



EVOLUTIONARY STRUCTURAL OPTIMIZATION OF ELASTIC STRUCTURES 2D USING STRAIN ENERGY CRITERION

Hélio Luiz Simonetti

helio.simonetti@ifmg.edu.br

Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG

Campus Betim, Rua Itamarati, 140, São Caetano Betim, MG-Brasil, 32677-564

Valério Silva Almeida

valerio.almeida@usp.br

Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP)

São Paulo – SP-Brasil.

Francisco de Assis das Neves

fassis@em.ufop.br

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Morro do Cruzeiro, Bauxita, 35400-000, Ouro Preto-MG-Brasil.

Abstract. *The Smoothing Evolutionary Structural Optimization (SES0) technique was extended to solve 2D elastic problems with strain energy criterion. Optimization procedure is based on the progressive reduction of the stiffness contribution of inefficient elements with the lower values of strain energy until it has no more influence. A brief review of the linear elastic formulation is presented, where the goal is to maximize stiffness of a fixed-mass system by minimizing growth internal strain energy or equivalently external work. In the application examples, optimal topology of a classical beam is analyzed considering self-weight of the structure. A Short cantilever and Short corbel are also evaluated with the definition of a strut-and-tie model. The optimal settings obtained demonstrate the robustness of the optimization procedure.*

Keywords: *Topological Optimization, Finite Element Method, Strain Energy, SES0*

1 INTRODUÇÃO

A Otimização Topológica (OT), dos três tipos de otimização estrutural, pode ser considerado o problema mais complexo. Existem algumas abordagens para a OT, tal como densidade e conjunto nível (*level set*), que são analisados por Sigmund e Maute (2013) e Osher and Sethian (1988). Entre esses métodos, a *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), desenvolvida por Xie e Steven (1993) e o *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (BESO) desenvolvido por Querin *et al.* (1998) são conhecidos como métodos simples para determinados problemas de otimização de topologia. A ideia principal do ESO é usar um critério de rejeição para remover elementos ineficientes durante o procedimento de evolução da otimização estrutural. Originalmente, o ESO usa a tensão de von Mises como critério de rejeição. Mais tarde, o critério do número de sensibilidade da energia de deformação é usado em problemas com restrições de rigidez Chu *et al.* (1996,1997). O desenvolvimento de métodos usando algoritmos evolutivos foi revisado recentemente em Munk *et al.* (2015).

Nos últimos anos, métodos probabilísticos têm surgido com abordagens heurísticas a serem aplicadas à problemas de otimização. Esses métodos podem encontrar soluções ótimas globais, no entanto, o custo computacional para alcançar essas soluções pode ser muito caro. Para esse tipo de OT podemos citar: a) *Simulated Annealing* (SA) - É um algoritmo de otimização confiável para encontrar o ótimo global, isto é, tem maior probabilidade de encontrar o ótimo global, mesmo com um grande número de variáveis de projeto. A sua principal desvantagem é a exigência de um número muito grande de iterações para a convergência. b) *Genetic Algorithms* (AGs) - Foram introduzidos por Holland (1975) e depois estendidos por Goldberg (1989) e foram projetados para imitar o processo evolutivo natural, o que leva à sobrevivência dos indivíduos mais aptos. A otimização estrutural pode ser obtida permitindo que uma população de cromossomos, representando soluções possíveis para evoluir através das operações aleatórias básicas de seleção, cruzamento e mutação para uma solução ótima.

Outras técnicas de otimização baseadas em probabilidade surgiram com novas metodologias que não apenas otimizam o projeto, mas também levam em conta o processo envolvido durante o projeto. Essas técnicas incluem *Robust Design Optimization* (RDO), *Reliability Based Design Optimization Methods* (RBDO). No método RDO, (Su e Renaud (1997)) cujo objetivo não é apenas minimizar ou maximizar a função objetivo primário, mas também minimizar a sensibilidade da solução para apresentar desvios incertos em relação ao estado nominal. Assim, o RDO pode ser considerado como bi-objetivo, exigindo não apenas que o desempenho da solução seja trazido para um alvo, mas também a variação do alvo seja minimizada. Nos métodos (RBDO) (Frangopol e Maute (2003)), o objetivo é produzir estruturas que sejam econômicas e também confiáveis, introduzindo critérios de segurança no processo de otimização para considerar diferentes fontes de incerteza. Essas incertezas referem-se a alterações entre o projeto final e como ele é eventualmente feito. Os métodos RBDO são baseados em métodos de análise estocástica e, portanto, considerados computacionalmente mais caros em comparação com abordagens determinísticas. As técnicas utilizadas são GAs, SA e também simulações de *Monte-Carlo* (Frangopol e Maute (2003)).

A dificuldade associada à otimização de topologia do contínuo é incorporar um critério de parada apropriado em algoritmos de otimização para obter o ótimo global. Para o problema de topologia com rigidez máxima, é comum ser usada a energia de deformação da estrutura como função objetivo e uma restrição arbitrariamente imposta ao volume. Nesse sentido, Liang (2001a, b) e Liang e Steven (2002) desenvolveram o método Performance-Based Optimization (PBO) que emprega índices de desempenho baseados em energia e Performance-Based Optimality Criteria (PBOC) para atingir os ótimos globais em projetos de estruturas do contínuo com restrições em energia de deformação. Os problemas de otimização com objetivo de minimizar a energia de deformação para uma restrição de volume arbitrariamente prescrito e de minimizar o peso de uma estrutura para uma restrição de energia de deformação prescrita resultam em soluções equivalentes, Liang (2005). Essa afirmativa só é verdadeira quando o volume prescrito é o mínimo. Assim, o uso mínimo de material é difícil de ser determinado *a priori* pelo engenheiro projetista. Portanto, as aplicações de métodos de otimização estrutural formulados com o objetivo de minimizar a energia de deformação para um volume prescrito nos levam a um ótimo estacionário, viável para projeto e não a um ótimo global.

Uma variante do ESO denominada SESO –“ *Smoothing ESO*” desenvolvida por Simonetti (2009) e expandido nas obras de Simonetti *et al.* (2010, 2014, 2016) e Almeida *et al.* (2011, 2013) é baseado em uma suavização da heurística de remoção do método ESO. Teoricamente, não se pode garantir que tal procedimento evolucionário produziria sempre a melhor solução. No entanto, a técnica SESO fornece uma ferramenta útil para engenheiros e arquitetos que são interessados na exploração de formas estruturalmente eficientes. Esse artigo trata do avanço do algoritmo SESO para otimização de estruturas elásticas 2D minimizando a energia de deformação. Assim, o procedimento de otimização é baseado na remoção progressiva dos elementos de baixa energia.

O artigo é apresentado da seguinte forma: A Seção 2 trata da técnica SESO, a Seção 3 ilustra o modelo geral e apresenta a formulação matemática do problema de otimização proposto; A seção 4 apresenta os resultados numéricos para validar e demonstrar a capacidade da metodologia proposta; A seção 5 apresenta as conclusões finais.

2 SMOOTHING EVOLUTIONARY STRUCTURAL OPTIMIZATION (SESO)

Xie e Steven (1993) desenvolveram uma maneira bem simples de impor modificações na topologia da estrutura, feita mediante heurística de remoção gradual e sistemática de elementos finitos da malha, correspondentes a regiões que não contribuem efetivamente para o bom desempenho da estrutura. Essa metodologia de otimização é denominada ESO. O SESO se baseia nessa filosofia sendo, porém, mais eficiente e matematicamente consistente. O procedimento de suavização aplica uma ponderação sobre a matriz constitutiva, de forma que o elemento que *a priori* seria eliminado no ESO, seja mantido e receba uma relaxação. A relaxação se processa aplicando-se uma degradação no valor de sua rigidez inicial, de forma que o mesmo permaneça no domínio de projeto, e naturalmente, ao longo do processo de remoção, sua influência contribua para sua permanência ou, por outro lado, fortaleça sua retirada em definitivo do domínio de projeto.

A técnica SESO que é uma suavização do ESO foi estendida para otimização de topologia usando como critério a energia de deformação. Para esse fim, define-se inicialmente

uma malha de elementos finitos que circunscreve toda a estrutura, ou domínio estendido do projeto, de forma a incluir as condições de contorno em forças e deslocamentos, cavidades e demais condições iniciais. Em um processo iterativo, avaliam-se os parâmetros de interesse de otimização; nesse artigo em especial é a maximização da rigidez mantendo a massa fixa e minimizando a energia de deformação. Assim, avaliam-se a energia de deformação de cada elemento, conforme o uso da inequação:

$$U_e < RR_k * (U_e^{\max}) \quad (1)$$

$$RR_{k+1} = RR_k + ER \quad (2)$$

Com U_e e $U_e^{\max}$ sendo, respectivamente, a energia de deformação do elemento “e” e máxima da estrutura na iteração efetiva “k”, RR_k é Razão de Rejeição do k-ésimo estado de equilíbrio, que é uma taxa utilizada para controlar a retirada dos elementos da estrutura.

