



THERMAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES BY MEANS FINITE ELEMENT METHOD

Igor Pierin

Valdir Pignatta Silva

igorpierin@usp.br

valpigss@usp.br

Dept. of Structural and Geotechnical Engineering - Polytechnic School at University of São Paulo

Av. Prof. Almeida Prado, 83 tv. 2, CEP 05508-070, São Paulo, Brasil

Henriette Lebre La Rovere

henriettelarovere@gmail.com

Dept. of Civil Engineering – Federal University of Santa Catarina

Rua João Pio Duarte, 294, CEP 88037-000, Florianópolis, Brasil

Abstract. *Structural materials such as reinforced concrete, steel, wood and aluminum, usually have their mechanical proprieties degraded when heated. In structural fire design, frequently it becomes necessary to carry out a thermal analysis in order to obtain the thermal field as a function of the fire exposure time. The thermal analysis is governed by the Poisson's equation, which can be solved by the Finite Element Method. This paper shows the Finite Element formulation applied to the transient thermal analysis of three-dimensional structures. This formulation was employed in the development of the ATERM-3D software. The data input and the visualization of the results are carried out by means of the GiD software. The structure may be composed of any material and heating is provided by means of any curve temperature versus time. The ATERM-3D software is validated by comparison of numerical results with the ones obtained using SAFIR software for some examples. Concluding remarks and a few recommendations on thermal analysis are presented at the end.*

Keywords: *fire, thermal analysis, finite element method, software.*

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento da distribuição de temperaturas no interior de um sólido é de grande importância em várias áreas da engenharia. Na Engenharia Civil, em particular nos projetos de estruturas em situação de incêndio e nos projetos de barragens de concreto compactado a rolo, o interesse pelo estudo da evolução do campo de temperaturas nos elementos estruturais tem crescido consideravelmente nos últimos anos.

O projeto de estruturas de aço e de concreto em situação de incêndio é regido pelas normas ABNT NBR 14323:2013 e ABNT NBR 15200:2012, respectivamente. Essas normas apresentam métodos simplificados e permitem métodos avançados para a verificação dos elementos estruturais em situação de incêndio, além do uso de ensaios. Em diversas situações, os métodos simplificados são aplicáveis. No entanto, há situações de projeto que não podem ser representadas pelas formulações simplificadas presentes na norma, sendo necessária uma análise mais refinada.

O uso dos métodos avançados de verificação da segurança das estruturas em situação de incêndio requer modelos para a determinação do desenvolvimento e da distribuição de temperatura nas peças estruturais.

A análise térmica deve ser baseada em princípios reconhecidos e hipóteses da transferência de calor. O modelo adotado deve considerar as ações térmicas relevantes e a variação das propriedades térmicas do material com a temperatura. Os efeitos da exposição térmica não uniforme e da transferência de calor em componentes de edifícios adjacentes devem ser incluídos quando forem relevantes.

Apresenta-se neste artigo uma formulação para a análise térmica de estruturas tridimensionais utilizando o método dos elementos finitos. Essa formulação foi implementada em um programa computacional denominado ATERM-3D, desenvolvido pelos autores na linguagem FORTRAN 90. Para a entrada de dados e a visualização do campo de temperaturas utiliza-se o programa GiD (CIMNE, 2011). Para validar os resultados obtidos pelo programa ATERM, foram feitas comparações ao programa SAFIR, desenvolvido na Universidade de Liège, (Franssen e Gernay, 2016).

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Inicialmente, o método dos elementos finitos foi aplicado a problemas mecânicos da engenharia estrutural. A análise térmica foi a primeira área não estrutural a utilizar o método dos elementos finitos para a modelagem de problemas de engenharia.

A determinação do campo de temperaturas no elemento estrutural é o primeiro passo para a análise de estruturas em situação de incêndio. A distribuição de temperaturas influencia a distribuição de tensões no elemento estrutural.

O calor propaga-se no aço por condução, cujo fenômeno é regido pela equação de Poisson que, para domínios tridimensionais, é dada pela equação (1).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \dot{Q} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

Na equação (1), λ_x e λ_z são as condutividades térmica do material nas direções x , y e z , respectivamente, $\dot{Q}$ é o calor gerado internamente por unidade de volume e de tempo, ρ é a massa específica, c é o calor específico, θ é a temperatura e t é o tempo.

Para materiais isotrópicos, tais como o aço e o concreto, a condutividade térmica não varia em função das direções principais, ou seja, é válida a equação (2).

$$\lambda = \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z \quad (2)$$

Para resolver a equação (1) é necessário impor as condições de contorno e as condições iniciais no modelo matemático. As condições gerais de contorno nas quais se encontra uma estrutura, sujeita à equação de Poisson, são as condições de Dirichlet e de Neumann. A condição de Dirichlet, ou temperatura prescrita, supõe conhecida para todo instante a temperatura em uma parte do contorno.

A condição de Neumann supõe que seja conhecido o fluxo de calor, $\dot{q}$, em uma parte do contorno em todo o instante. Matematicamente, essa condição pode ser escrita pela equação (3), ou seja, a derivada do campo de temperaturas em relação à normal à superfície no contorno, n .

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \dot{q} \quad (3)$$

Uma superfície com condição adiabática ou isolada termicamente pode ser simulada por meio da imposição de um fluxo nulo ($\dot{q} = 0$).

