



FORMULAÇÃO VIA MDF DO PROBLEMA ACOPLADO DE FLUXO TERMO-HIDRÁULICO NO MEIO POROSO NÃO SATURADO

Karla B. Souza

Christianne de L. Nogueira

karla.baeta@yahoo.com.br

chris@em.ufop.com

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mineral, Universidade Federal de Ouro Preto,
Departamento de Engenharia de Minas

Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Ouro Preto/MG, Brasil – CEP 35400-000

Resumo. Os fluxos de umidade e calor em meios porosos não saturados envolvem o fluxo de água líquida, vapor de água e água adsorvida e o fluxo de calor latente, calor de umedecimento, condução e convecção. O modelo matemático que representa esse fenômeno físico inclui as equações de fluxo de calor e umidade, garantindo a conservação de massa e energia, levando em consideração os princípios hidráulicos e termodinâmicos que descrevem o equilíbrio entre a fase líquida (água líquida e ar dissolvido) e a fase gasosa (ar seco e vapor de água). Este artigo apresenta uma formulação generalizada do problema acoplado de fluxo termo-hidráulico que representa a equação de equilíbrio do fluxo de umidade e de calor em meios porosos indeformáveis em equilíbrio térmico entre as fases. A formulação considera a pressão da água, a pressão do gás e a temperatura como variáveis primárias. Este artigo também traz a formulação do método das diferenças finitas para este problema em condições unidimensionais, a fim de modelar o processo de fluxo na interface solo-atmosfera, considerando a condição de contorno ambiental (precipitação, evaporação e evapotranspiração).

Palavras-chave: acoplamento termo-hidráulico, método das diferenças finitas, solo não saturado.

1 INTRODUÇÃO

Um meio poroso pode ser definido como um meio constituído por uma fase sólida distribuída espacialmente formando vazios, ou poros. Os meios porosos podem se encontrar saturados ou não saturados a depender da quantidade de água presente nos poros. A porção do meio poroso que se localiza abaixo do nível d'água (ou do lençol freático) encontra-se saturado uma vez que todos os poros estão preenchidos por água. Já a porção do meio poroso situada acima do lençol freático encontra-se numa condição não saturada. Neste caso, tem-se um sistema multifásico composto por três fases de matéria: gás, líquido e sólido.

A matéria nas fases líquida e gasosa que ocupam os poros pode ser qualquer gás ou vapor (ou combinação dos mesmos), e qualquer combinação líquida miscível ou imiscível de dois ou mais líquidos (água, óleo, líquidos de fase não aquosa, etc.). Já a fase sólida consiste nos grãos ou partículas do solo e pode variar desde relativamente finos (silte, argila e material orgânico) a relativamente grosseiro (areia e cascalho).

No estudo dos solos não saturados é preciso levar em consideração os princípios da mecânica e hidráulica, e também, princípios termodinâmicos que descrevem o equilíbrio entre as fases sólida, líquida e gasosa; a transição da matéria de uma fase para outra e a adsorção. As forças e energias associadas a essas interações multifásicas, por sua própria natureza, separam o comportamento do solo não saturado do comportamento do solo saturado (Lu e Likos, 2004).

A importância de se conhecer o fluxo no solo não saturado reside no fato de que esta porção do solo é o elo entre a atmosfera e a água subterrânea. A avaliação quantitativa do fluxo de umidade na fronteira entre atmosfera e sub superfície requer o conhecimento das propriedades do solo e da água presente nos poros como também das condições ambientais predominantes na interface solo-atmosfera.

O solo não saturado compreende frequentemente materiais de cobertura ou de barreira para aterros e instalações de armazenamento de resíduos perigosos de interesse para a comunidade geo-ambiental. O aumento da preocupação nacional e internacional a respeito da saúde do ambiente natural acarretou num maior contingente de regulamentações neste quesito e, portanto, questões acerca da mecânica dos solos não saturados estão se tornando cada vez mais comuns.

Os padrões de fluxo, de sucção e de tensão num meio poroso não saturado mudam no espaço e no tempo em função da variação das propriedades do meio devido à presença de água nos poros, bem como das condições ambientais (ou atmosféricas) dominantes.

Segundo Nobre e Thomson (1993), o mecanismo de transferência de calor e de umidade vem sendo bastante estudado ao longo das últimas décadas nos campos da ciência do solo e da hidrogeologia, para quantificar a porção de energia e de água fluindo do solo para a atmosfera e vice-versa; e, para medir a distribuição de umidade térmica e isotérmica no solo superficial devido à infiltração transiente na superfície.

O fenômeno de fluxos combinados de calor e umidade em solos não saturados é de interesse em uma gama de problemas práticos de engenharia. Como por exemplo: descarte seguro de resíduos nucleares de alto nível (Thomas e King, 1992), irrigação, aquecimento do solo, sistemas de barreira capilar e hidráulica e desempenho de cabos elétricos de alta tensão enterrados.

Para definição de um modelo matemático que descreva um fenômeno físico da forma mais fiel possível, são necessárias que também sejam escolhidas adequadamente as variáveis de estado e material, assim como as leis constitutivas.

2 EQUAÇÃO DE GOVERNO

O fluxo de calor e umidade em meios porosos não saturados envolve o movimento de água líquida, do vapor de água, do líquido adsorvido; e o fluxo de calor latente, de umedecimento, por condução e por convecção. O modelo matemático que representa este fenômeno físico engloba equações de fluxo de umidade e de calor garantindo a conservação de massa e energia.

As equações de equilíbrio que governam o fluxo de calor e umidade são obtidas considerando o meio poroso constituído por uma matriz sólida (considerada indeformada) com vazios preenchidos com fases líquida e gasosa. A fase líquida, no entanto, é composta por duas espécies: água líquida e ar dissolvido. Já a fase gasosa é composta pelo ar seco e vapor de água. Mudanças de temperatura podem modificar o equilíbrio líquido-vapor, no entanto, as fases sólida, líquida e gasosa estão em equilíbrio térmico e uma temperatura única é definida em cada ponto. De acordo com Dupray et al (2013), esta hipótese é justificada pela cinemática relativamente lenta dos processos de fluxo, que permitem um equilíbrio térmico contínuo entre as fases. Para descrever unicamente o estado do material, são necessárias três variáveis de estado primárias: pressão de gás (p_g), pressão de água (p_w) e temperatura (T).

As equações de balanço de massa são escritas em termos dos componentes (ou espécies químicas, neste caso sendo a água e o ar) presentes na mistura e não para as fases. Usando esta abordagem, o termo de troca de fase cancelará nas equações de equilíbrio. Nas equações que serão apresentadas, os índices l e g, estão relacionados, respectivamente, às fases líquida e gasosa; enquanto, os índices w, a, ad e v estão relacionados, respectivamente, às espécies: água líquida, ar seco, ar dissolvido e vapor de água.