Os elementos que estão próximos ao limite pela esquerda desta energia máxima são mantidos na estrutura, definindo assim um procedimento de retirada “não radical” e sim, de forma suave. O procedimento “soft-kill” usado no SESO pode ser interpretado assim:

$$D_i(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma_i \\ D_0 \cdot \eta_j(\bar{\Gamma}) & \text{se } j \in \Gamma_{GS} \\ 0 & \text{se } j \in \Gamma_{LS} \end{cases} \quad (3)$$

onde $\bar{\Gamma} = \Gamma_{LS} + \Gamma_{GS}$ é o domínio dos elementos que atendem a inequação (1), Γ_{LS} é o domínio dos elementos que devem ser excluídos efetivamente, Γ_{GS} o domínio dos elementos que são devolvidos a estrutura, $0 \leq \eta_j(\bar{\Gamma}) \leq 1$ é uma função reguladora que pondera o valor da razão $U_e/U_e^{\max}$ dentro do domínio $\bar{\Gamma}$. A proposta da suavização é desempenhada por uma função constante $\eta_j(\bar{\Gamma}) = \alpha * EY(j)$ onde $\alpha = 10^{-4}$ é uma constante empírica e $EY(j)$ é o módulo de elasticidade do elemento j .

2.1 FILTRO DE VIZINHANÇA ESPACIAL

Segundo Sigmund (2007) a redução do espaço de solução com o objetivo de eliminar as instabilidades da OT como tabuleiro de xadrez e a dependência da malha permite o controle da complexidade da topologia e elimina a não existência de solução. Nesse sentido, implementou-se um filtro espacial de vizinhança. O parâmetro de controle do filtro é o raio do filtro, e quando o raio é maior, a suavização da distribuição de energia de deformação do elemento central (i) dentro do domínio inicial também é maior. No entanto, um valor pequeno não deve ser usado porque ele poderia causar o retorno do problema do tabuleiro de xadrez. Essa energia de deformação é calculada observando-se a distância entre o centroide do elemento central e os centroides dos elementos que estão dentro de um círculo de raio r ; como mostrado na Fig. 1. O filtro implementado mostrou-se capaz de suavizar a distribuição espacial das variáveis de projeto (a energia de deformação de cada elemento) dentro do domínio inicial e também

minimizou a dependência da malha de elementos finitos permitindo o controle da complexidade da topologia conforme observado por Sigmund (2007).

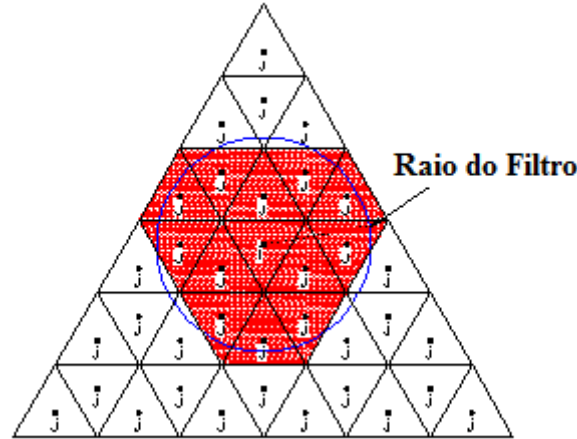


Fig. 1 – Elemento central i sofrendo a influência dos elementos vizinhos dentro de um círculo de raio r

A forma como o elemento i é influenciado pela energia de deformação elemento j dentro do círculo de raio, r , é dado pela Eq. (4):

$$U_i^{weighted} = \frac{U_i \cdot A_i + \bar{w} \cdot \sum_{j=1}^{NE} U_j \cdot A_j}{A_i + \bar{w} \cdot \sum_{j=1}^{NE} A_j} \quad (4)$$

O termo $U_i^{weighted}$ é a energia de deformação do elemento central i , que inicialmente representa uma energia de deformação U_i ; A_i é a área do elemento i ; A_j é a área do elemento j ; e U_j é a energia de deformação do elemento j . O peso da média calculada na Eq. (4) é dada pela expressão:

$$\bar{w} = \frac{\sum_{j=1}^{NV} w_j}{NV} \quad (5)$$

onde

$$w_j = \frac{R_{max} - R_{ij}}{R_{max}} \quad (6)$$

Na Eq. (4), NV representa o número de elementos finitos com centroides dentro de um círculo de raio $R_{\max}$. Na Eq. (6), R_{ij} é a distância entre os centroides do i -ésimo e do j -ésimo elemento. Desta forma, mesmo se houver um refinamento na malha de elementos finitos, o raio é mantido, e a região delimitada pelo círculo será a mesma, apenas com mais elementos finitos triangulares influenciando a energia de deformação sobre o elemento central. Essa metodologia justifica a redução da dependência da solução no nível da discretização dos elementos finitos e também reduz a instabilidade do tabuleiro. A maioria dos filtros usa uma abordagem heurística, mas eles produzem bons resultados, que são semelhantes à técnica de gradiente de restrição local por Sigmund e Petersson (1998).

O algoritmo do procedimento evolucionário pode ser descrito como segue:

- 1) Discretizar o domínio para a análise de elementos finitos.
- 2) Resolver o problema elástico, aplicando as condições de contorno, deslocamento e forças externas.
- 3) Determinar a energia de deformação em cada elemento
- 4) Aplicar o filtro especial e determinar a máxima energia de deformação, usando $U_e < RR_k * (U_e^{\max})$.
- 5) Remover os elementos do domínio G_{LS} , e modificar a matriz constitutiva dos elementos no domínio G_{CS} .
- 6) Se $\bar{\Gamma} = 0$ um estado de equilíbrio é alcançado na i -ésima iteração, então atualiza a razão de rejeição $RR_{k+1} = RR_k + ER$ caso contrário não é realizada essa atualização.
- 7) Enquanto $PI_i > 1$, repetir os passos de 2 a 6; Se $PI_i < 1$, a estrutura não apresenta o procedimento é interrompido pois a performance da estrutura está comprometida.

2.2 – ÍNDICE DE DESEMPENHO

Para estruturas em estado plano de tensão com restrições de desempenho do sistema, o índice de desempenho pode ser escrito como:

$$PI_U = \alpha \frac{V_0}{V_i} \quad (7)$$

Em que PI_U é o índice de desempenho da estrutura, $\alpha = \frac{U_0}{(1-\beta)^n * U_i}$ e U_0 é o valor absoluto

da energia de deformação da estrutura inicial sob cargas aplicadas e U_i é o valor absoluto da energia de deformação da estrutura corrente sob cargas aplicadas na i -ésima iteração, $n = 2$, valor empírico obtido com testes realizados em diversos exemplos, e β é uma taxa que suaviza o valor da energia de deformação na iteração i .

Na eliminação gradual de elementos de baixo nível de energia de um domínio de projeto contínuo, a distribuição de energia de deformação de elementos dentro da estrutura resultante tenderá para um nível cada vez mais uniforme. No entanto, a condição uniforme deste nível de energia de deformação em uma estrutura contínua pode não ser alcançada mesmo se a restrição tiver sido violada. Isto significa que um projeto de peso mínimo com níveis de desempenho aceitáveis não é necessariamente uma estrutura na qual a distribuição de energia de deformação de seus elementos é absolutamente uniforme. Os critérios de otimalidade baseados no desempenho foram propostos para identificar o ótimo de um processo de otimização em energia por Liang e Steven (2002).

O controle do ótimo é feito por esse IP, pois ele é um fator de “monitoramento” da região ótima de projeto. O controle da maximização deste parâmetro refere-se ao controle de minimização do volume, assim, caso esse índice caia de forma acentuada é uma forte indicação que se passou por uma configuração de ótima ou um ótimo estacionário é alcançado. No entanto, não se pode garantir que esse ótimo é um ótimo global, mas sim uma configuração ótima de projeto de engenharia com um desempenho confiável.

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Os princípios variacionais ou energéticos representam a base da otimização de topologias de estruturas discretas e contínuas. Portanto, detalhes como o Princípio da Conservação da Energia, Funções Potenciais e equações constitutivas, podem ser encontradas nas publicações de Green and Zerna (1968) e Eschenauer *et al.* (1993, 1997), Eschenauer e Schumacher (1997) e Eschenauer e Olhof (2001).