Os fenômenos de convecção são incluídos no modelo numérico por meio da condição de contorno de Neumann, que pode ser reescrita pela equação (4).

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha_c (\theta - \theta_\infty) \quad (4)$$

Na equação (4) α_c é o coeficiente de convecção e θ_∞ é a temperatura do fluido externo.

Segundo Bathe (1996), a condição de temperatura prescrita em uma parte do contorno pode ser simulada por meio de um coeficiente de convecção bem maior do que o coeficiente de condução do material, dessa maneira a temperatura prescrita no nó será igual à temperatura do fluido adjacente ao nó.

A solução da equação diferencial (1) pode ser obtida numericamente por meio do método dos elementos finitos (MEF). Para a utilização do MEF é necessário escrever a formulação fraca do problema, a qual é obtida por meio da equação (5).

$$\int_{\Omega} w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \dot{Q} - \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] d\Omega = 0 \quad (5)$$

Na equação (5) w é uma função arbitrária denominada de função peso e Ω é o domínio do problema.

Integrando por partes os três primeiros termos da equação (5), obtém-se a equação (6).

$$\int_{\Omega} w \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] d\Omega = \int_S \left(w \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} l + w \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} m + w \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} n \right) dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) d\Omega \quad (6)$$

Na equação (6) S representa a região de contorno do problema e l , m e n são os cossenos diretores.

Substituindo a equação (6) em (5), tem-se a equação (7).

$$\int_{\Omega} w \dot{Q} d\Omega - \int_{\Omega} w \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} d\Omega + \int_S \left(w \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} l + w \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} m + w \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} n \right) dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad (7)$$

Discretizando-se o domínio do problema em um número finito de elementos e utilizando-se no Método de Galerkin o conjunto de funções de interpolação N_i como funções peso, a temperatura em qualquer ponto no interior do elemento finito pode ser aproximada pela equação (8).

$$\theta(x, y, t) = \sum_i^k N_i \theta_i \quad (8)$$

Na equação (8) k é o número de nós do elemento, $N_i = N_i(x, y)$ são as funções de interpolação e θ_i são as temperaturas nodais do elemento.

Substituindo a equação (8) em (7), chega-se no sistema de equações (9), que representa o equilíbrio térmico em cada elemento finito.

$$-\int_{V_e} \left[\lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} - N_i \dot{Q} + N_i \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] dV_e + \int_{S_e} N_i \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} l dS_e + \int_{S_e} N_i \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} m dS_e + \int_{S_e} N_i \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} n dS_e = 0 \quad \text{para } i=1 \text{ até } k \quad (9)$$

Na equação (9) V_e e S_e representam o volume e a superfície do domínio do elemento.

A derivada do campo de temperaturas em relação à normal à superfície no contorno, n , pode ser escrita em função dos cossenos diretores, l , m e n , por meio da equação (10).

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial x} l + \frac{\partial \theta}{\partial y} m + \frac{\partial \theta}{\partial z} n \quad (10)$$

Substituindo as equações (4) e (10) na equação (9), se obtém a expressão (11).

$$\int_{V_e} N_i \dot{Q} dV_e - \int_{V_e} N_i \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} dV_e - \int_{V_e} \left[\lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dV_e - \int_{S_e} N_i \alpha_c (\theta - \theta_\infty) dS_e = 0 \quad (11)$$

Define-se o vetor de funções de interpolação $\mathbf{N}$ por meio da equação (12).

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_{k-1} \quad N_k] \quad (12)$$

E o vetor de temperaturas nodais $\boldsymbol{\theta}$ é definido pela equação (13).

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_{k-1} \quad \theta_k]^T \quad (13)$$

Nas equações (12) e (13) k é o número de nós do elemento, N_i são as funções de interpolação do elemento finito e θ_i é a temperatura nodal.

Rescrevendo a equação (8) sob forma matricial tem-se a equação (14).

$$\theta(x, y, t) = \sum_{i=1}^k N_i \theta_i = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta} \quad (14)$$

Define-se também a matriz de condutividade do material, para o caso de material isotrópico, por meio da equação (15).

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \mathbf{I} \quad (15)$$

Na equação (15) λ é a condutividade do material e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 3.

Define-se o vetor gradiente pela equação (16).

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T \quad (16)$$

Inserindo-se as equações (12) a (16) na equação (11) e rearranjando os termos, obtém-se o sistema de equações (17).

$$\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} dV_e + \int_{V_e} (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{N})^T \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{N} \boldsymbol{\theta} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \alpha_c \mathbf{N} \boldsymbol{\theta} dS_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \dot{Q} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \alpha_c \theta_\infty dS_e \quad (17)$$

O sistema de equações (17) pode ser reescrito de forma matricial por meio da equação (18).

$$\mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{F} \quad (18)$$

Na equação (17) $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ é a primeira derivada do campo de temperaturas em relação ao tempo $\left(\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} \right)$.

A matriz de capacitância total ($\mathbf{K}$) do elemento é dada pela equação (19),

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{cond}} + \mathbf{K}_{\text{conv}} \quad (19)$$

na qual a matriz de condutividade do elemento é dada pela equação (20),

$$\mathbf{K}_{\text{cond}} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} dV_e \quad (20)$$

em que,

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} \quad (21)$$

A matriz de convecção do elemento é dada pela equação (22).

$$\mathbf{K}_{\text{conv}} = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \alpha_c \mathbf{N} dS_e \quad (22)$$

Na equação (21) α_c é o coeficiente de convecção.