Neste trabalho as equações de conservação que governam o problema de equilíbrio termo-hidráulico são apresentadas em termos das variáveis de primárias: pressão de água líquida (p_w), pressão de gás (p_g) e temperatura (T).

2.1 Relações constitutivas

Neste item são definidas as funções que relacionam as densidades aparente da água líquida, do vapor de água e do ar seco, como também, a entalpia do sistema com as variáveis de estado pressão de água líquida (p_w), pressão de gás (p_g) e temperatura (T)

a) Densidade aparente da água líquida

A densidade aparente da água líquida varia com o estado de pressão de água e temperatura de acordo com a seguinte equação:

$$\rho_w = \rho_w(p_w, T) = \rho_{w0} \left[1 + \left(\frac{1}{\chi_w} \right) (p_w - p_{w0}) - \beta'_w (T - T_0) \right] \quad (1)$$

em que χ_w é o *bulk modulus* da água ($\cong 2.15 \text{ GPa}$); β'_w é o coeficiente de dilatação térmica da água ($\cong 0.00013 \text{ 1/K}$); e, ρ_{w0} , p_{w0} e T_0 são, respectivamente, os valores iniciais da densidade aparente, pressão e temperatura da água.

A variação temporal da densidade aparente é dada por:

$$\frac{\partial \rho_w(p_w, T)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_w}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial t} + \frac{\partial \rho_w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\rho_{w0}}{\chi_w} \right) \frac{\partial p_w}{\partial t} + (-\rho_{w0} \beta'_w) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

Da mesma forma a variação espacial da densidade aparente é dada por:

$$\nabla \rho_w(p_w, T) = \frac{\partial \rho_w}{\partial p_w} \nabla p_w + \frac{\partial \rho_w}{\partial T} \nabla T = \frac{\rho_{w0}}{\chi_w} \nabla p_w - \rho_{w0} \beta'_w \nabla T \quad (3)$$

b) Densidade aparente do vapor de água

A densidade aparente do vapor de água pode ser estimada fazendo uso da seguinte relação termodinâmica apresentada por Edlefson e Anderson (1943 apud Philip e de Vries, 1957) pela qual:

$$\rho_v = \rho_v(p_w, p_g, T) = \rho_{v,0}(T) u_r(p_w, p_g, T, \rho_w) \quad (4)$$

em que $\rho_{v,0}$ é a densidade de vapor saturado que depende da temperatura; e, u_r é a umidade relativa que depende da pressão de gás, pressão da água e da temperatura.

O ar úmido contido no poro é assumido como um mistura perfeita de dois gases ideais (ar seco e vapor de água). Assim sendo, pode-se utilizar a lei dos gases ideais, pela qual:

$$\rho_{v,0} = \frac{p_{v,0} M_w}{RT} \quad (5)$$

em que M_w é a massa molar da água ($\approx 0.018 \text{ kg/mol}$) adotada como a massa molar do vapor de água; R é a constante universal dos gases ($= 4.615 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s}^2\text{K}$), T é a temperatura expressa em Kelvin e $p_{v,0}$ é a pressão de vapor de água saturado definida, de acordo com Collin (2003) e Gerard et al (2008 apud Dupray, 2013), como:

$$p_{v,0} = a e^{(-b/T)} \quad (6)$$

em que $a=112.659 \text{ GPa}$ e $b=5192.74 \text{ K}$ para uma faixa de temperatura entre 273 e 373 K.

A umidade relativa leva em conta fenômenos de adsorção e efeito capilar no solo. A lei de Kelvin-Laplace define este parâmetro como sendo:

$$u_r = \frac{p_v}{p_{v,0}} = e^{\left[\frac{(p_g - p_w) M_w}{RT \rho_w} \right]} \quad (7)$$

Vale ressaltar que a Eq. (4) somente pode ser utilizada quando existe um equilíbrio local entre as fases líquida e vapor, situação esta, que faz com que suas energias livres sejam iguais. De acordo com Milly e Engleson (1980) o vapor estará em equilíbrio com o líquido em praticamente todos os sistemas de solo naturais.

A variação no tempo da densidade aparente do vapor de água é dada por:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = u_r \left(\frac{\partial \rho_{v,0}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \rho_{v,0} \left(\frac{\partial u_r}{\partial p_w} \frac{\partial p_w}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial p_g} \frac{\partial p_g}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial \rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} \right) \quad (8)$$

ou ainda, substituindo a Eq. (2) na Eq. (8), tem-se que:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = D_1 \frac{\partial p_g}{\partial t} + D_2 \frac{\partial p_w}{\partial t} + D_3 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

em que

$$D_1 = \rho_{v,0} u_r \frac{M_w}{RT \rho_w} \quad (10a)$$

$$D_2 = - \left[1 + (p_g - p_w) \frac{\rho_{w0}}{\chi_w \rho_w} \right] \left(\rho_{v,0} u_r \frac{M_w}{RT \rho_w} \right) \quad (10b)$$

$$D_3 = \rho_{v,0} u_r \left[-\frac{1}{T} + \left(-\frac{1}{T} + \frac{\rho_{w0} \beta'_w}{\rho_w} \right) \frac{(p_g - p_w) M_w}{RT \rho_w} \right] \quad (10c)$$

Da mesma forma a variação espacial da densidade aparente é dada por:

$$\nabla \rho_v = D_1 \nabla p_g + D_2 \nabla p_w + D_3 \nabla T \quad (11)$$

c) Densidade aparente ar seco

A densidade aparente de ar seco varia com a temperatura de acordo com a seguinte função, considerando-se que a fase gasosa é um gás ideal:

$$\rho_a = \rho_a(p_g, \rho_v, T) = \frac{p_g M_a}{RT} - \frac{\rho_v M_a}{M_w} \quad (12)$$

em que M_a é a massa molar do ar seco ($=0.0288 \text{ kg/mol}$).

