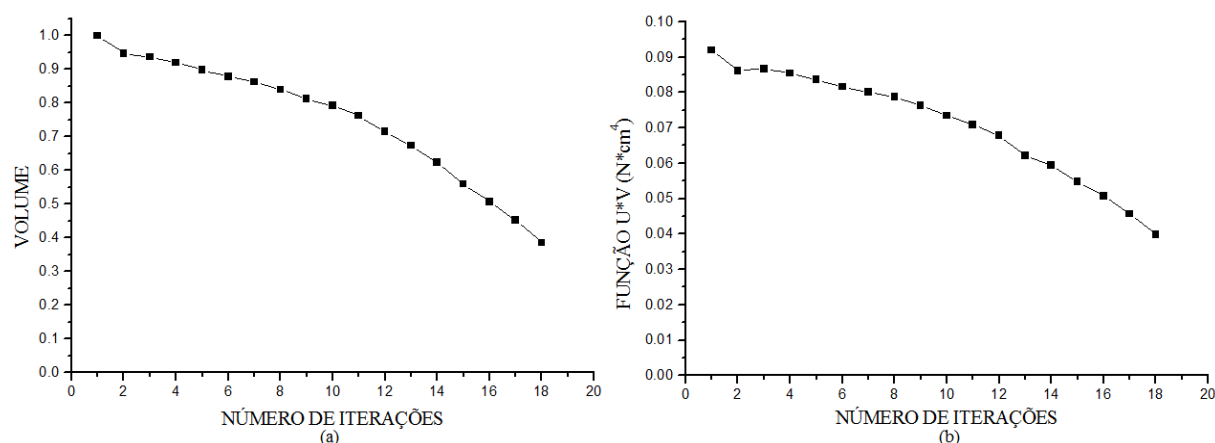


Figura 8 – (a) Volume por iteração and (b) $f = U * V$ por iteração.

5.2 VIGA MBB

A viga denominada de MBB, Messerschmitt-Bolkow-Blohm GmbH; Payten *et al.* (1998); Bulman *et al.* (2001) é um exemplo clássico da otimização topológica. Consiste em uma viga simplesmente apoiada, carregada com uma força vertical centrada em seu contorno superior, veja a Fig. 9a. Os parâmetros iniciais foram os seguintes: módulo de Young $E = 210\text{MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$, $RR = 8,05\%$ e $ER = 3,3\%$, comprimento $20L$ e altura $5L$. Uma carga de 100N foi aplicada na parte central superior da viga, dividida em quatro elementos lineares de 10cm . Devido a condições de simetria, apenas metade do domínio é discretizado, veja a Fig. 9b, com 325 e 741 pontos internos e respectivamente, 50 e 72 elementos de lineares de contorno. As integrais foram avaliadas numericamente com 12 pontos Gauss.

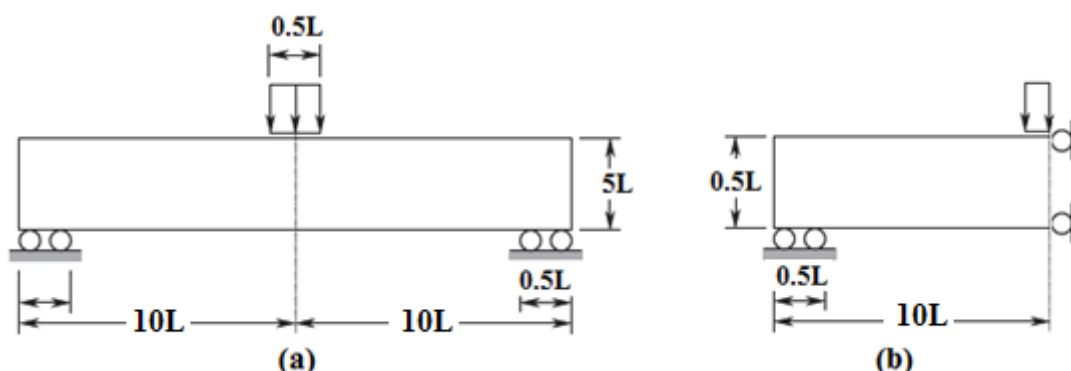


Figura 9 – (a) viga MBB: Modelo completo e condições de contorno e (b) Metade do modelo, aproveitando a simetria.