Define-se capacidade térmica do material como sendo o produto entre a massa específica (ρ) e o calor específico (c). Assim, a matriz de capacidade térmica ($\mathbf{C}$) do elemento é dada pela equação (23).

$$\mathbf{C} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} dV_e \quad (23)$$

O vetor de ações térmicas consistentes ($\mathbf{F}$) é dado pela expressão (24).

$$\mathbf{F} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \dot{Q} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \alpha_c \theta_\infty dS_e \quad (24)$$

Na equação (23) θ_∞ é a temperatura do fluido externo ao elemento.

As matrizes $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ dependem do tipo de elemento utilizado na discretização da estrutura.

A equação (18) representa uma equação diferencial ordinária dependente do tempo. A integração desta equação pode ser realizada por meio dos Métodos de Integração Direta, tais como os Métodos de Resíduos Ponderados (Métodos $\propto$) (Zienkiewicz e Taylor (1991), Lewis (2004) e Bathe (1996)), cuja principal característica é a discretização da resposta no tempo em intervalos regulares, como mostra a Fig. 1.

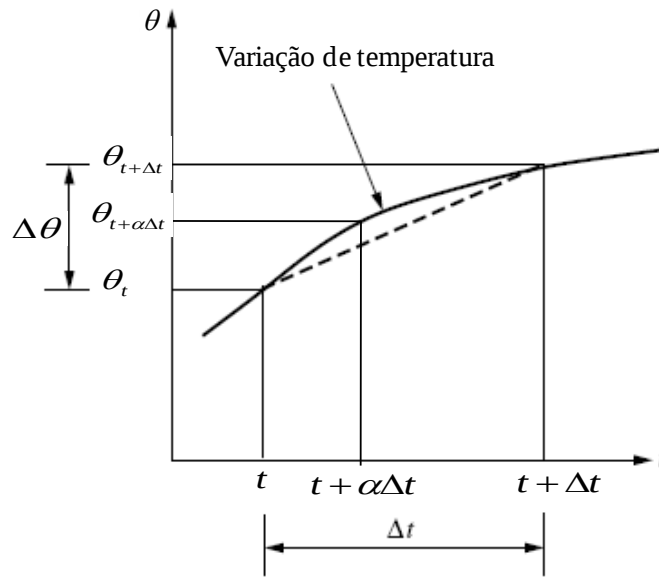


Figura 1. Métodos dos resíduos ponderados para integração no tempo.

A equação (18) deve ser satisfeita a cada instante discreto, sendo usualmente escrita no instante $t + \alpha\Delta t$, conforme mostra a equação (25).

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{t+\alpha\Delta t} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta}_{t+\alpha\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\alpha\Delta t} \quad (25)$$

Utilizando as séries de Taylor, pode-se escrever a temperatura no tempo $t + \Delta t$ por meio da equação (26).

$$\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} = \boldsymbol{\theta}_t + \Delta t \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}}{\partial t^2} + \dots \quad (26)$$

Negligenciando os termos de ordens superiores, a primeira derivada do campo de temperaturas em relação ao tempo é dada pela equação (27).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}}{\partial t} \approx \frac{\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} - \boldsymbol{\theta}_t}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (27)$$

Utilizando o Método dos Resíduos Ponderados (Métodos- α), a temperatura no instante $t + \alpha\Delta t$ pode ser obtida pela equação (28).

$$\boldsymbol{\theta}_{t+\alpha\Delta t} = (1-\alpha)\boldsymbol{\theta}_t + \alpha\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} \quad (28)$$

Analogamente, pode-se escrever o vetor de ações térmicas no instante $t + \alpha\Delta t$ por meio da equação (29).

$$\mathbf{F}_{t+\alpha\Delta t} = (1-\alpha)\mathbf{F}_t + \alpha\mathbf{F}_{t+\Delta t} \quad (29)$$

Substituindo as equações (27)-(29) na equação (18) e após algumas manipulações algébricas e desprezando o termo $\mathcal{O}(\Delta t)$, obtém-se a equação (30),

$$\mathbf{K}_{ef} \boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{ef} \quad (30)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ef} &= \mathbf{C} + \alpha \Delta t \mathbf{K} \\ \mathbf{F}_{ef} &= [\mathbf{C} - (1 - \alpha) \Delta t \mathbf{K}] \boldsymbol{\theta}_t + \Delta t [(1 - \alpha) \mathbf{F}_t + \alpha \mathbf{F}_{t+\Delta t}] \end{aligned} \quad (31)$$

Neste trabalho, o sistema de equações (30) é resolvido pelo método dos gradientes conjugados, Cunha (2000).

O Método- α recebe uma denominação diferente de acordo com o valor de α , conforme mostra a **Tabela 1** abaixo, Pierin (2011).

Tabela 1. Esquemas de integração no tempo

α	Método de	Comentários
0,0	Euler	Método de solução implícito
0,5	Crank-Nicolson	Método de solução semi-implícito
0,6667	Galerkin	Método de solução semi-implícito
1,0	Euler-Backward	Método de solução explícito

Segundo a estabilidade, os métodos de integração direta são classificados em: (i) incondicionalmente estável – quando a solução não crescer indefinidamente para quaisquer condições iniciais, isto é, quando for limitada para qualquer intervalo de tempo, ou (ii) condicionalmente estável - quando a solução for limitada apenas para intervalos de tempo menor do que um certo valor chamado limite de estabilidade. Nos Métodos- α , os que apresentam $\alpha \geq 0,5$ são incondicionalmente estáveis.