A variação no tempo da densidade aparente do ar seco é dada por:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{M_a}{RT} \frac{\partial p_g}{\partial t} - \frac{M_a}{M_w} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} - \frac{p_g M_a}{RT^2} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

ou ainda, substituindo a Eq. (9), tem-se que:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = F_1 \frac{\partial p_g}{\partial t} + F_2 \frac{\partial p_w}{\partial t} + F_3 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

em que

$$F_1 = \frac{M_a}{RT} - \frac{M_a}{M_w} D_1 \quad (15a)$$

$$F_2 = -\frac{M_a}{M_w} D_2 \quad (15b)$$

$$F_3 = -\frac{p_g M_a}{RT^2} - \frac{M_a}{M_w} D_3 \quad (15c)$$

Da mesma forma a variação espacial da densidade aparente do ar seco é dada por:

$$\nabla \rho_a = F_1 \nabla p_g + F_2 \nabla p_w + F_3 \nabla T \quad (16)$$

d) Entalpia do sistema

A entalpia do sistema pode ser definida como:

$$S_T = S_T(p_w, p_g, T) = \rho C_p(\theta, \rho_w, \rho_a, \rho_v)(T - T_0) + \rho_w(p_w, T)W(\rho_w, \theta)\theta(p_w, p_g, T) \quad (17)$$

em que T_0 é a temperatura do ambiente (tomada como referência), θ é o teor de umidade volumétrica e W é o calor diferencial de umedecimento. ρ e C_p são, respectivamente, a densidade e o calor específico da mistura (matriz sólida com vazios preenchidos por gás e líquido) que é definido em termos das propriedades de cada fase, tal que:

$$\rho C_p = \rho C_p(\theta, \rho_w, \rho_a, \rho_v) = \theta \rho_w c_{p,w} + (1 - \theta) \rho_s c_{p,s} + (n - \theta) \rho_a c_{p,a} + (n - \theta) \rho_v c_{p,v} \quad (18)$$

em que ρ_s é a densidade do grão do solo; e, $c_{p,w}$, $c_{p,s}$, $c_{p,a}$ e $c_{p,v}$ são, respectivamente, o calor específico da água líquida, do sólido, do ar seco e do vapor de água.

O último termo da Eq. (17) está associado ao processo exotérmico de umedecimento do meio poroso, sendo o calor diferencial de umedecimento (W) dado pela seguinte expressão de acordo com Groenevelt e Kay (1974):

$$W = \frac{H_w}{\rho_w \delta} e^{-\theta/\delta S} \quad (19)$$

em que S é a superfície específica do material; e, δ ($=10^{-9}$ m, de acordo com Zhou et al, 1998) e H_w ($=1.0$ J/m², de acordo com Zhou et al, 1998) são constantes do material.

A variação no tempo da entalpia do sistema é dada por:

$$\frac{\partial S_T}{\partial t} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + (T - T_0) \frac{\partial \rho C_p}{\partial t} + W \theta \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \rho_w W \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho_w \theta \frac{\partial W}{\partial t} \quad (20)$$

ou ainda, substituindo as Eqs. (2), (18) e (19), reagrupando os termos e considerando que $\theta = \theta(p_g, p_w, T)$, tem-se:

$$\frac{\partial S_T}{\partial t} = G_1 \frac{\partial p_g}{\partial t} + G_2 \frac{\partial p_w}{\partial t} + G_3 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (21)$$

em que

$$G_1 = [c_{p,a} F_1 + c_{p,v} D_1](n - \theta)(T - T_0) + \left[(\rho_w c_{p,w} - \rho_a c_{p,a} - \rho_v c_{p,v})(T - T_0) + \rho_w W - \rho_w \theta \left(W e^{-\theta/\delta S} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial p_g} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned}
G_2 = & \left[c_{p,a} F_2 + c_{p,v} D_2 \right] (n - \theta) (T - T_0) \\
& + \left[(T - T_0) c_{p,w} + W + \rho_w \left(W \frac{1}{\rho_w} \right) \right] \theta \left(\frac{\rho_{w0}}{\chi_w} \right) \\
& + \left[(\rho_w c_{p,w} - \rho_a c_{p,a} - \rho_v c_{p,v}) (T - T_0) + \rho_w W - \rho_w \theta \left(W e^{-\theta/\delta_s} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial p_w}
\end{aligned} \quad (22b)$$

$$\begin{aligned}
G_3 = & \left[c_{p,a} F_3 + c_{p,v} D_3 \right] (n - \theta) (T - T_0) \\
& - \left[(T - T_0) c_{p,w} + W + \rho_w \left(W \frac{1}{\rho_w} \right) \right] \theta (\rho_{w0} \beta'_w) \\
& + \left[(\rho_w c_{p,w} - \rho_a c_{p,a} - \rho_v c_{p,v}) (T - T_0) + \rho_w W - \rho_w \theta \left(W e^{-\theta/\delta_s} \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial T}
\end{aligned} \quad (22c)$$

De forma análoga a variação espacial da entalpia do sistema é dada por:

$$\nabla S_T = G_1 \nabla p_g + G_2 \nabla p_w + G_3 \nabla T \quad (23)$$

2.2 Leis de Fluxo

Neste item são definidas as leis de fluxo que regem o movimento da água líquida, do gás e do calor no meio poroso não saturado em termos das variáveis de estado pressão de água líquida (p_w), pressão de gás (p_g) e temperatura (T).

a) Fluxo de água líquida

De uma forma geral e no contexto do problema com acoplamento termo-hidráulico, o movimento da água líquida (fluxo advectivo) no meio poroso não saturado, pode ser escrito em termos do gradiente de pressão, de acordo com a Lei de Darcy, e do gradiente térmico, de acordo com Groenevelt e Kay (1974), tal como:

$$\mathbf{q}_l = -\mathbf{K}_w \nabla (p_w + \rho_w g z) - D_T \mathbf{I} \nabla T \quad (24)$$

em que D_T é um coeficiente fenomenológico que relaciona o fluxo de água adsorvida com o gradiente de temperatura e varia de acordo com o tipo de solo; $\mathbf{I}$ é a matriz identidade; g é a aceleração da gravidade; z é a elevação e K_w é a condutividade hidráulica definida como:

$$\mathbf{K}_w = \frac{\kappa}{\mu_w} k_{r,w} \mathbf{I} \quad (25)$$

em que κ é a permeabilidade intrínseca [$\text{Darcy} \cong 10^{-12} \text{m}^2$]; μ_w é viscosidade dinâmica da água [Ns/m^2] a qual pode ser escrita em termos da temperatura de acordo com Kaye e Laby (1973, apud Thomas e King, 1992) tal como:

$$\mu_w = 671.2 (T - 229)^{-1.562} \times 10^{-3} \pm 0.5\% \quad (26)$$

$k_{r,w}$ é a permeabilidade relativa do solo a passagem de água definida como função do teor de umidade volumétrico e que pode ser predita por modelos constitutivos tal como o modelo de van Genuchten (1980).