3.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA

Com o objetivo de discutir uma formulação matemática para otimização de topologia de uma estrutura do contínuo, consideramos o problema clássico de topologia para a máxima rigidez de estruturas elásticas lineares carregadas estaticamente com uma única força, que equivale a minimizar a energia elástica total para uma estrutura em estado de equilíbrio. Isso pode ser verificado considerando o trabalho (W) realizado pelas forças externas, Eq. (8) e a energia de deformação interna (U), Eq. (9).

$$W(u) = \int_V f^T u dV + \int_S p^T u dS \quad (8)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (9)$$

Para usar a Eq. 8, a estrutura deve estar em equilíbrio, o que requer que o problema de equilíbrio seja resolvido antecipadamente por uma análise de elementos finitos. Assim, para expressar o problema em termos de elementos finitos com base numa análise estática utiliza-se a Eq. (10) que representa a energia potencial total e é expressa por:

$$\Pi = U - W \quad (10)$$

Na otimização estrutural minimizar esse potencial significa maximizar a rigidez e minimizar o aumento na energia de deformação. Assim, em termos de elementos finitos podemos escrever:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} u^T K u - f^T u \quad (11)$$

Onde u e f são os vetores de deslocamento global e carga, K a matriz de rigidez. O equilíbrio é obtido usando o princípio da energia potencial total mínima que requer a estacionaridade do potencial Π em relação ao deslocamento do vetor u em equilíbrio. Para isso, calcula-se a derivada do potencial Π em relação ao deslocamento u conforme Eq. (12).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} = 0 \quad (12)$$

que produz a conhecida equação de equilíbrio, dada por

$$K u = f \quad (13)$$

Desta forma, minimizar o trabalho realizado pelas forças externas pode ser expresso como:

Minimize $W(u)$

sujeito a $K u = F$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{NE} x_i V_i - \bar{V} \leq 0 \quad (14)$$

$$X = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_N\}, \quad x_i = 1 \text{ ou } x_i = 0$$

3.2 – PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A rigidez é um dos principais fatores que devem observados nos projetos de estruturas como edifícios e pontes. Desse modo, o objetivo e as restrições na técnica SESO são vagos, especialmente para a otimização da rigidez. O SESO busca o volume mínimo de material sujeito a um determinado critério de tensão, deslocamento e nesse trabalho a energia de deformação. Todavia, o SESO pode evoluir para uma solução muito pior do que o ótimo ou até mesmo ao colapso da estrutura, se for aplicada uma restrição inadequada ou um valor grande para a Razão Evolucionária (ER). Para evitar projetos não viáveis, o uso de um índice de performance para monitorar o procedimento evolucionário é necessário e foi proposto em Simonetti *et al.* (2014). Liang e Steven (2002) usaram o produto (*compliance*volume*) como um índice de desempenho para um procedimento denominado *Performance-Based Optimization* (PBO). Assim, o procedimento evolucionário deve ser interrompido quando o índice de desempenho cai drasticamente. No entanto, o problema ainda pode surgir, por exemplo, todo o procedimento evolucionário pode ser interrompido antes que uma restrição de deslocamento prescrito seja satisfeita. A OT é muitas vezes direcionada à busca da estrutura mais rígida para um volume

de material prescrito. Na técnica SESO, uma estrutura é otimizada removendo $p\%$ e devolvendo $(1-p\%)$ dos elementos, isto é, o elemento em si, em vez de seus parâmetros físicos ou materiais associados, é tratado como a variável de projeto. Portanto, para minimizar a energia através da remoção de elementos, é evidente que a maneira mais eficaz é eliminar os elementos que têm os valores mais baixos de modo que o aumento na energia seja mínimo. Assim, levando em conta o equilíbrio $W = 2U$, a forma equivalente ao problema definido na Eq. (14) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } U(X) &= \frac{1}{2} u^T K u = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_e^T E_e(x) \varepsilon_e dV_e \\ \text{sujeito a } Ku &= F \\ V(X) &= \sum_{i=1}^{NE} x_i V_i - \bar{V} \leq 0 \\ X &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_N\}, \quad x_i = 1 \text{ ou } x_i = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Onde E_e é a matriz de elasticidade do elemento, ε_e é o vetor das deformações do elemento, V_e é o volume de um elemento, NE é o número de elementos finitos da malha, K é matriz de rigidez, $Ku = F$ é equação de equilíbrio onde F é o vetor das cargas aplicadas na estrutura, x_i é a variável de projeto do i -ésimo elemento e X é o vetor das variáveis de projeto.

4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 VIGA MBB – CARGA GRAVITACIONAL CONCENTRADA NO TOPO E DISTRIBUÍDA NOS NÓS

Neste exemplo, proposto por Huang e Xie (2009), usando o soft-kill *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO), considera-se uma viga MBB clássica mostrada na Fig. 2a. Essa viga está submetida a uma carga concentrada, aplicada no ponto médio da parte superior resultante do Peso Próprio (PP) da estrutura. As dimensões do domínio de projeto são de $(20\text{m} \times 5\text{m} \times 1\text{m})$. Devido à simetria, apenas metade do domínio de projeto é analisado usando uma malha de (100×50) elementos finitos quadrilaterais. A restrição de volume é definida como 40% de todo o domínio de projeto, isto é a massa final da estrutura é de 3120kg. As propriedades do material utilizado são: módulo de Young $E = 200\text{GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e a massa específica é $\rho = 78\text{kg/m}^3$. A Fig. 2b, mostra a topologia ótima alcançada pelos autores citados. É válido ressaltar que Huang e Xie (2009) afirmam que a força concentrada aplicada na parte superior sem a utilização do PP distribuído ao longo do domínio desta estrutura não afeta a topologia ótima.

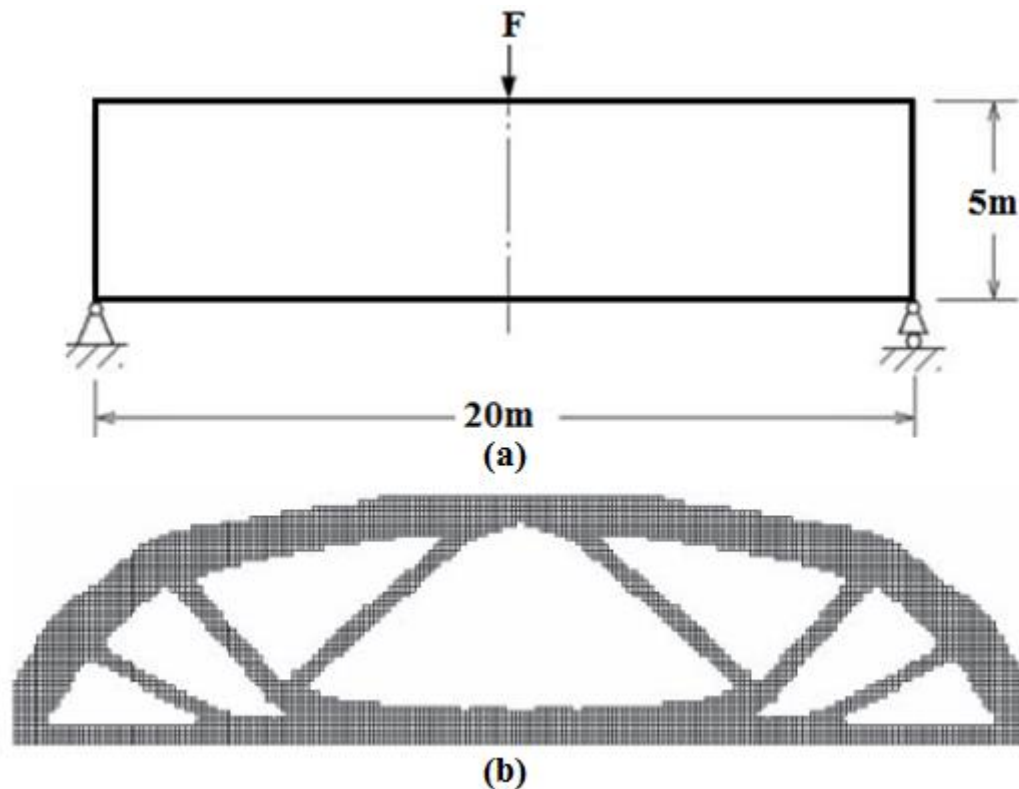


Figura 2 – (a) Domínio de projeto, (b) Topologia ótima por Huang e Xie (2009)

Esse exemplo foi analisado com a presente formulação em dois cenários: a) o PP considerado no topo da estrutura e b) o PP distribuído nos nós dos elementos da estrutura. Para estes dois casos, utilizou-se uma malha (100x50), totalizando 10000 elementos finitos triangulares. Assim, a estrutura evolui para um ótimo na iteração 62, com massa final igual a 2691 kg. A Fig. 3a mostra a topologia ótima alcançada com a presente formulação adotando uma força concentrada $F=100\%PP$. A Fig. 3b mostra a topologia ótima para uma força $F=50\%PP$. Desse modo, constatou-se que a estrutura não sofre variações significantes na topologia final. Verifica-se que a topologia resultante não depende significativamente da razão entre a carga concentrada e o PP estrutural. No entanto, quando o volume prescrito é reduzido, a forma da estrutura tende a se tornar um arco, o que é extremamente coerente do ponto de vista da engenharia estrutural. Tal comportamento também foi observado por Bruyneel e Duysinx (2005) e Huang e Xie (2009).