Os métodos incondicionalmente estáveis podem utilizar intervalos de tempo maiores em relação aos métodos implícitos, reduzindo o tempo computacional com pouca perda de precisão. Todavia, para maximizar a precisão, o intervalo de tempo deve ser suficientemente pequeno para garantir que os resultados sejam independentes das demais reduções nesses valores.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2006), o método de Crank-Nicolson apresenta a melhor precisão dentre os métodos semi-implícitos, pois são eliminados os termos quadráticos e o erro de truncamento é na ordem de $O(\Delta t)^3$. Entretanto, todos os métodos semi-implícitos são suscetíveis a efeitos oscilatórios na solução quando aumenta o intervalo de tempo, sendo esse efeito mais acentuado no método de Crank-Nicolson. Deste modo, recomenda-se a utilização do método de Galerkin ($\alpha = 2/3$), pois é mais preciso que o método de Euler-Backward e menos suscetível a efeitos de oscilação da solução do que o método de Crank-Nicolson (Pierin, 2011).

No programa ATERM-3D utilizam-se elementos hexaédricos de oito nós, respectivamente, e elementos especiais quadrangulares de quatro nós para a consideração dos efeitos de transferência de calor por convecção e radiação podendo ser justapostos em qualquer face dos elementos hexaédricos. Esses elementos são brevemente descritos nos

próximos itens. Maiores detalhes sobre a implementação computacional podem ser obtidos em Pierin (2011).

2.1. Elementos Hexaédricos

A estrutura a ser analisada termicamente pelo programa ATERM-3D é discretizada em elementos isoparamétricos hexaédricos de oito nós, conforme mostra a Fig. 2a.

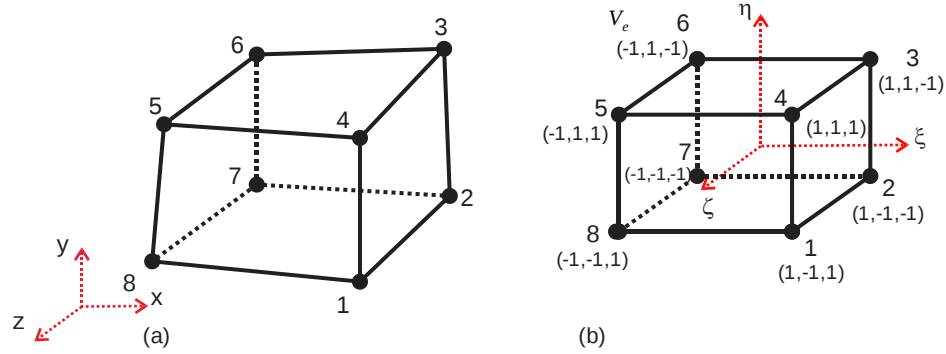


Figura 2. Elemento hexaédrico de 8 nós: (a) coordenadas cartesianas, (b) coordenadas naturais

As funções de interpolação do elemento são dadas pela equação (32).

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad \text{para } i = 1 \text{ até } 8 \quad (32)$$

Na equação (32), ξ_i , η_i e ζ_i são as coordenadas naturais do nó i , conforme mostra a Fig. 2b.

As coordenadas cartesianas dos nós do elemento são armazenadas na matriz $\mathbf{X}$, conforme a equação (33).

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (33)$$

A transformação entre as coordenadas naturais e cartesianas é dada pela matriz jacobiana, conforme mostra a equação (34).

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad (34)$$

A equação (34) pode ser escrita resumidamente pela equação

$$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{N} \mathbf{X} \quad (35)$$

Dessa forma, a matriz $\mathbf{B}$ é dada pela equação (36).

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \nabla \mathbf{N} \quad (36)$$

Na equação (36) $\mathbf{J}^{-1}$ representa a inversa da matriz jacobiana.

Assim, a matriz de condutividade é dada pela equação (37).

$$\mathbf{K}_{\text{cond}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \lambda \mathbf{B} \det(\mathbf{J}) d\zeta d\eta d\xi \quad (37)$$

Na equação (37) $\det(\mathbf{J})$ representa o determinante da matriz jacobiana.

Analogamente, a matriz de capacitância é dada pela equação (38).

$$\mathbf{C} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) d\zeta d\eta d\xi \quad (38)$$

As integrais das equações (37) e (38) foram obtidas numericamente pelo método de Gauss utilizando o esquema de integração $2 \times 2 \times 2$.

2.2. Elementos Quadrangulares

Para a imposição dos efeitos de transferência de calor devido à convecção e radiação são utilizados elementos planos quadrangulares de quatro nós, conforme mostra a Fig. 3a.

As funções de interpolação do elemento são dadas pelas equações (39), as quais são escritas com base nas coordenadas naturais, conforme mostra a Fig. 3b.