Em condições não isotérmicas, o teor de umidade volumétrica depende não apenas da sucção (ψ), mas, também, da temperatura. Desta forma, pode-se também escrever:

$$\psi = \frac{\sigma(T)}{\sigma(T_r)} \psi_r \quad (27)$$

em que ψ_r é uma sucção relativa que depende da curva de retenção e σ é a tensão superficial [J/m^2] que pode ser escrita em termos da temperatura de acordo com Edlefsen e Anderson (1943, apud Thomas e King, 1992) como:

$$\sigma = 0.1171 - 0.0001516T \quad (28)$$

Carnahan (1984 apud Zhou et al, 1998) mostrou que o fluxo de água devido ao gradiente de temperatura pode facilmente exceder o fluxo de Darcy em barreiras de argila de baixa permeabilidade sujeitas a gradientes de temperatura. É importante ressaltar que na equação de movimento da água líquida (Eq. 24) assume-se que μ_w , ρ_w e $k_{r,w}$ não são afetados pelo ar dissolvido na água.

b) Fluxo do gás

De forma análoga ao cálculo da parcela do fluxo advectivo da fase líquida (primeiro termo da Eq. 24) obtém-se fluxo advectivo do gás. Assim, desprezando-se a parcela da energia potencial gravitacional do gás, visto que a baixa densidade aparente do gás torna esta parcela muito pequena (Collin et al, 2002), pode-se escrever:

$$\mathbf{q}_g = -\mathbf{K}_g \nabla p_g \quad (29)$$

em que K_g é a condutividade do gás definida como:

$$\mathbf{K}_g = \frac{\kappa}{\mu_g} k_{r,g} \mathbf{I} \quad (30)$$

onde μ_g é viscosidade dinâmica do gás e $k_{r,g}$ é a permeabilidade relativa do solo a passagem do gás.

O fluxo não advectivo de difusão de vapor de água ($\mathbf{i}_v$) e da difusão do ar seco ($\mathbf{i}_a$) pode ser escrito usando a Lei de Fick, tal como:

$$\mathbf{i}_v = D^* \nabla(\rho_v) = -\mathbf{i}_a \quad (31)$$

em que D^* é a difusividade molecular efetiva, sendo expressa pela seguinte relação:

$$D^* = (n - \theta) \tau D \quad (32)$$

onde τ é o fator de tortuosidade para difusão de gases em solos ($\cong 0.67$ de acordo com de Vries (1958)) e D [m^2/s] é o coeficiente de difusividade molecular do vapor da água no ar o qual pode ser obtido, de acordo com Philip e de Vries (1957), da seguinte forma:

$$D = 5.893 \times 10^{-6} \frac{T^{2.3}}{P_g} \quad (33)$$

em que T é a temperatura expressa em [K] e p_g é a pressão de gás expressa em [Pa].

c) Fluxo do calor

O transporte de calor acontece por condução de acordo com a lei de Fourier, por convecção e por advecção do calor de umedecimento devido ao gradiente de pressão, sendo este último termo proposto por Kay e Groenevelt (1974). Desta forma pode escrever o fluxo de calor tal como:

$$\mathbf{q}_T = -\Gamma \nabla T + (\rho_w c_{p,w} \mathbf{q}_l + \rho_a c_{p,a} \mathbf{q}_g + \rho_v c_{p,v} \mathbf{q}_g)(T - T_0) + (c_{p,a} \mathbf{i}_a + c_{p,v} \mathbf{i}_v)(T - T_0) - [D_T \nabla(p_w + \rho_w g z)](T - T_0) \quad (34)$$

em que Γ é a condutividade térmica da mistura, podendo ser calculado a partir da condutividade térmica de cada fase fazendo:

$$\Gamma = \lambda_s (1 - n) + \lambda_w \theta + \lambda_g (n - \theta) \quad (35)$$

em que λ_s , λ_w e λ_g são, respectivamente, a condutividade térmica da fase sólida, líquida e gasosa.

2.3 Equações de conservação

Neste item são apresentadas as equações de balanço de massa escritas em termos dos componentes (água e ar) presentes na mistura e a equação de balanço de energia térmica em termos das variáveis de estado pressão de água líquida (p_w), pressão de gás (p_g) e temperatura (T). Adotando as definições das relações constitutivas e leis de fluxos apresentadas anteriormente.

a) Conservação da massa de água

A equação de conservação da massa de água é escrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho_w \theta)}{\partial t} + \nabla^T(\rho_w \mathbf{q}_l) - Q_w}_{\text{Água líquida}} + \underbrace{\frac{\partial[\rho_v (n - \theta)]}{\partial t} + \nabla^T(\mathbf{i}_v + \rho_v \mathbf{q}_g) - Q_v}_{\text{Vapor de água}} = 0 \quad (36)$$

em que n é a porosidade e Q_w e Q_v , representam, respectivamente, fontes de volume de água líquida e vapor de água.

Fazendo-se as substituições das Eqs. (24), (29), (31), (2) e (9) na Eq. (36), considerando que o teor de umidade volumétrico é uma função das variáveis de estado, ou seja, $\theta = \theta(p_g, p_w, T)$, reagrupando os termos e usando a Eq. (11), tem-se a seguinte expressão para a equação de conservação de massa de água:

$$L_{11} \frac{\partial p_g}{\partial t} + L_{12} \frac{\partial p_w}{\partial t} + L_{13} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^T(\mathbf{M}_{11} \nabla p_g) - \nabla^T(\mathbf{M}_{12} \nabla p_w) - \nabla^T(\mathbf{M}_{13} \nabla T) - E_1 = 0 \quad (37)$$

em que:

$$L_{11} = (n - \theta) D_1 + (\rho_w - \rho_v) \partial \theta / \partial p_g \quad (38a)$$

$$L_{12} = \theta \rho_{w0} / \chi_w + (n - \theta) D_2 + (\rho_w - \rho_v) \partial \theta / \partial p_w \quad (38b)$$

$$L_{13} = -\theta \rho_{w0} \beta'_w + (n - \theta) D_3 + (\rho_w - \rho_v) \partial \theta / \partial T \quad (38c)$$

$$\mathbf{M}_{11} = \rho_v \mathbf{K}_g - D^* D_1 \quad (38d)$$

$$\mathbf{M}_{12} = \rho_w \mathbf{K}_w - D^* D_2 \quad (38e)$$

$$\mathbf{M}_{13} = \rho_w D_T \mathbf{I} - D^* D_3 \quad (38f)$$

$$E_1 = \nabla^T [\rho_w \mathbf{K}_w \nabla (\rho_w g z)] + (Q_v + Q_w) \quad (38g)$$

b) Conservação da massa de ar

A equação de conservação da massa de ar é escrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial [\rho_a (n - \theta)]}{\partial t} + \nabla^T (\mathbf{i}_a + \rho_a \mathbf{q}_g) - Q_a}_{\text{Ar seco}} + \underbrace{\frac{\partial (\rho_a H \theta)}{\partial t} + \nabla^T (\rho_a H \mathbf{q}_l) - Q_{da}}_{\text{Ar dissolvido na água}} = 0 \quad (39)$$

em que H é a constante adimensional de lei de Henry (que define a proporção de ar dissolvido na fase líquida) adotada como igual a 0.017 de acordo com Collin (2003 apud Dupray, 2013) considerando o nitrogênio e oxigênio a 25° C; Q_a e Q_{da} representam, respectivamente, fontes de volume de ar seco e ar dissolvido em água.