Neste exemplo de viga MBB verificou-se que a presente formulação apresenta também a dependência da malha como ocorre nos métodos de otimização topológica via MEF como pode ser observado nas Fig. 10a e 10b que mostram a distribuição das tensões no domínio da solução para meio modelo nos dois casos apresentados. A Fig. 10c e 10d exibem as topologias ótimas para a viga MBB com uma redução de volume igual a 65% que foi alcançado na iteração 11 quando se utiliza 325 pontos internos e tem custo computacional de 15 minutos e uma redução de volume de 50% alcançada na iteração 12 quando se utiliza 741 pontos internos com custo computacional de 34 minutos. O resultado da viga MBB apresentado neste trabalho tem uma acurácia com o apresentado no trabalho de Wang *et al.* (2003) usando o LSM.

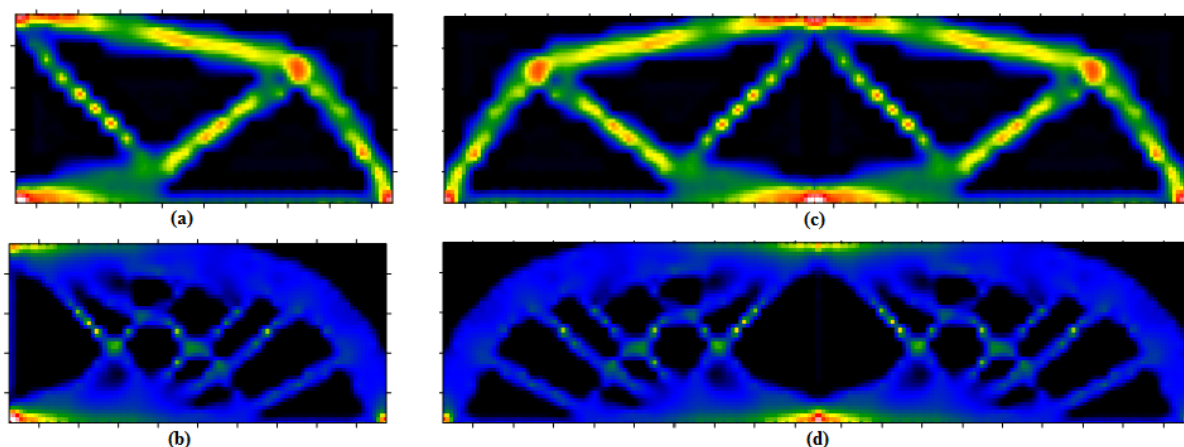


Figura 10 - (a e b) Topologia ótima – meio modelo para os dois casos; (c) distribuição das tensões de von Mises no domínio da solução (325 pontos internos) e (d) distribuição das tensões de von Mises no domínio solução (741 pontos internos)

A Fig. 11 mostra a evolução da função $f = U * V$ para a viga MBB com 325 pontos internos. Constata-se que devido à restrição de volume, a função está diminuindo com o uso decrescente de material na estrutura até satisfazer a restrição de volume, que é 35% do volume inicial do projeto. Os exemplos apresentados neste trabalho exibem uma diminuição monotônica do produto de energia de deformação-volume.