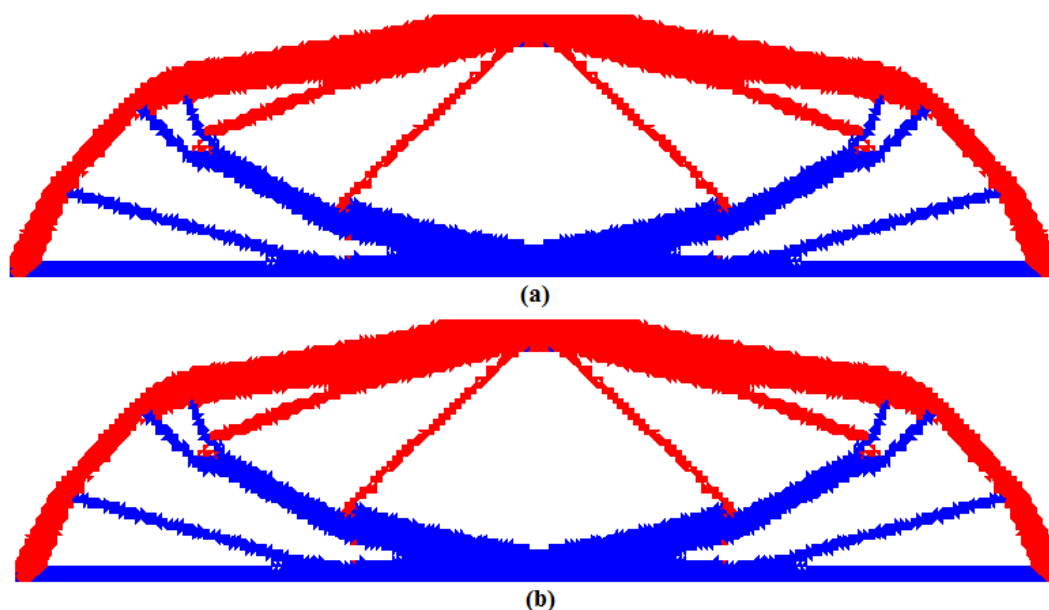


Figura 3 – (a) Topologia ótima $F=100\%$ do PP, (b) Topologia ótima $F=50\%$ do PP

Para uma análise mais precisa da influência do PP nessa estrutura, implementou-se um algoritmo que calcula o PP distribuindo a carga no nó de cada elemento finito da estrutura. Destaca-se, Fig. 4, que a estrutura evolui para a mesma configuração ótima dos casos anteriores, considerando apenas uma carga concentrada unitária no topo da estrutura, cuja ordem de grandeza é insignificante quando comparada com o PP da mesma. Ressalta-se ainda que o custo computacional é de 57 minutos e menor quando PP está distribuído na estrutura cujos os custos computacionais para $F=100\%$ do PP (59 minutos) e para $F=50\%$ do PP (58,6 minutos).

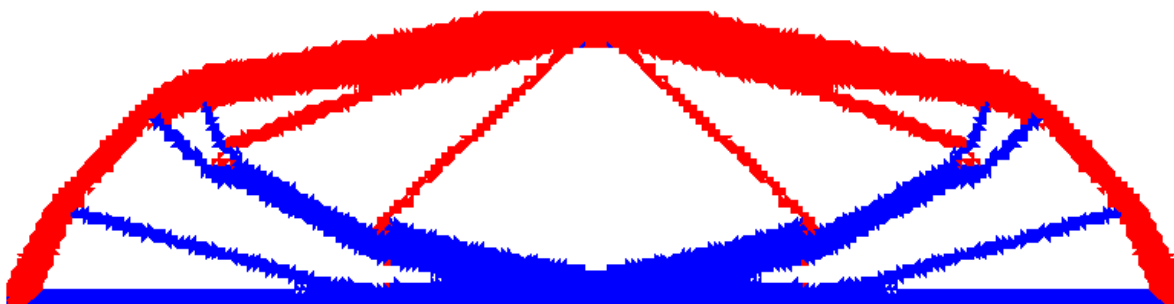


Figura 4 – Topologia ótima considerando o PP distribuído na estrutura

Na Fig. 5 está representada a variação da energia de deformação para os casos de $F=100\%$ do PP no topo e distribuído em todos os nós dos elementos desta estrutura. Nota-se que a energia de deformação é maior durante todo o procedimento evolucionário em que o PP foi distribuído na estrutura. Nesse sentido, entende-se que o gráfico apresentado nessa figura é extremamente coerente pois a retirada de um elemento desta malha provoca uma deformação maior, uma vez que, sua massa na estrutura é maior devido a distribuição do PP nos nós elementos. Verificou-se também que diminuindo carga no topo proporcionalmente ao peso implica numa redução na energia de deformação da estrutural.

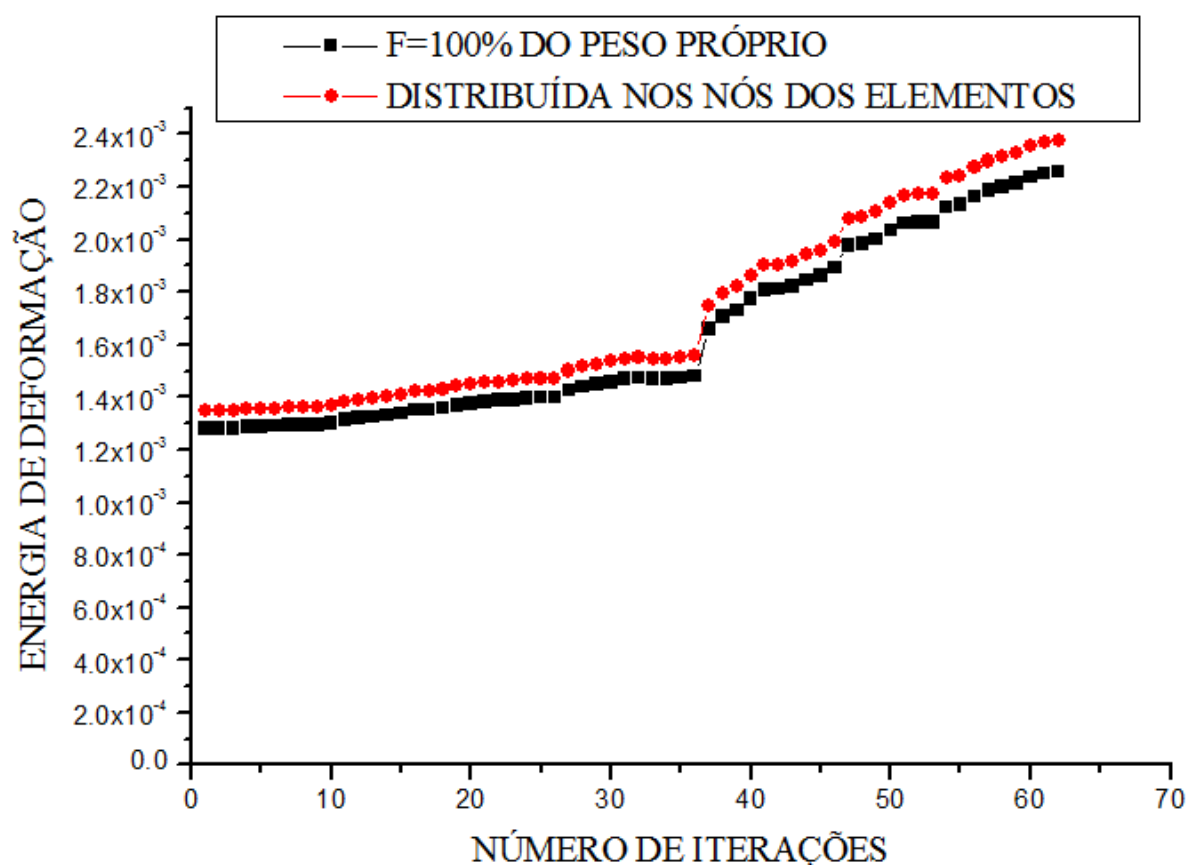


Figura 5 – Energia de deformação por iteração

A Fig. 6, mostra a variação do volume e do índice de desempenho da estrutura analisada para o PP distribuído no topo da estrutura e nos nós dos elementos. Assim, foi possível verificar que nas duas análises o índice de desempenho apresentou os mesmos valores durante todo o processo de otimização e a mesma variação do volume. Isto se deve ao fato de que todos os parâmetros de otimização foram mantidos iguais, condições de contorno, $RR = 1,0\%$ $ER = 2,0\%$ e as propriedades do material utilizado.