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{39}$$

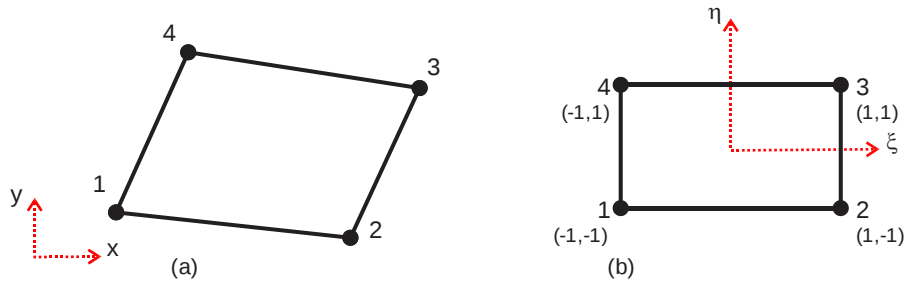


Figura 3. Elemento quadrangular de 4 nós: (a) coordenadas cartesianas, (b) coordenadas naturais

A transformação entre as coordenadas naturais e cartesianas é dada pela matriz jacobiana, conforme mostra a equação (34).

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -\eta-1 \\ \xi-1 & -\xi-1 & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Substituindo as equações (39) na equação (22), a matriz de convecção é dada pela equação (41).

$$\mathbf{K}_{\text{conv_rad}} = \alpha \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \tag{41}$$

Por meio da equação (24), o vetor de ações térmicas devido ao fluxo de calor convectivo é dado pela equação (42).

$$\mathbf{F}_{\text{conv_rad}} = \alpha \theta_{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \det(\mathbf{J}) d\eta d\xi \tag{42}$$

Nas equações (41) e (42) $\det(\mathbf{J})$ representa o determinante da matriz jacobiana e θ_{∞} é a temperatura dos gases quentes (fluido externo).

O coeficiente α representa uma combinação das transferências de calor por convecção e radiação sendo fornecido pela expressão (43).

$$\alpha = \alpha_c + \varepsilon \sigma (T_\infty + T_s) (T_\infty^2 + T_s^2) \quad (43)$$

Na equação (43) α_c é o coeficiente de convecção, ε é a emissividade resultante da superfície, σ é a constante de Stephan-Boltzmann, T_∞ e T_s são as temperaturas absolutas dos gases quentes e da superfície, respectivamente.

As integrais das equações (41) e (42) foram obtidas numericamente pelo método de Gauss utilizando o esquema de integração 2×2 .

3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para validar o programa desenvolvido neste trabalho, foram realizadas três simulações numéricas cujos resultados foram comparados aos obtidos por meio do programa SAFIR (Franssen e Gernay, 2016). As propriedades térmicas adotadas para o concreto tiveram por base a ABNT NBR 15200:2012, enquanto, para o aço, adotaram-se as características físico-térmicas presentes na ABNT NBR 14323:2013. Nos exemplos deste trabalho, utilizou-se concreto silicoso com teor de umidade igual a 1,5% do peso em volume.

Em todos os exemplos, a ação térmica é determinada de acordo com a curva de incêndio-padrão ISO 834 (ABNT NBR 5628:2001).

3.1. Laje nervurada

As lajes nervuradas são de uso comum no Brasil e podem ser utilizadas com nervuras unidirecionais ou bidirecionais. As lajes nervuradas bidirecionais são analisadas termicamente por meio de programas de análise térmica tridimensionais, como por exemplo o ATERM-3D e SAFIR.

Como exemplo analisa-se uma laje com capa de 5 cm, distancia intérieiro de 60 cm, largura da nervura de 6 cm e altura da nervura igual a 15 cm, conforme mostra a Fig. 4.

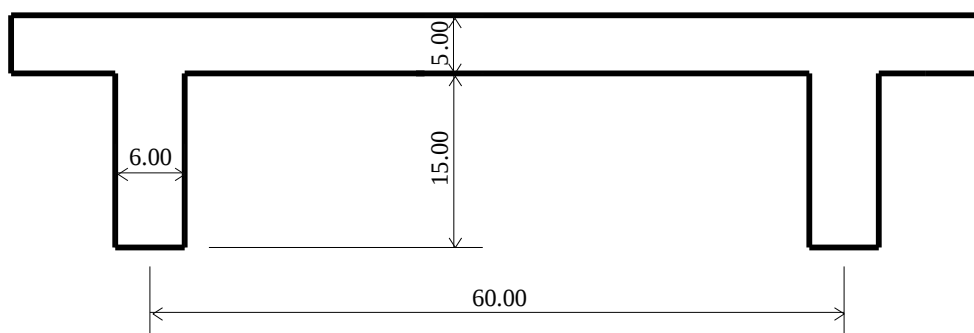


Figura 4. Dimensões da laje nervurada

Como o painel de laje possui dois eixos de simetria pode-se analisar apenas um quarto da laje, conforme mostra a Fig. 5.