Fazendo-se as substituições das Eqs. (24), (29), (31) e (14) na Eq. (39), considerando que o teor de umidade volumétrico é uma função das variáveis de estado, ou seja, $\theta = \theta(p_g, p_w, T)$, reagrupando os termos e usando a Eq. (11), tem-se a seguinte expressão para a equação de conservação de massa de ar:

$$L_{21} \frac{\partial p_g}{\partial t} + L_{22} \frac{\partial p_w}{\partial t} + L_{23} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^T (\mathbf{M}_{21} \nabla p_g) - \nabla^T (\mathbf{M}_{22} \nabla p_w) - \nabla^T (\mathbf{M}_{23} \nabla T) - E_2 = 0 \quad (40)$$

em que

$$L_{21} = \rho_a (H - 1) \partial \theta / \partial p_g + F_1 [H \theta + (n - \theta)] \quad (41a)$$

$$L_{22} = \rho_a (H - 1) \partial \theta / \partial p_w + F_2 [H \theta + (n - \theta)] \quad (41b)$$

$$L_{23} = \rho_a (H - 1) \partial \theta / \partial T + F_3 [H \theta + (n - \theta)] \quad (41c)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \rho_a \mathbf{K}_g + D^* D_1 \quad (41d)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \rho_a H \mathbf{K}_w + D^* D_2 \quad (41e)$$

$$\mathbf{M}_{23} = \rho_a H D_T \mathbf{I} + D^* D_3 \quad (41f)$$

$$E_2 = \nabla^T [\rho_a H \mathbf{K}_w \nabla (\rho_w g z)] + (Q_a + Q_{da}) \quad (41g)$$

Nas Equações (36) e (39) as frações miscíveis, ar seco e vapor de água, ocupam mesma fração de volume $(n - \theta)$, enquanto as frações miscíveis, ar dissolvido na água e água líquida, ocupam a mesma fração de volume (θ) . Daí, os fluxos serem considerados como fluxos das fases, líquida e gasosa, e não fluxos das espécies.

c) Conservação da energia térmica

A equação da conservação da energia térmica pode ser escrita como:

$$\underbrace{\frac{\partial S_T}{\partial t} + L \frac{\partial \rho_v (n - \theta)}{\partial t}}_{\text{Calor armazenado}} + \underbrace{\nabla^T (\mathbf{q}_T) + L \nabla^T (\mathbf{i}_v + \rho_v \mathbf{q}_g)}_{\text{Calor transferido}} - Q_T = 0 \quad (42)$$

em que Q_T é uma fonte de calor (em volume) e L é o calor latente de vaporização de água.

Fazendo-se as substituições das Eq. (34), (24), (29), (31), (9) e (21) na Eq. (42), considerando que o teor de umidade volumétrico é uma função das variáveis de estado, ou seja, $\theta = \theta(p_g, p_w, T)$ e reagrupando os termos e usando a Eq. (11), tem-se a seguinte expressão para a equação de conservação de energia térmica:

$$L_{31} \frac{\partial p_g}{\partial t} + L_{32} \frac{\partial p_w}{\partial t} + L_{33} \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^T (\mathbf{M}_{31} \nabla p_g) - \nabla^T (\mathbf{M}_{32} \nabla p_w) - \nabla^T (\mathbf{M}_{33} \nabla T) - E_3 = 0 \quad (43)$$

em que:

$$L_{31} = G_1 + L(n - \theta)D_1 - L\rho_v \partial\theta/\partial p_g \quad (44a)$$

$$L_{32} = G_2 + L(n - \theta)D_2 - L\rho_v \partial\theta/\partial p_w \quad (44b)$$

$$L_{33} = G_3 + L(n - \theta)D_3 - L\rho_v \partial\theta/\partial T \quad (44c)$$

$$\mathbf{M}_{31} = \left[\mathbf{K}_g (\rho_a c_{p,a} + \rho_v c_{p,v}) + D^* D_1 (c_{p,a} - c_{p,v}) \right] (T - T_0) - L (D^* D_1 - \rho_v \mathbf{K}_g) \quad (44d)$$

$$\mathbf{M}_{32} = \left[\rho_w c_{p,w} \mathbf{K}_w + D^* D_2 (c_{p,a} - c_{p,v}) + D_T \mathbf{I} \right] (T - T_0) - L D^* D_2 \quad (44e)$$

$$\mathbf{M}_{33} = \left[\rho_w c_{p,w} D_T \mathbf{I} + D^* D_3 (c_{p,a} - c_{p,v}) \right] (T - T_0) - L D^* D_3 + \Gamma \quad (44f)$$

$$E_3 = \nabla^T \left[(D_T \mathbf{I} + \rho_w c_{p,w} \mathbf{K}_w) (T - T_0) \nabla (\rho_w g z) \right] + Q_T \quad (44g)$$

3 EQUAÇÃO GERAL DO PROBLEMA ACOPLADO – TH – EM MEIO NÃO SATURADO

Organizando as equações de balanço de massa de água (Eq. 37) e de ar (Eq. 40) e a equação de balanço de energia térmica (Eq. 43) chega-se à seguinte equação matricial generalizada que representa o problema acoplado termo-hidráulico no meio poroso em condições tridimensionais:

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{u}} - \nabla^{*T} (\mathbf{M} \nabla^* \mathbf{u}) = \mathbf{E} \quad (45)$$

em que:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (46a)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} p_g \\ p_w \\ T \end{Bmatrix} \quad (46b)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \quad (46c)$$

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (46d)$$

$$\nabla^* = \begin{bmatrix} \nabla & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \nabla & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \nabla \end{bmatrix} \quad (46e)$$

$$\nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (46f)$$

A solução da Eq. (45) deverá atender às seguintes condições de contorno essenciais na base de uma dada camada de solo em $\mathbf{z}_B$:

$$p_g(\mathbf{z}_B, t) = \bar{p}_{gB} \quad (47a)$$

$$p_w(\mathbf{z}_B, t) = \bar{p}_{wB} \quad (47b)$$

$$T(\mathbf{z}_B, t) = \bar{T}_B \quad (47c)$$

E, no topo desta camada em $\mathbf{z}_T$:

$$p_g(\mathbf{z}_T, t) = \bar{p}_{gT} \quad (48a)$$

$$p_w(\mathbf{z}_T, t) = \bar{p}_{wT} \quad (48b)$$

$$T(\mathbf{z}_T, t) = \bar{T}_T \quad (48c)$$

Os subscritos B e T nas Eqs (47) e (48) se referem à base e ao topo da camada e $\mathbf{z}$ é o vetor de posições, definido como:

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (49)$$

A Equação (45) deverá, ainda, atender às seguintes condições iniciais:

$$p_g(\mathbf{z}, t=0) = \bar{p}_{g0}(\mathbf{z}) \quad (50a)$$

$$p_w(\mathbf{z}, t=0) = \bar{p}_{w0}(\mathbf{z}) \quad (50b)$$

$$T(\mathbf{z}, t=0) = \bar{T}_0(\mathbf{z}) \quad (50c)$$

Em condição de fluxos unidimensionais a Eq. (45) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_g \\ \dot{p}_w \\ \dot{T} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} & M'_{13} \\ M'_{21} & M'_{22} & M'_{23} \\ M'_{31} & M'_{32} & M'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial p_g / \partial z \\ \partial p_w / \partial z \\ \partial T / \partial z \end{Bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial^2 p_g / \partial z^2 \\ \partial^2 p_w / \partial z^2 \\ \partial^2 T / \partial z^2 \end{Bmatrix} = \mathbf{E} \end{aligned} \quad (51)$$

em que os coeficientes L_{kl} , M_{kl} e E_k são definidos nas Eqs. (38), (41) e (44), lembrado que ao se tratar os fluxos unidimensionais os termos $\mathbf{K}_g$ e $\mathbf{K}_w$ deixam ser matrizes de condutividade hidráulica e se tornam escalares, o mesmo acontece com a parcela do coeficiente fenomenológico, $D_T \mathbf{I}$, fazendo com que os componentes da matriz $\mathbf{M}$ sejam apenas escalares. Os coeficientes M'_{kl} são definidos como:

$$M'_{kl} = \frac{\partial M_{kl}}{\partial z} \quad (52)$$

4 FORMULAÇÃO VIA MDF ACOPLADO – TH

A solução analítica da equação diferencial parcial representada pela Eq. (51) não é trivial, daí a necessidade da utilização de um método aproximado para transformar esta equação num sistema de equação algébrica. Neste trabalho, foi adotado o método das diferenças finitas (MDF) que consiste em aproximar as derivadas contínuas em equações discretas, avaliadas em pontos estratégicos do domínio do problema, chamados de pontos nodais.

No MDF o domínio do problema é dividido num número finito de pontos nodais, formando uma malha de diferenças finitas. A Figura 1 ilustra um ponto genérico i no interior de uma camada de solo homogênea.

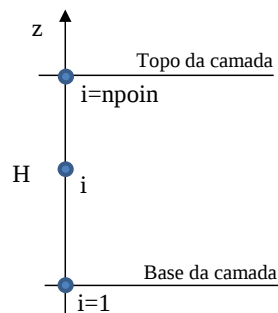


Figura 1. Discretização em diferenças finitas

Com base no MDF as seguintes aproximações para as derivadas de primeira e segunda ordem podem ser adotadas para um ponto genérico i de uma malha de diferenças finitas:

$$\left(\frac{df(z)}{dz} \right)_i^1 = \beta \left(\frac{f(z)_{i+1} - f(z)_{i-1}}{2\Delta z} \right)^1 + (1-\beta) \left(\frac{f(z)_{i+1} - f(z)_{i-1}}{2\Delta z} \right)^0 \quad (53)$$

$$\left(\frac{d^2f(z)}{dz^2} \right)_i^1 = \beta \left(\frac{f(z)_{i+1} - 2f(z)_i + f(z)_{i-1}}{\Delta z^2} \right)^1 + (1-\beta) \left(\frac{f(z)_{i+1} - 2f(z)_i + f(z)_{i-1}}{\Delta z^2} \right)^0 \quad (54)$$

$$\left(\frac{df(z)}{dt} \right)_i^1 = \left(\frac{f(z)_i^1 - f(z)_i^0}{\Delta t} \right) \quad (55)$$

em que o subscrito 0 refere-se a um instante de tempo (t) e o subscrito 1 refere-se a um instante de tempo ($t+\Delta t$), Δz indica a distância entre dois pontos consecutivos da malha e Δt indica o incremento de tempo entre dois instantes de tempo consecutivos t e $t+\Delta t$. A constante β indica o tipo de marcha no tempo adotada. Se $\beta = 0$ tem-se o algoritmo explícito, para $\beta = 1.0$ tem-se o algoritmo puramente implícito e para $\beta = 0.5$ tem-se o algoritmo implícito de Crank-Nicholson.

Substituindo as definições das Eqs. (53), (54) e (55) na Eq. (51) chega-se a seguinte equação algébrica num ponto genérico i no domínio do problema:

$$\mathbf{A}_1^1 \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{A}_2^1 \mathbf{u}_2^1 + \mathbf{A}_3^1 \mathbf{u}_3^1 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{u}_1^0 + \mathbf{A}_2^0 \mathbf{u}_2^0 + \mathbf{A}_3^0 \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{E} \quad (56)$$

em que:

$$\mathbf{A}_1^1 = \beta \Delta t \begin{Bmatrix} 2M_{11} - M'_{11}\Delta z & 2M_{12} - M'_{12}\Delta z & 2M_{13} - M'_{13}\Delta z \\ 2M_{21} - M'_{21}\Delta z & 2M_{22} - M'_{22}\Delta z & 2M_{23} - M'_{23}\Delta z \\ 2M_{31} - M'_{31}\Delta z & 2M_{32} - M'_{32}\Delta z & 2M_{33} - M'_{33}\Delta z \end{Bmatrix} \quad (57a)$$

$$\mathbf{A}_2^1 = -2 \begin{Bmatrix} L_{11}\Delta z^2 + 2M_{11}\beta\Delta t & L_{12}\Delta z^2 + 2M_{12}\beta\Delta t & L_{13}\Delta z^2 + 2M_{13}\beta\Delta t \\ L_{21}\Delta z^2 + 2M_{21}\beta\Delta t & L_{22}\Delta z^2 + 2M_{22}\beta\Delta t & L_{23}\Delta z^2 + 2M_{23}\beta\Delta t \\ L_{31}\Delta z^2 + 2M_{31}\beta\Delta t & L_{32}\Delta z^2 + 2M_{32}\beta\Delta t & L_{33}\Delta z^2 + 2M_{33}\beta\Delta t \end{Bmatrix} \quad (57b)$$

$$\mathbf{A}_3^1 = \beta \Delta t \begin{Bmatrix} 2M_{11} + M'_{11}\Delta z & 2M_{12} + M'_{12}\Delta z & 2M_{13} + M'_{13}\Delta z \\ 2M_{21} + M'_{21}\Delta z & 2M_{22} + M'_{22}\Delta z & 2M_{23} + M'_{23}\Delta z \\ 2M_{31} + M'_{31}\Delta z & 2M_{32} + M'_{32}\Delta z & 2M_{33} + M'_{33}\Delta z \end{Bmatrix} \quad (57c)$$