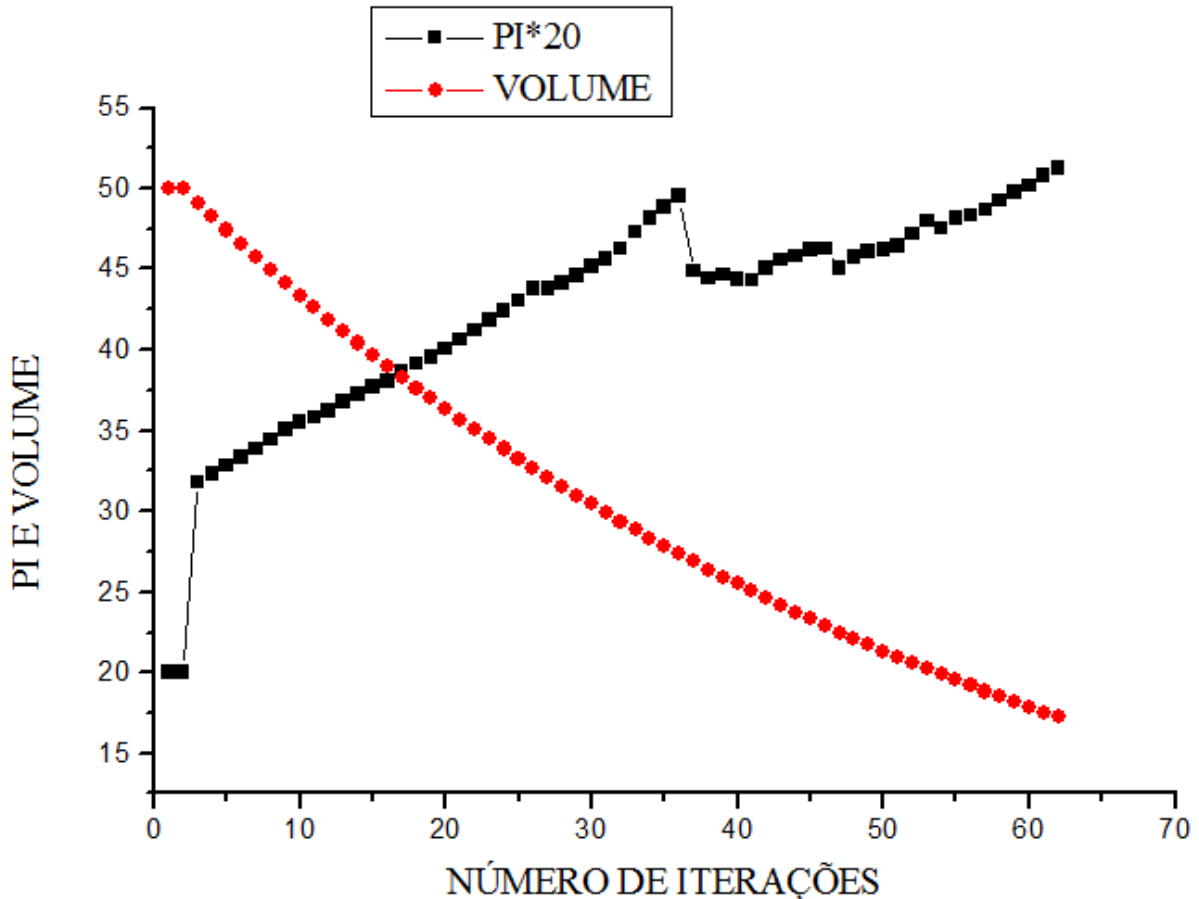


Figura 6 – PI e Volume por número de iterações

Analisando o as Fig. 5 e 6 é possível constatar que o índice de desempenho monitora corretamente o procedimento de otimização pois na iteração 36 para 37 ocorre uma queda no índice de desempenho devido a um aumento na energia de deformação.

5.2 VIGA CURTA EM BALANÇO

Esse exemplo serve como um problema de validação para o presente estudo. Essa viga foi analisada na literatura utilizando um método de otimização (SIMP), Sigmund (2001), por Kim *et al.* (2002) usando o método ESO, inserindo uma metodologia denominada ICC (Intelligent Cavity Creation), que é o controle da criação das cavidades ao longo do processo iterativo e Simonetti *et al.* (2014) usando a técnica SESO com critério de tensão de von Mises. O problema consiste em uma viga curta em balanço carregada por uma força vertical de 100 N atuando no ponto médio da extremidade direita da estrutura, e na extremidade oposta fixada nas partes inferiores e superiores, ver Fig. 7a. O comprimento e a altura da viga foram de 160 e 100 mm, respectivamente, e a espessura de 1 mm. A estrutura foi discretizada com uma malha regular com elementos finitos quadrilaterais. Assumiu-se que o material era de aço com um módulo de Young de 207 GPa e uma coeficiente de Poisson de 0,3. As configurações ótimas obtidas por esses autores podem ser observadas na Fig. 7b e 7c, Kim *et al.* (2002), Fig. 7d, por Sigmund (2001) e Fig. 7e por Simonetti *et al.* (2014).

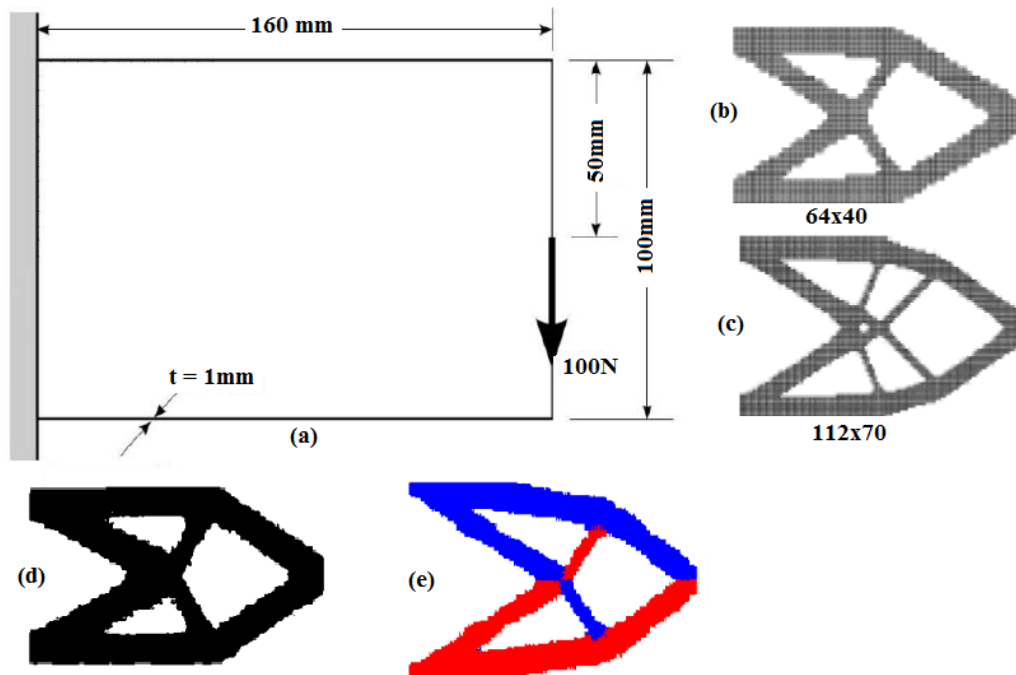


Figura 7 – (a) Domínio de projeto, (b) e (c) topologia por Kim et al (2002), (d) topologia por Sigmund (2001) e (e) topologia por Simonetti et al. 2014.

No presente trabalho empregam-se três densidades de malhas de elementos finitos triangulares de alta ordem Bergan e Felippa (1985). As Fig. 8a, 8b e 8c mostram as topologias ótimas obtidas com a presente formulação comparando essas topologias para uma redução de volume entre 60% e 65% do volume inicial. Nota-se que as configurações ótimas utilizando a técnica SESO, com critério de energia de deformação apresentaram uma pequena formação do “tabuleiro de xadrez” durante o procedimento de otimização apesar da aplicação do filtro espacial. Observa-se ainda que a configuração final apresentada para projeto é menos sensível à densidade da malha do que as configurações ótimas apresentadas por Kim *et al.* (2002) e Simonetti *et al.* (2014).