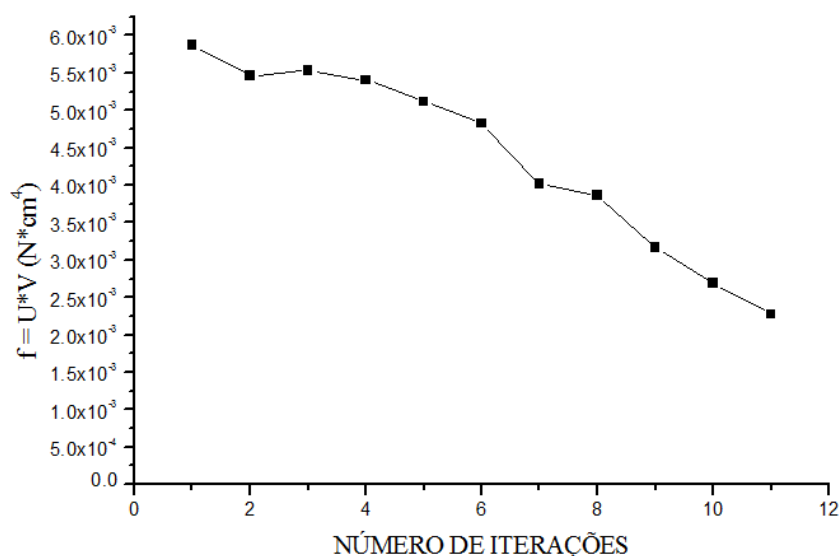


Figura 11 - $f = U * V$ por iteração

5.3 VIGA CURTA EM BALANÇO

Este exemplo também é um clássico da OT. A viga curta em balanço tem dimensões 160 mm x 100 mm e suas condições de contorno são ilustradas na Fig. 12. A carga vertical de 100N é aplicada no elemento central na parte direita livre. As propriedades do material são: Módulo de Young $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e espessura $t = 1 \text{ mm}$.

Este problema foi proposto por Cervera (2003). O histórico da otimização é apresentado na Fig. 13 com a topologia ótima alcançada na iteração 37.

Usando a presente formulação, o contorno da estrutura foi discretizado com 52 elementos lineares e 336 pontos internos. Os parâmetros de otimização são $RR=8,05\%$ e $ER=3,05\%$. Assim, a estrutura evoluiu para uma configuração ótima com uma redução de volume de 70% do volume inicial com custo computacional de 8 minutos.

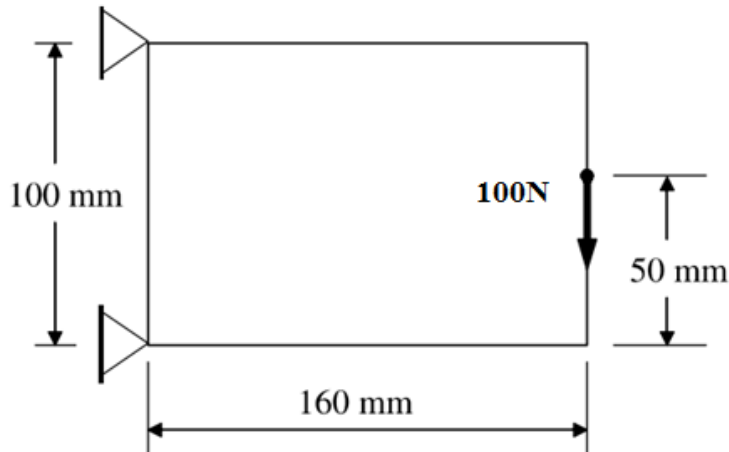


Figura 12 – Domínio de projeto.