$$\mathbf{A}_1^0 = -(1-\beta) \Delta t \begin{Bmatrix} 2M_{11} - M'_{11}\Delta z & 2M_{12} - M'_{12}\Delta z & 2M_{13} - M'_{13}\Delta z \\ 2M_{21} - M'_{21}\Delta z & 2M_{22} - M'_{22}\Delta z & 2M_{23} - M'_{23}\Delta z \\ 2M_{31} - M'_{31}\Delta z & 2M_{32} - M'_{32}\Delta z & 2M_{33} - M'_{33}\Delta z \end{Bmatrix} \quad (57d)$$

$$\mathbf{A}_2^0 = -2 \begin{Bmatrix} L_{11}\Delta z^2 - 2M_{11}(1-\beta)\Delta t & L_{12}\Delta z^2 - 2M_{12}(1-\beta)\Delta t & L_{13}\Delta z^2 - 2M_{13}(1-\beta)\Delta t \\ L_{21}\Delta z^2 - 2M_{21}(1-\beta)\Delta t & L_{22}\Delta z^2 - 2M_{22}(1-\beta)\Delta t & L_{23}\Delta z^2 - 2M_{23}(1-\beta)\Delta t \\ L_{31}\Delta z^2 - 2M_{31}(1-\beta)\Delta t & L_{32}\Delta z^2 - 2M_{32}(1-\beta)\Delta t & L_{33}\Delta z^2 - 2M_{33}(1-\beta)\Delta t \end{Bmatrix} \quad (57e)$$

$$\mathbf{A}_3^0 = -(1-\beta)\Delta t \begin{Bmatrix} 2M_{11} + M'_{11}\Delta z & 2M_{12} + M'_{12}\Delta z & 2M_{13} + M'_{13}\Delta z \\ 2M_{21} + M'_{21}\Delta z & 2M_{22} + M'_{22}\Delta z & 2M_{23} + M'_{23}\Delta z \\ 2M_{31} + M'_{31}\Delta z & 2M_{32} + M'_{32}\Delta z & 2M_{33} + M'_{33}\Delta z \end{Bmatrix} \quad (57f)$$

$$M'_{kl} = \frac{{}_{i+1}M_{kl} - {}_{i-1}M_{kl}}{2\Delta z} \quad (57g)$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} {}_{i-1}p_g \\ {}_{i-1}p_w \\ {}_{i-1}T \end{Bmatrix} \quad (57h)$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} {}_i p_g \\ {}_i p_w \\ {}_i T \end{Bmatrix} \quad (57i)$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{Bmatrix} {}_{i+1}p_g \\ {}_{i+1}p_w \\ {}_{i+1}T \end{Bmatrix} \quad (57j)$$

$$\mathbf{E} = -2\Delta t \Delta z^2 \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (57k)$$

A aproximação em diferenças finitas para os pontos situados no contorno do problema, ou seja, na base ($i=1$) e no topo ($i=npoin$), é dada respectivamente, pelas seguintes equações:

$$\mathbf{A}_{CC1}^1 \mathbf{u}_2^1 + \mathbf{A}_{CC2}^1 \mathbf{u}_3^1 = \mathbf{A}_{CC1}^0 \mathbf{u}_2^0 + \mathbf{A}_{CC2}^0 \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{C} \mathbf{C}_{1B} \quad (58a)$$

$$\mathbf{A}_{CC2}^1 \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{A}_{CC1}^1 \mathbf{u}_2^1 = \mathbf{A}_{CC2}^0 \mathbf{u}_1^0 + \mathbf{A}_{CC1}^0 \mathbf{u}_2^0 + \mathbf{C} \mathbf{C}_{1T} \quad (58b)$$

em que, para uma condição de contorno essencial, tem-se:

$$\mathbf{A}_{CC1}^1 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (59a)$$

$$\mathbf{A}_{CC2}^1 = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (59b)$$

$$\mathbf{A}_{CC1}^0 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (59c)$$

$$\mathbf{A}_{CC2}^1 = \mathbf{0}_{3 \times 3} \quad (59d)$$

$$\mathbf{CC}_B = \begin{bmatrix} \bar{p}_{gB} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_{wB} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_B \end{bmatrix} \quad (59e)$$

$$\mathbf{CC}_T = \begin{bmatrix} \bar{p}_{gT} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p}_{wT} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{T}_T \end{bmatrix} \quad (59f)$$

Fazendo o arranjo global para todos os pontos nodais da malha, chega-se à seguinte equação matricial que representa a condição de continuidade de fluxo no meio poroso:

$$\mathbf{B}^1 \mathbf{v}^1 = \mathbf{B}^0 \mathbf{v}^0 + \mathbf{R} \quad (60)$$

em que $\mathbf{v}^0$ e $\mathbf{v}^1$ representam, respectivamente, os vetores das variáveis primárias (pressão de gás, pressão de água e temperatura) nodal no instante t no início de um incremento e no instante $t+\Delta t$ no final de um incremento; $\mathbf{B}^1$ e $\mathbf{B}^0$ são matrizes tri-diagonais cujos coeficiente são avaliados nos instantes $t+\Delta t$ e t , respectivamente, no final e no início de um dado incremento de tempo Δt , e por fim, $\mathbf{R}$ é o vetor de termos independentes e das condições de contorno.

A Equação (60) é altamente não linear devido à dependência das variáveis primárias, pressão de água líquida (p_w), pressão de gás (p_g) e temperatura (T), com as propriedades do material, sendo assim, torna-se necessário o uso de um método iterativo para a solução do problema de fluxo acoplado termo-hidráulico. Neste trabalho o método de Picard, também conhecido como método das aproximações sucessivas (Machado Jr., 2000), foi utilizado. Este método envolve a estimativa sequencial de $\mathbf{v}^1$ usando as estimativas anteriores da matriz $\mathbf{B}$ e do vetor $\mathbf{R}$. A Figura 2 ilustra o processo iterativo do algoritmo de Picard para solução do problema em questão.