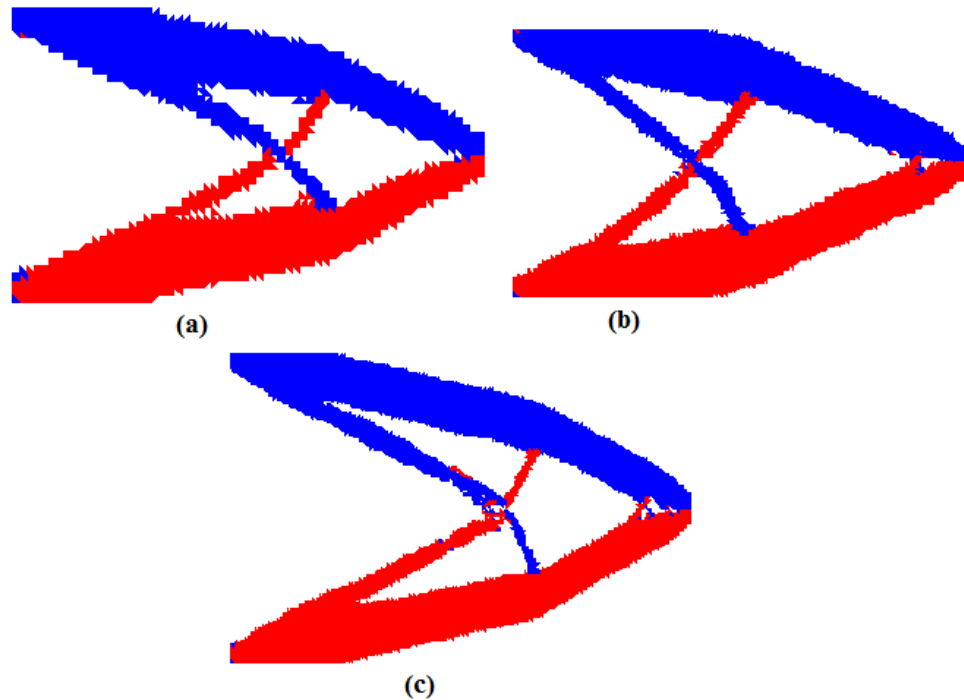


Figura 8 – Topologias para diferentes densidades de malha – (a) 64x40 – 5120 elementos (b) 96x60-10.800 elementos e (c) 128x80-20.480 elementos.

As Fig. 9a, 9b e 9c mostram a variação da energia de deformação, do índice de desempenho e do volume por iteração para as três densidades malha utilizadas nesse trabalho. Destacando que durante o procedimento de otimização uma variação brusca na energia de deformação é detectada pelo índice de desempenho, uma vez que, ele tem a capacidade de monitorar todo o procedimento de otimização.

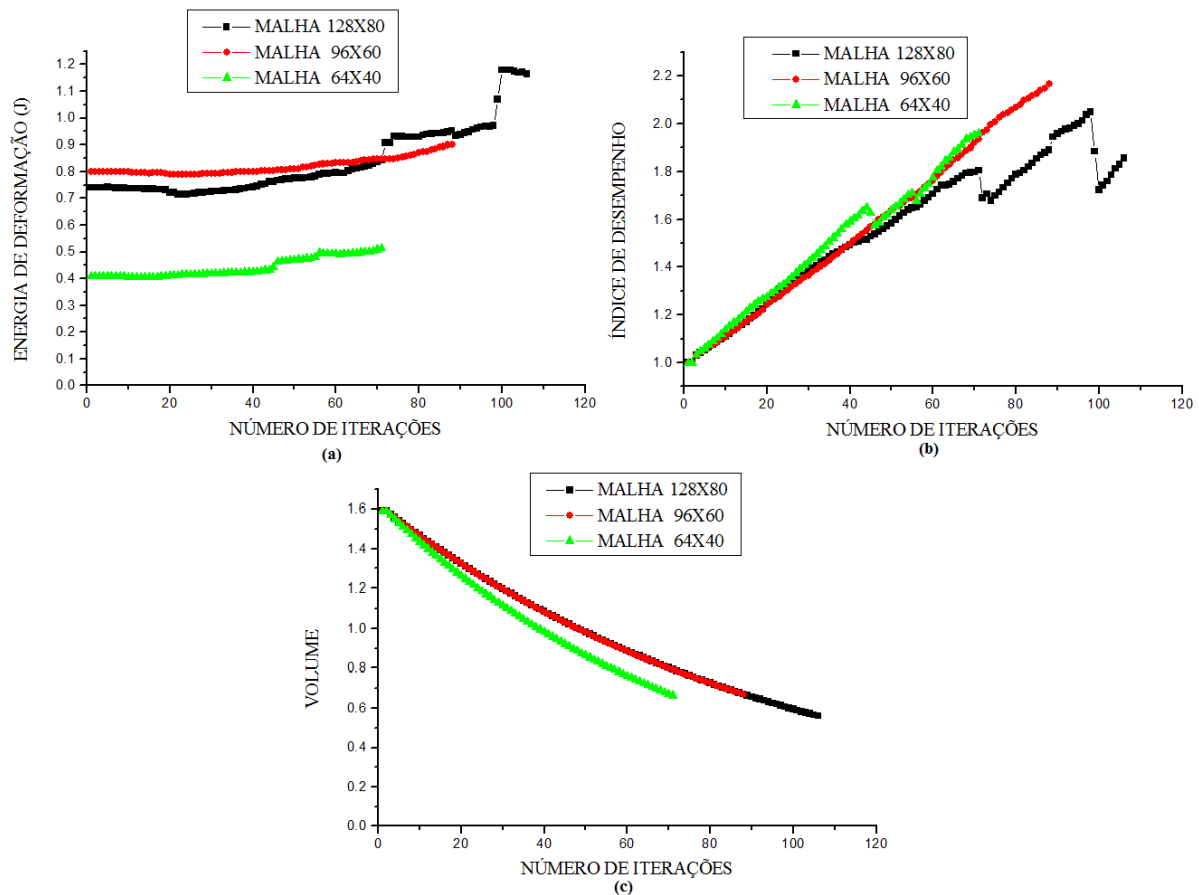


Figura 9 – (a) Energia de deformação por iteração (b) Índice de desempenho por iteração e (c) volume por iteração.

5.3 CONSOLE CURTO

Esse exemplo proposto por Liang *et al.* (2000) mostrado na Fig. 10a representa um console curto projetado para suportar uma carga de 500 kN. O console está engastado nas extremidades. As propriedades do material são: coeficiente de Poisson de 0,15, módulo de elasticidade $E = 28567$ MPa e espessura de 25mm. Um histórico do processo de otimização e a topologia ótima obtida pelos autores são apresentados nas Fig. 10b e 10c. Nas Fig. 10d e 10e tem-se, respectivamente, a topologia ótima e o modelo strut-and-tie por Liang *et al.* (2000). A Fig. 11a ilustra a topologia ótima obtida com a presente formulação SESO usando uma malha de 90x94 totalizando 16.920 elementos finitos triangulares. O custo computacional foi de 67 minutos com uma redução de volume de aproximadamente 79% do volume inicial. A Fig. 11b mostra um modelo strut-and-tie obtido com a presente formulação.

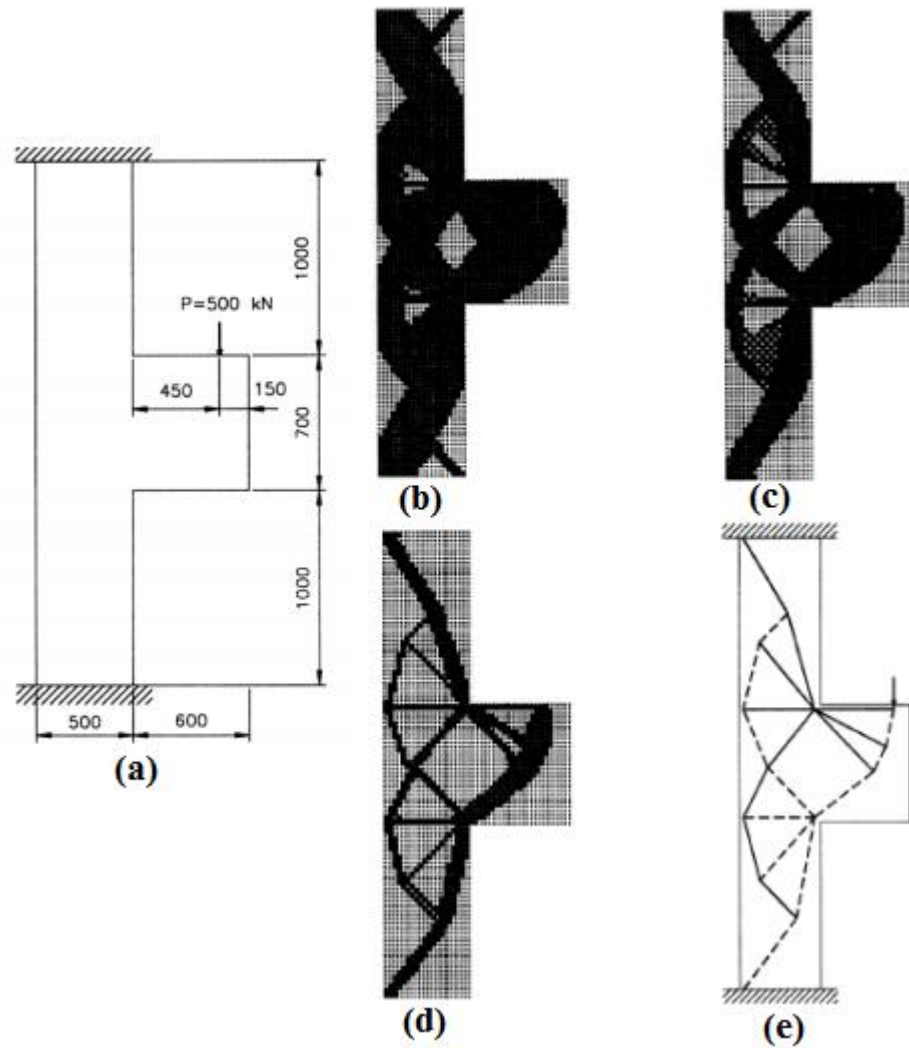


Figura 10 – (a) Domínio de projeto, (b e c) histórico de topologias
(d) topologia ótima por Liang (2000) e (e) modelo strut-and-tie