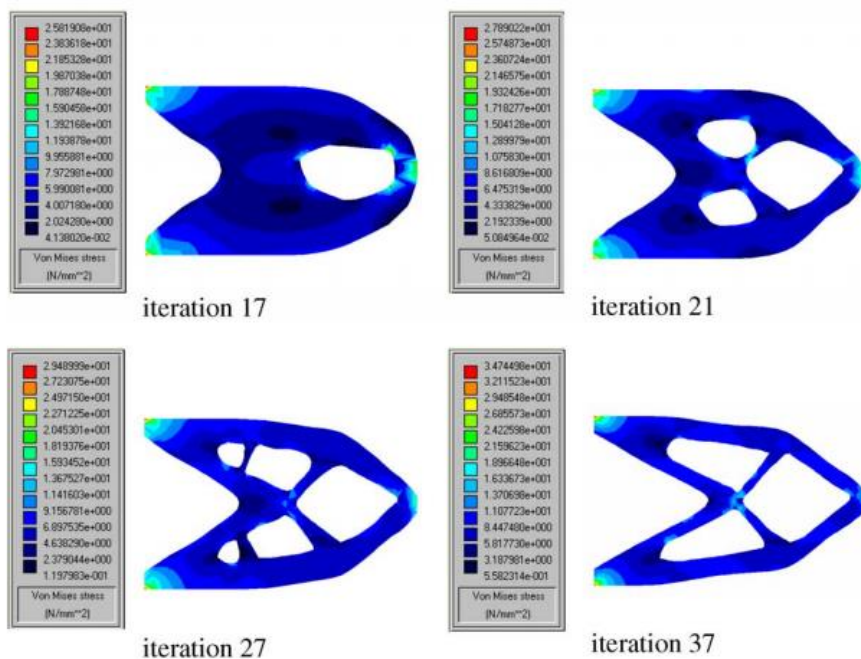


Figura 13 – Histórico do processo de otimização por Cervera (2003)

A Fig. 14 compara o projeto ótimo obtido com a abordagem (ESO-MEC) apresentada, neste trabalho, com a analítica de Rozvany *et al.* (1995), a solução obtida por Chu *et al.* (1997) usando MEF-ESO, Cervera (2003) utilizando ESO-MEC e Ullah e Trevelyan (2016) pelo LSM-MEC.

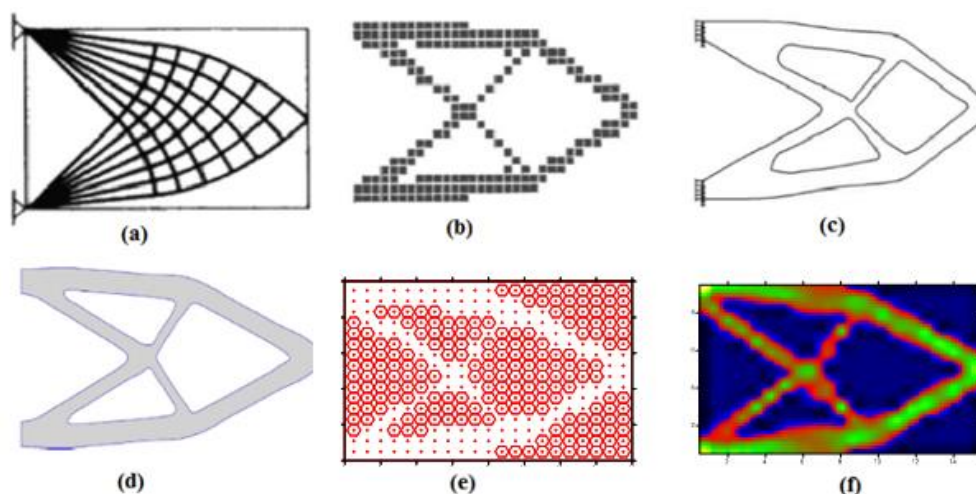


Figura 14 – Topologias ótimas ; (a) Rozvany *et al.* (1995) (b) Chu *et al.* (1997); (c) Cervera (2003); (d) Ullah and Trevelyan (2016); (e) MEC-ESO presente formulação (f) distribuição das tensões no domínio da solução iteration 14.