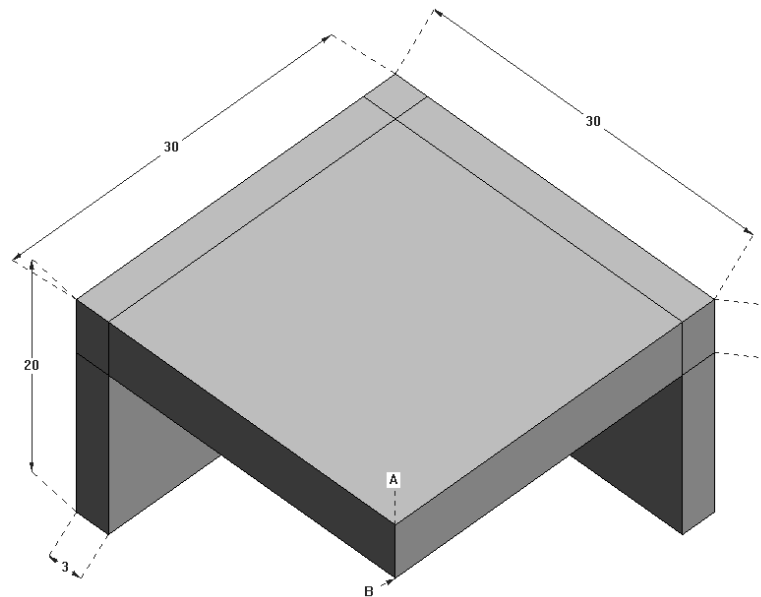


Figura 5. Modelo 3D

A laje foi exposta ao incêndio-padrão na face inferior da laje. A face superior foi considerada adiabática. Considera-se que a massa específica do concreto é variável com a temperatura e para 20 °C a massa específica é igual a 2400 kg/m³, conforme recomendações da ABNT NBR 15200:2012. O fator de emissividade e o coeficiente de convecção foram adotados iguais a 0,7 e 25 W/m².°C, respectivamente. Admite-se que a temperatura ambiente seja igual a 20 °C.

A estrutura foi discretizada em elementos hexaédricos, sendo que para o programa ATERM 3D foram utilizadas 4 malhas: na Malha 1 utilizaram-se elementos de 2,5 cm de lado, na Malha 2 elementos de 1,5 cm de lado, na Malha 3, elementos de 1 cm de lado e na Malha 4 os elementos possuem 0,5 cm de lado. Para a modelagem no programa SAFIR utilizou-se apenas a Malha 4. As Fig. 6 e 7 apresentam a influência do refinamento da malha na evolução da temperatura em função do tempo no nó localizado no centro da face superior (ponto A) e inferior (ponto B) da laje, respectivamente. Os pontos A e B estão indicados na Fig. 5. Observa-se que a utilização de uma malha grossa resulta, nos tempos iniciais, em temperaturas inferiores à temperatura inicial da estrutura. Isso se deve ao fato da utilização da matriz de massa consistente ao invés da matriz de massa concentrada, (Pierin *et al*, 2015).

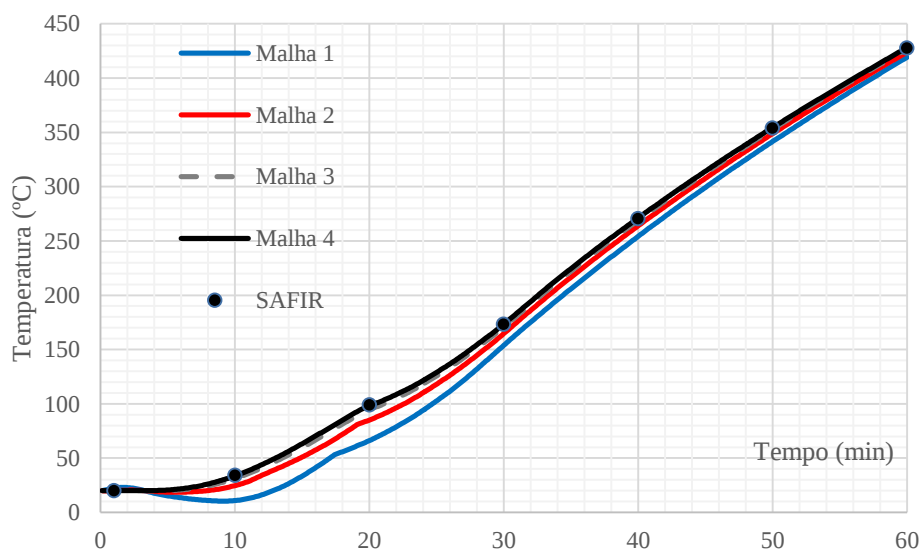


Figura 6. Evolução da temperatura do ponto A.

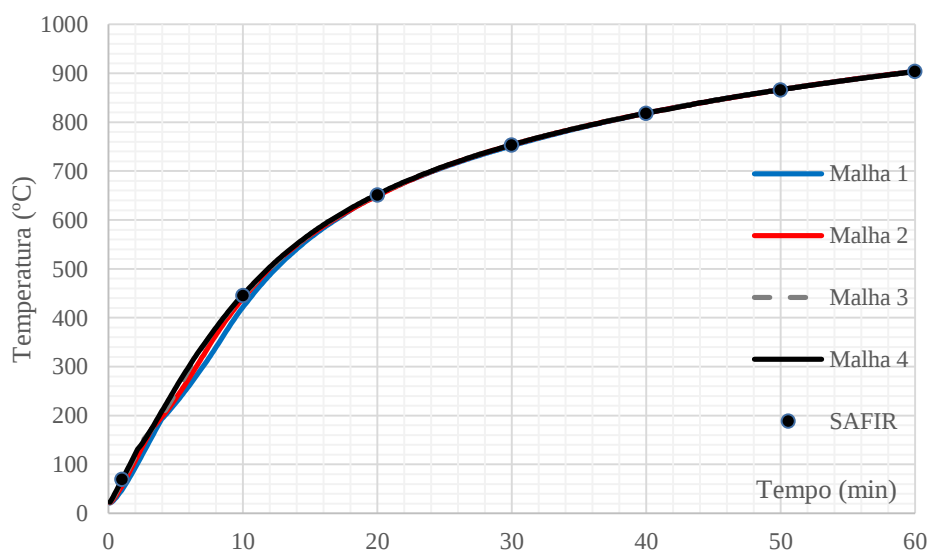


Figura 7. Evolução da temperatura do ponto B.