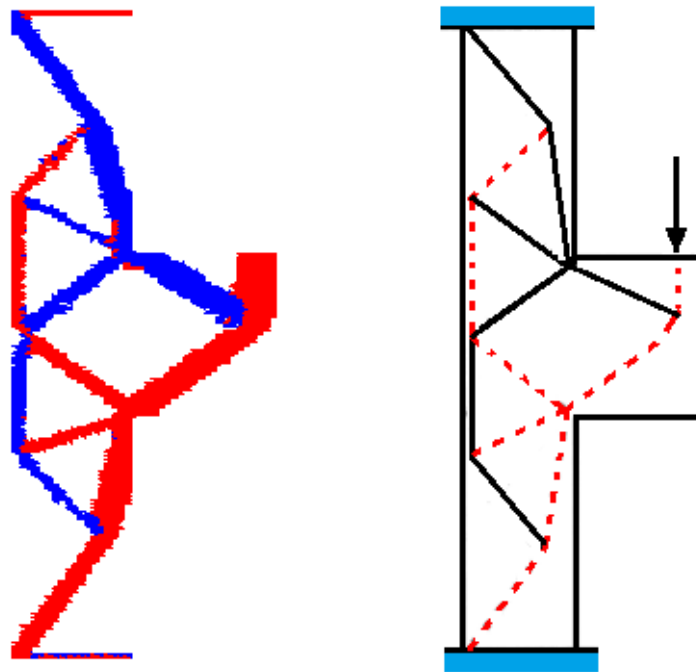


Figura 11 – (a) Topologia ótima presente formulação e (b) Modelo stut-and-tie

A Fig. 12 mostra a variação do desempenho da estrutura durante o procedimento de otimização é possível perceber que a formulação apresentada para o índice de desempenho é capaz de detectar rupturas nos membros da estrutura, nas iterações 50 para 51 e nas iterações 71 para 72 devido a uma queda acentuada nesse índice. Constata-se que na iteração 71 para a 72 o índice de desempenho se torna menor que 1 e essa estrutura então não é mais viável para projeto. O problema de otimização no presente estudo não é convexo, portanto tem-se o problema dos mínimos locais. Assim não é possível afirmar que o ótimo alcançado com a presente formulação é global, mas é um ótimo estacionário viável para projeto. O algoritmo de otimização SESO baseado em energia de deformação, avalia simultaneamente o desempenho da estrutura e se o volume prescrito foi alcançado. Portanto, é capaz de gerar uma configuração estacionária ideal para projetos de engenharia que atendam esses objetivos.

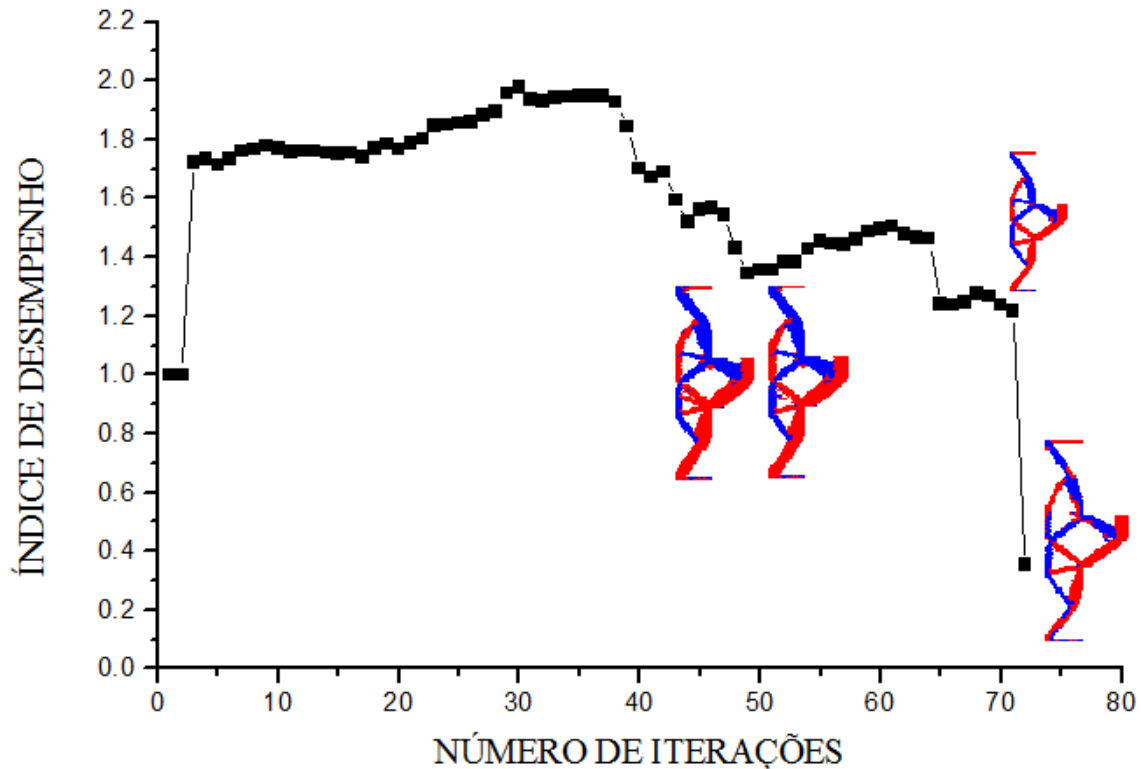


Figura 12 – Índice de Desempenho por iteração

A Fig. 13 mostra a variação da energia de deformação durante o processo de otimização é evidente a queda brusca variação na energia de deformação que ocorreu da iteração 71 para a 72, o que provocou a queda do índice de desempenho da estrutura. Verifica-se ainda que o procedimento de otimização via energia é menos estável do que os procedimentos via tensão de von Mises como pode ser constatado em Simonetti *et al.* (2010).