Com objetivo de mostrar que a eficiência do algoritmo implementado neste trabalho a viga curta em balanço é proposta com os mesmos parâmetros de otimização variando apenas o volume prescrito para 42% do volume inicial. A topologia ótima final apresentada na Fig. 15a com o acoplamento ESO-MEC, presente formulação, mostra uma boa acurácia com a proposta por Ullah e Trevelyan (2016), usando o LSM, ver Fig. 15b. Destacando que a configuração ótima é obtida na iteração 13 enquanto a proposta dos autores ocorre na iteração 320. O custo computacional para este exemplo foi de 5 minutos.

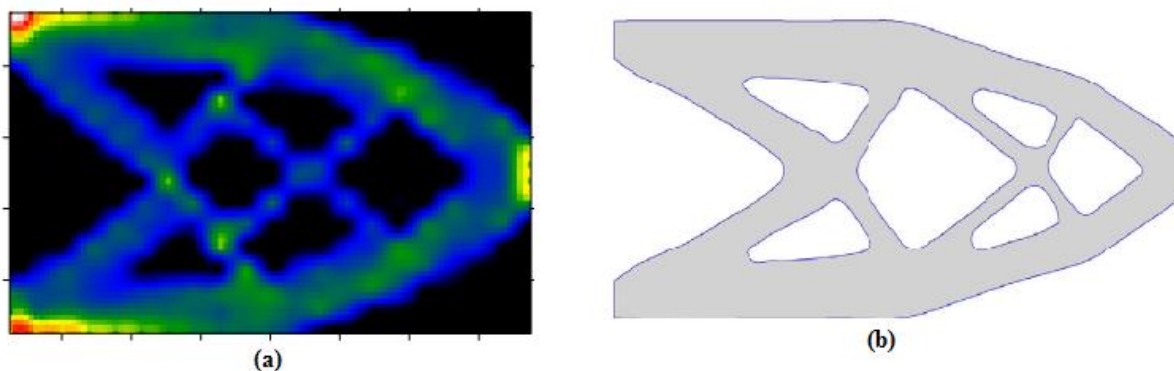


Figura 15 – (a) Topologia ótima presente formulação e (b) Topologia ótima proposta por Ullah e Trevelyan (2016)

6. CONCLUSÕES

A formulação apresentada neste artigo é simples e produziu no campo da otimização topológica resultados que mostram a robustez e o potencial do método de otimização proposto. Embora esta pesquisa seja o começo, pode-se concluir que os pontos internos da malha interferem na topologia ótima, isto é, existe dependência do número de pontos internos da malha, como ocorre no problema de OT usando o MEF. Este artigo é o primeiro passo desta pesquisa e não encontrou nos exemplos apresentados a presença do tabuleiro de xadrez, que é

outra instabilidade numérica nos problemas OT via MEF. Conclui-se que a cavidade inserida não deve ter nós no contorno para evitar a criação de regiões de alta tensão desestabilizando a estrutura. Desta forma, a presente formulação pode ser expandida para otimização com restrição de deslocamento, de rigidez e frequência e ainda uma otimização multiobjetivo usando alguns destes critérios.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o Instituto Federal de Ciências e Tecnologias de Minas Gerais Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, a FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) pelo seu apoio financeiro a esta pesquisa.