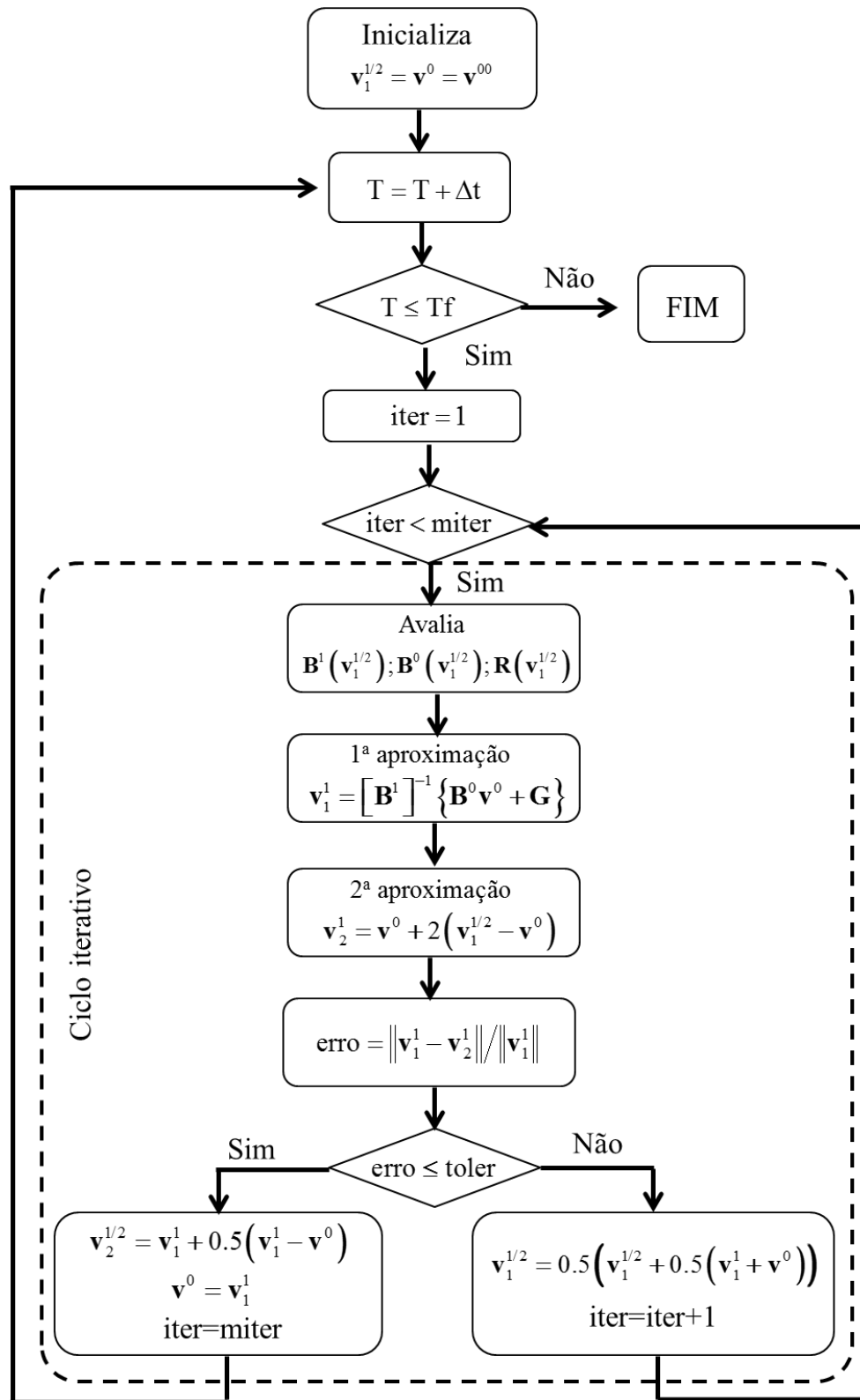


Figura 2. Fluxograma do algoritmo de Picard

5 CONCLUSÕES

A formulação apresentada neste trabalho mostra-se consistente. Uma vez que considerando cenários simplificados das equações de conservação (Eqs. (36), (39) e (42)), estas recaem em equações já consagradas. Ao desconsiderar as variações de temperatura, meio isotérmico, e considerar o meio poroso saturado, forma mais simples de análise do problema de fluxo, chega-se a equação de Laplace. Por outro lado, considerando-se o meio não saturado e tratando-se o problema como isotérmico chega-se a equação de Richards, equação que já foi estudada e implementada em código computacional pelas autoras em trabalhos anteriores (Souza e Nogueira, 2016, dentre outros)

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à FAPEMIG, à Fundação Gorceix e à PROPP/UFOP pelo auxílio financeiro recebido para o desenvolvimento dos projetos relacionados a este trabalho. A primeira autora agradece, ainda, à PROAP/PPGEM.

REFERÊNCIAS

- Collin F., Li X. L., Radu J. P. e Charlier R., 2002. Thermo-hydro-mechanical coupling in clay barriers. *Engineering Geology*; vol. 64, pp.179–193.
- De Vries, D.A., 1958. Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. *Transactions American Geophysical Union*; vol. 39, n. 5, pp.909–916.
- Dupray, F., François, B., e Laloui, L., 2013. Analysis of the FEBEX multi-barrier system including thermoplasticity of unsaturated bentonite. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 37, n. 4, pp. 399-422,
- Groenevelt, P.H. e Kay, B.D., 1974. On the interaction of water and heat transport in frozen and unfrozen soils: II. The liquid phase. *Soil Science Society of America Journal*, vol. 38, n. 3, pp. 400-404.
- Lu, N. e Likos, W. J., 2004. Unsaturated soil mechanics. Jhon Wiley & Sons Inc, New Jersey.
- Machado Jr., J. C., 2000. *Análise de Problemas de Fluxo em Meio Poroso não Saturado pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PROPEC, UFOP-EM.
- Milly, P. C. D., e Eagleson, P.S., 1980. *The coupled transport of water and heat in a vertical soil column under atmospheric excitation*. Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Massachusetts Institute of Technology.
- Nobre, R.C.M. e Thomson, N.R., 1993, The effects of transient temperature gradients on soil moisture dynamics. *Journal of Hydrology*, vol. 152, n. 1-4 pp.57-101.
- Philip J. R. e De Vries D. A., 1957. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. *Transactions American Geophysical Union*, vol. 38, n.2, pp.222–232.
- Souza, K. B. e Nogueira, C.L., 2016. Avaliação numérica do desempenho de um sistema de cobertura com barreira capilar. In: *CILAMCE 2016 - XXXVII Iberian Latin-American*

Congress on Computational Methods in Engineering, 2016, Brasília. CILAMCE 2016 - XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, v. 1. p. 1-14.

Thomas, H. R. e King, S. D., 1992. Coupled heat and mass transfer in unsaturated soil-a potential-based solution. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 16, n. 10, pp.757-773.

van Genuchten, M. T., 1980. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Science Society of America Journal*, vol. 44, n. 5, pp. 892-898.

Zhou, Y., Rajapakse, R. K. N. D., e Graham, J., 1998. Coupled heat-moisture-air transfer in deformable unsaturated media. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 124, n. 10, pp. 1090-1099.