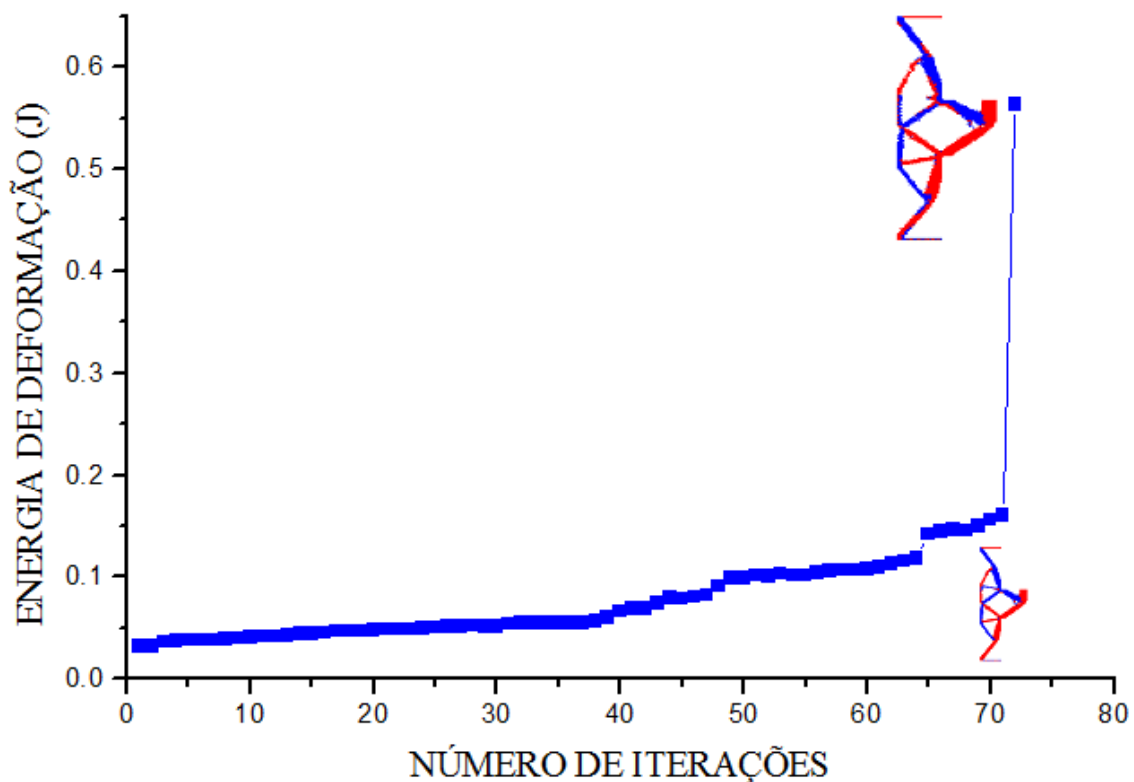


Figura 13 – Energia de deformação por iteração

6. CONCLUSÕES

Nesse artigo, propôs-se um avanço na técnica de otimização SESO usando critério de energia de deformação e um índice de desempenho, o método é capaz de reproduzir muitas soluções ótimas obtidas por outros métodos de otimização que são matematicamente mais complicados. A otimização é realizada com análise de elementos finitos, repetidamente, com a remoção de elementos finitos com baixo valor de energia de deformação. A taxa de remoção é um parâmetro importante pois um alto valor pode produzir uma instabilidade na estrutura, removendo uma grande quantidade de elementos em uma única iteração. Essa taxa de remoção funciona como o tamanho do passo na programação matemática, desempenhando um papel fundamental durante o processo de otimização.

O índice de desempenho baseado em energia foi implementado e é uma ferramenta extremamente útil na otimização de topologia de estruturas do contínuo. Foi usado como critério de parada e também tem a função de monitorar o processo de otimização garantindo que o ótimo seja viável para projetos de engenharia. Nesse sentido, é possível também detectar quebra de membros na estrutura pois, nesse momento, existe um aumento na energia de deformação e conseqüentemente ocorre a captura desta informação no índice de desempenho.

Conclui-se ainda que a energia de deformação tem valores mais altos quando o peso próprio da estrutura é distribuído nos nós dos elementos. No entanto, o custo computacional da estrutura nesse caso é menor do que para o PP no topo da estrutura.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o Instituto Federal de Ciências e Tecnologias de Minas Gerais Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, a FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), a Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) pelo seu apoio financeiro a essa pesquisa.

8. REFERÊNCIAS

- [1] Almeida, V.S.; Simonetti, H.L.; Neto, L.O. Comparative analysis of strut-and-tie models using Smooth Evolutionary Structural Optimization, *Engineering Structures*, Vol. 56, p. 1665-1675, 2013.
- [2] Almeida, V.S.; Simonetti, H.L.; Oliveira Neto, L. The strut-and-tie models in reinforced concrete structures analysed by a numerical technique, 53º Congresso Brasileiro do Concreto, CBC 2011. (em português).
- [3] Bergan, P.G.; Felippa, C.A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69, 1985.
- [4] Bruyneel, M. and Duysinx, P. (2005). Note on topology optimization of continuum structures including self-weight. *Struct. Multidisc. Optim.* **29**: 245–56.
- [5] Chu, D.N.; Xie, Y.M.; Hira, A.; Steven, G.P. “Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 21, pp. 239-251, 1996.
- [6] Chu, D.N.; Xie, Y.M.; Hira, A.; Steven, G.P. “On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints”, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 24, pp. 197-212, 1997.
- [7] Eschenauer HA, Schumacher A, and Vietor T (1993), Decision makings for initial designs made of advanced materials, In: Bendsøe MP and Mota Soares CA (eds): *Topology Design of Structures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 469–480.
- [8] Eschenauer HA and Schumacher A (1997), Topology and shape optimization procedures using hole positioning criteria-theory and applications, In: Rozvany GIN (ed): *Topology Optimization in Structural Mechanics*, Vol 374 of CISM Courses and Lectures, Wien: Springer, 135–196.
- [9] Eschenauer H, Olhoff N, and Schnell W (1997), *Applied Structural Mechanics: Fundamentals of Elasticity, Load-Bearing Structures, Structural Optimization*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 398 p, 179 Figs.
- [10] Eschenauer, H. A., Olhoff N. (2001). *Topology optimization of continuum structures: A review*. *AIAA Journal* 54(4): 331-390.
- [11] Frangopol, D.M., Maute, K. (2003). *Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures*. *Computers & Structures* 81: 397-410.
- [12] Goldberg, D.E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimisation and Machine Learning*, Addison-Wesley.
- [13] Green AE and Zerna W, (1968), *Theoretical Elasticity*, Clarendon Press, Oxford, 2nd Ed.

- [14] Holland, J.H. (1975) *Adaptation in natural and artificial systems*. London: MIT Press.
- [15] Huang, X. and Xie, Y.M. (2009). Evolutionary topology optimization of continuum structures including self-weight loads. Submitted to *Finite Element in Analysis and Design*.
- [16] Kim, H, Querin, O.M., Steven, G.P, Xie, Y.M., 2002. Determination of an Optimal Topology with a Predefined Number of Cavities, *AIAA Journal*, Vol. 40, n. 4, pp 739-744.
- [17] Liang, Q.Q. *Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications*. London: Spon Press; 2005.
- [18] Liang, Q. Q., Xie, Y. M. and Steven, G. P. (2000) "Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure," *ACI Structural Journal*, 97(2): 322–330.
- [19] Liang, Q. Q. (2001a) *Performance-Based Optimization Method for Structural Topology and Shape Design*, PhD thesis, Victoria University of Technology, Australia.
- [20] Liang, Q.Q., Xie, Y.M. ; Steven, G.P. Optimal topology selection of continuum structures with displacement constraints, *Computers and Structures*, Vol. 77, No. 6, pp. 635-644, 2000.
- [21] Liang, Q. Q. (2001b) "Performance-based optimization method in civil and structural engineering," paper presented at the Australasian Structural Engineering Conference, Gold Coast, Australia, pp. 37–44.
- [22] Liang, Q. Q. and Steven, G. P. (2002) "A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(13–14): 1471–1489.
- [23] Munk1, D.J., Vio1, G.A. and Steven, G.P., (2015), Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms: a review, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52, 613–63.
- [24] Osher S, Sethian JA (1988) Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J Comput Phys* 79(1):12–49
- [25] Querin, O.M., Xie, Y.M., Steven, G.P. (1998). *Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm*. *Engineering Computations* 15: 1031-1048.
- [26] G. I. N. Rozvany, M. Zhou, and T. Birker. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 4(3):250–252.
- [27] Sigmund, O. and J. Petersson. (1998). Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural optimization*, 16(1):68–75.
- [28] Sigmund, O. (2001) "A 99 line topology optimization code written in Matlab," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21: 120–127.
- [29] Sigmund O. (2007) Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Struct Multidiscip Optim* 33(4–5):401–424
- [30] Sigmund O, Maute K (2013) Topology optimization approaches. *Struct Multidiscip Optim* 48(6):1031–1055.

- [31] Su, J., Renaud, J.E. (1997). *Automatic Differentiation in Robust Optimization*. AIAA Journal 35 (6): 1072-1079.
- [32] Simonetti, H.L.; Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais, Dissertação Mestrado - Universidade Federal de Ouro Preto. Escola de Minas. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil.(2009) (em português).
- [33] Simonetti, H.L.; Almeida, V.S.; Neves, F.A. Seleção de Topologias Ótimas para Estruturas do Contínuo com minimização de Volume sujeita a restrição de tensão via “Smoothing ESO” (SESO); CILAMCE; Argentina; 2010. (em português).
- [34] Simonetti, H. L.; Almeida, S. A. ; Neves, F.A. . Optimal topology selection for 2D structures with stress constraints via SESO. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol.30, p. 69-76,2014.
- [35] Simonetti,H.L.; Almeida,V.S.; Neto,L.O. A smooth evolutionary structural optimization procedure applied to plane stress problem, Engineering Structures, Vol. 75, p. 248-258,2014.
- [36] Simonetti, H.L., Almeida,V.S.; Neto,L.O, Francisco, A.N., Optimal Strut-and-tie Models Using Smooth Evolutionary Structural Optimization, Revista CIATEC – UPF, vol.8 (2), p.p.34-49, 2016
- [37] Xie Y.M.; Steven, G.P. A simple evolutionary procedure for structural optimization, Computers & Structures, Vol. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.