8. REFERÊNCIAS

- [1]Allaire, Grégoire, and François Jouve. "Minimum stress optimal design with the level set method." *Engineering analysis with boundary elements* 32.11 (2008): 909-918.
- [2]Almeida V.S., Simonetti H.L., Oliveira Neto, L. Comparative analysis of strut-and-tie models using smooth evolutionary structural optimization. *Eng Struct*;56:1665–75, 2013.
- [3]Bendsøe M.P. (1995). *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*, Springer, Berlin.
- [4]Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. *Topology Optimization: Theory, methods and applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2003.
- [5]Brebbia CA, Dominguez J. *Boundary elements—an introductory course*. Southampton: Computational Mechanics Publications; 1989.
- [6]Bulman, S.; Sienz, J.; Hinton, E. Comparisons between algorithms for structural topology optimization using a series of benchmark studies. *Comput. Struct.* 79, 1203–1218, 2001.
- [7]Canfield, S.; Frecker, M. *Topology Optimization of Compliant Mechanical Amplifiers for Piezoelectric Actuators*, *Struct Multidisc Optim*, p.269-279, 2000.
- [8]Cervera, E., *Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of B-spline geometry*. PhD Thesis. University of Durham, Durham, UK, 2003.
- [9]Cervera, E., J. Trevelyan, *Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms*, *Comput Struct* 83 (23) (2005) 1902–1916.
- [10]Cervera, E., J. Trevelyan, *Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part II: 3D algorithms*, *Comput Struct* 83 (23) (2005) 1917–1929.
- [11]Cisilino A.P., *Topology Optimization of 2D Potential Problems Using Boundary Elements*. *Computer Modelling in Engineering & Sciences*, 15/2: 99-106, 2006.

- [12]Chu, D.N.; Xie, Y.M.; Hira, A.; Steven, G.P. "Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 21, pp. 239-251, 1996.
- [13]Chu, D.N., Xie, Y.M., Hira, A., Steven, G.P. (1997). *On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints*. *Finite Elements in Analysis and Design* 24(4): 197-212.
- [14]Christie, W.C.; Bettess, P.; Bull, J.W. *Self-Designing Structures: A Practical Approach*, Engineering Computations, v. 15, n. 1, p. 35-48, 1998.
- [15]Diaz, Alejandro, and Ole Sigmund. "Checkerboard patterns in layout optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 10.1 (1995): 40-45.
- [16]Isakari H, Kuriyama K, Harada S, Yamada T, Takahashi T, Matsumoto T. A topology optimization for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mech Eng J*;1 (4):1–13, 2014.
- [17]Jog, Chandrashekhar S., and Robert B. Haber. "Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 130.3-4 (1996): 203-226.
- [18]Kim, H., Querin, O. M., Steven, G.P., Xie, Y.M. (2000). *A method for varying the number of cavities in an optimized topology using evolutionary structural optimization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19: 140-147.
- [19]Labanowski, A., Fancello, E.A. e Novotny, A.A. SIMP, ESO e TSA: Uma análise comparativa de métodos de otimização topológica para elasticidade 2d; Recife; XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. CILAMCE 2004.
- [20]Li, Q., Steven, G.P., Xie, Y.M. (2001). *A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 22: 230-239.
- [21]Liang, Q.Q., Xie, Y.M., Steven, G.P. "Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure", *ACI Structural Journal*, Vol. 97, No. 2, pp. 322-330, 2000.
- [22]Liang, Q.Q., Xie, Y.M. ; Steven, G.P. Optimal topology selection of continuum structures with displacement constraints, *Computers and Structures*, Vol. 77, No. 6, pp. 635-644, 2000.
- [23] Lopes Jr., M.C., *Modelagem Numérica do Crescimento de Fraturas através do Método dos Elementos de Contorno*, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