Nota-se que a solução tende a convergir com o refinamento da malha, sendo que para as malhas 3 e 4 os resultados são praticamente iguais aos obtidos pelo programa SAFIR.

O campo de temperaturas após 60 minutos de exposição ao incêndio-padrão obtido pelos programas ATERM-3D e SAFIR estão apresentados na Fig. 8 e na Fig. 9, respectivamente.

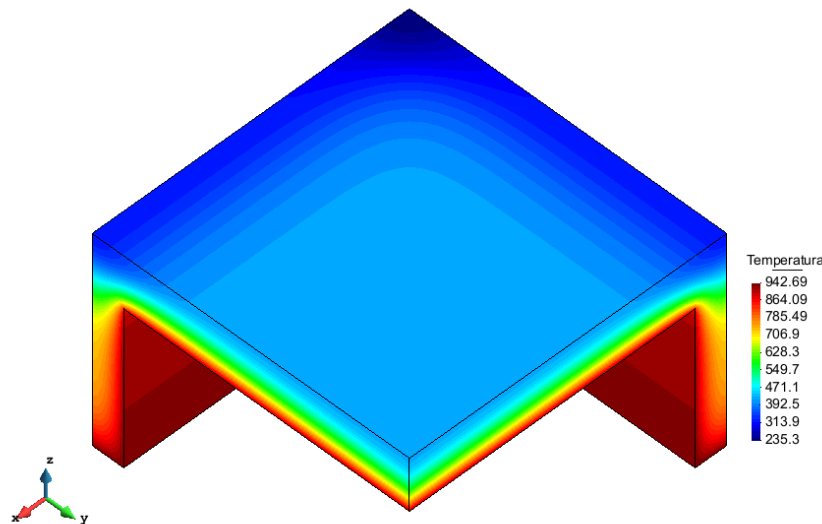


Figura 8. Campo de temperaturas após 60 minutos obtido pelo programa ATERM-3D.

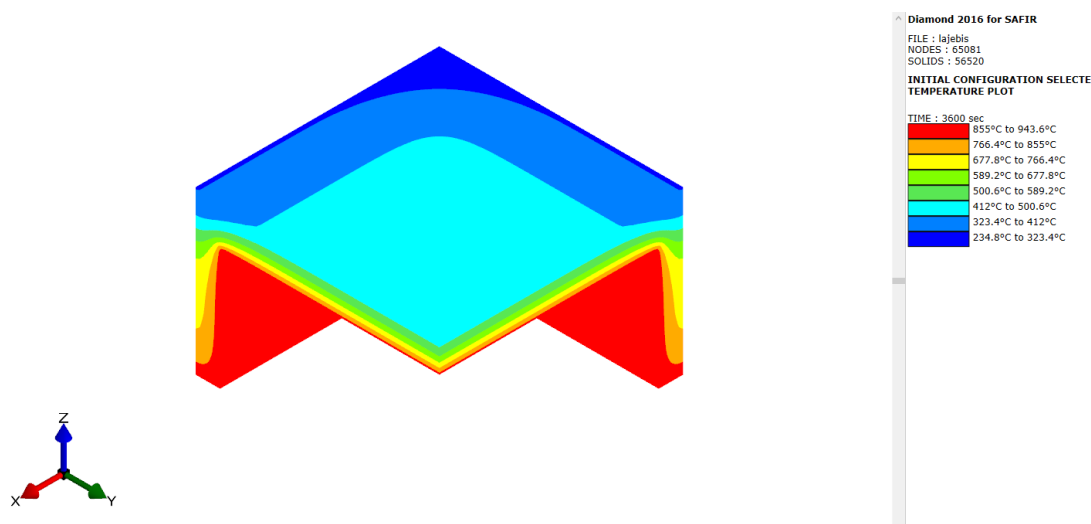


Figura 9. Campo de temperaturas após 60 minutos obtido pelo programa SAFIR.

3.2. Consolo de Concreto

Um consolo curto é definido como uma viga em balanço cujo vão é inferior à altura e são utilizados, principalmente, na ligação entre vigas e pilares nas estruturas pré-moldadas. Neste exemplo, é analisado o aquecimento de um consolo curto de concreto de dimensões $25 \times 30 \times 35$ cm, conforme mostra a Fig. 10. Admite-se que a face superior ($Z=0,35$) e a face de contato com o pilar ($Y=0$) sejam adiabáticas. As demais faces do consolo estão expostas ao incêndio-padrão. Considera-se que a massa específica do concreto é variável com a temperatura e para 20°C a massa específica é igual a 2400 kg/m^3 , conforme recomendações da ABNT NBR 15200:2012. O fator de emissividade e o coeficiente de convecção foram

adotados iguais a 0,7 e 25 W/m².°C, respectivamente. Adota-se para temperatura inicial da estrutura o valor de 20 °C.