- [24]Marczak, R.J. Optimization of elastic structures using boundary elements and a topological-shape sensitivity formulation. Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, ISBN 978-85-85769-30-7, 2007.
- [25]Neches, L.C.; Cisilino, A.P. Topology optimization of 2D elastic structures using boundary elements, Eng. Analysis with Boundary Elements Volume 32, Issue 7, pp. 533-544, 2008.
- [26]Payten, W.M.; Ben-Nissan, B.; Mercer, D.J. 1998: Optimal topology design using a global self-organizational approach. Int. J. Solids Struct. 35(3–4), 219–237.
- [27]Querín, O.M., Evolutionary Structural Optimization stress based formulation and implementation. PhD dissertation, University of Sydney, 1997.
- [28]Querín, O.M.; Steven, G.P.; Xie, Y.M. Evolutionary Structural Optimization using Additive Algorithm, Finite Element Analysis and Design, v. 34, p. 291-308, 2000.
- [29]Querín, O.M.; Young, V., Steven, G.P.; Xie, Y.M. Computational Efficiency and Validation of Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., v.189, p. 559-73, 2001.
- [30]Querín O, Steven G, Xie Y. Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm. Engineering Computations: International Journal of Computer Aided Engineering, 1998;15(8):1031–48.
- [31]Reynolds D.; McConnachie, J.; Bettess, P.; Christie, W.C.; Bull, W. Reverse adaptivity – a new evolutionary tool for structural optimization, Int. J. Numer. Meth. Engrg., v.45(5), p.529-552, 1999.
- [32]Rong, J.H.; Xie, Y.M.; Yang, X.Y.; Liang, Q.Q. Topology optimization of structures under dynamic response constraints, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 234, No. 2, pp.177-189, 2000.
- [33]Sigmund, O. 1997: On the design of compliant mechanisms using topology optimization. Mech. Struct. Mach. 25, 495-526.
- [34]Sigmund, O. and Petersson, J. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Structural optimization, 16(1):68–75.
- [35]Simonetti, H.L.; Almeida, V.S.; Oliveira Neto, L. A smooth evolutionary structural optimization procedure applied to plane stress problem, Engineering Structures, Vol. 75, p. 248-258, 2014.
- [36]Steven, G.P., Li, Q. and Xie, Y.M. (2002). “ Multicriteria optimization that minimize maximum stress and maximizes stiffness”, Computers and Structures, Vol. 80, No. 27–30, pp. 2443–2448.

- [37]Tanskanen, P., The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects Comput Methods Appl Mech Eng 191:5485–5498, 2002.
- [38]Ullah B, Trevelyan J, A boundary element and level set based topology optimisation using sensitivity analysis, Eng Anal Bound Elem: 70: 80–98, 2016.
- [39]Ullah B, Trevelyan J, Ivrisimtzis I. A three-dimensional implementation of the boundary element and level set based structural optimisation. Eng Anal Bound Elem 2015; 58:176–94.
- [40]Ullah B, Trevelyan J. Correlation between hole insertion criteria in a boundary element and level set based topology optimization method. Eng Anal Bound Elem 2013; 37(11):1457–70.
- [41]Venturini, W. S., Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia, São Carlos, 349 p., Tese (Livre Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.
- [42]Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. Comput Struct 1993;49(5):885–96.
- [43]Xie YM, Steven GP (1996) Evolutionary structural optimization. Springer, Berlin
- [44]Xie, Y.M., Steven, G.P. (1997). *Evolutionary Structural Optimization (ESO)*. Springer.
- [45]Wittmann, F. H, ed. Fracture mechanics of concrete. Amsterdam, Oxford, 1983.
- [43]Wutzow, W.W., Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapa com Enrijecedores, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, dissertação de Mestrado, São Carlos. 2003.
- [46]Yamada T, Izui K, Nishiwaki S, Takezawa A. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. Comput Methods Appl Mech Eng 2010; 199(45–48):2876–91.
- [47]Yamada, T.; Shichi, S.; Matsumoto, T.; Takahashi, T.; Isakari, H., A level set-based topology optimization method using 3D BEM. Advances in Boundary Element Techniques XIV. p. 432 – 437, 2013.
- [48]Yamasaki S,Yamada T,Matsumoto T. An immersed boundary element method for level-set based topology optimization. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2013;93(9);960–88
- [46]Yamasaki S,Nomura T, KawamotoA, SatoK, Nishiwaki S. A levelset-based topology optimization method targeting metallic waveguide design problems. Int J Numer Methods Eng 2011;87(9):844–68.

- [49]Zhou M, Shyy YK, Thomas HL (2001) Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. *Struct Multidisc Optim* 21:152–158
- [50]Zhou, M., Rozvany, G. I. N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 1, p. 80-83, 2001.