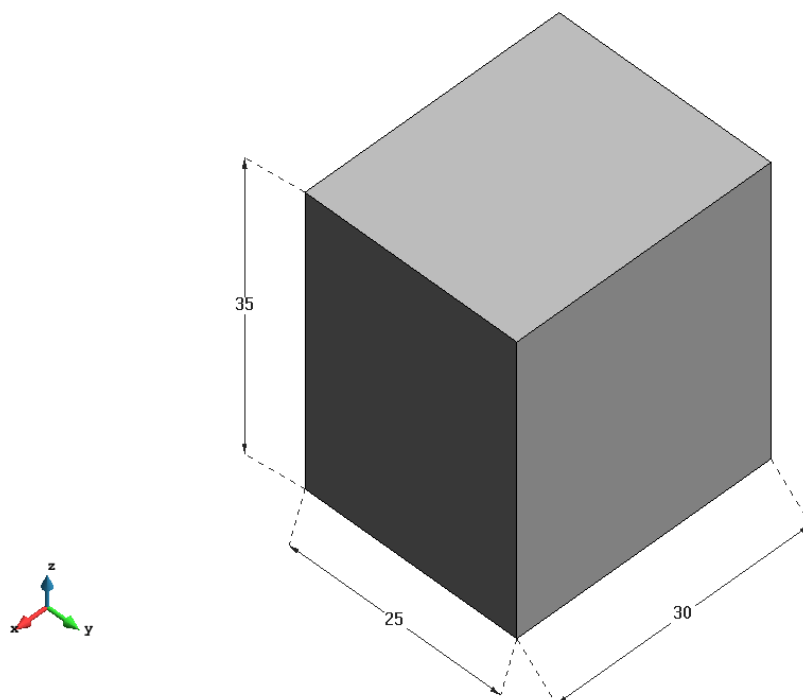


Figura 10. Geometria do consolo

A Fig. 11 mostra a variação da temperatura nodal em função do tempo para três pontos distintos: sendo dois pontos localizados no centro das faces superior (ponto A) e de contato com o pilar (ponto B) e um ponto localizado no centro do consolo (ponto C). Na Fig. 12 é apresentada a variação da temperatura do ponto D localizado no centro da face inferior. Para a modelagem por meio dos programas ATERM-3D e SAFIR, o consolo foi discretizado em elementos hexaédricos de 1 cm de lado, totalizando 26250 elementos e 29016 nós. Nas Fig. 11 e 12 as linhas (contínuas e tracejadas) representam as temperaturas obtidas pelo programa ATERM-3D, enquanto que os pontos pretos correspondem aos resultados obtidos pelo SAFIR. Observa-se que os resultados obtidos pelos programas são praticamente iguais.

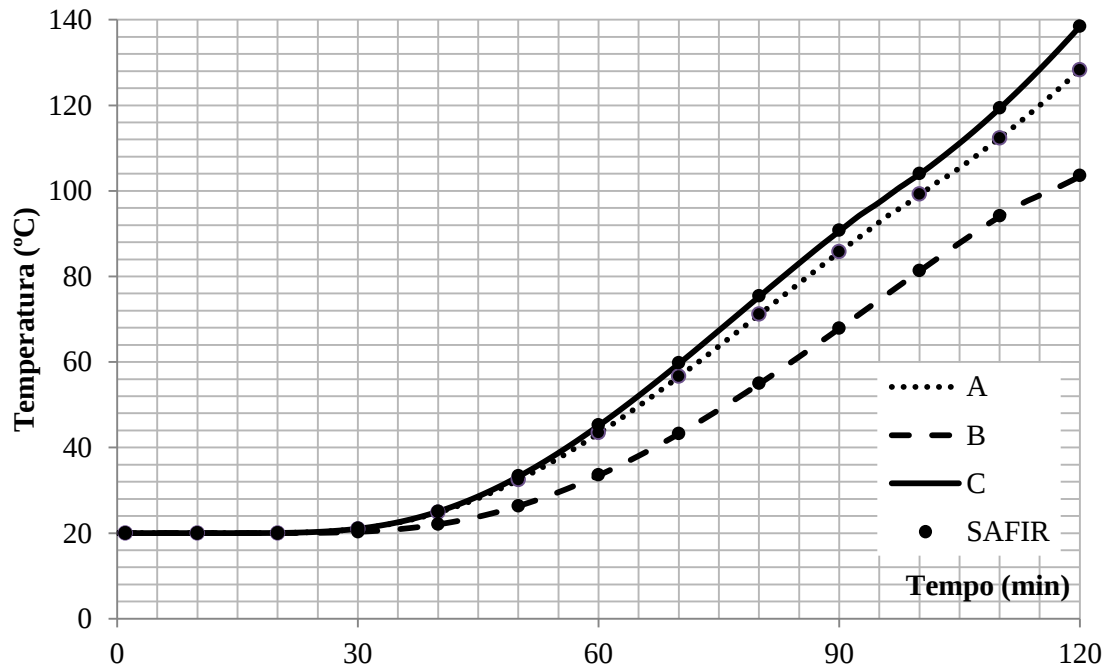


Figura 11. Evolução das temperaturas nos pontos A, B e C.

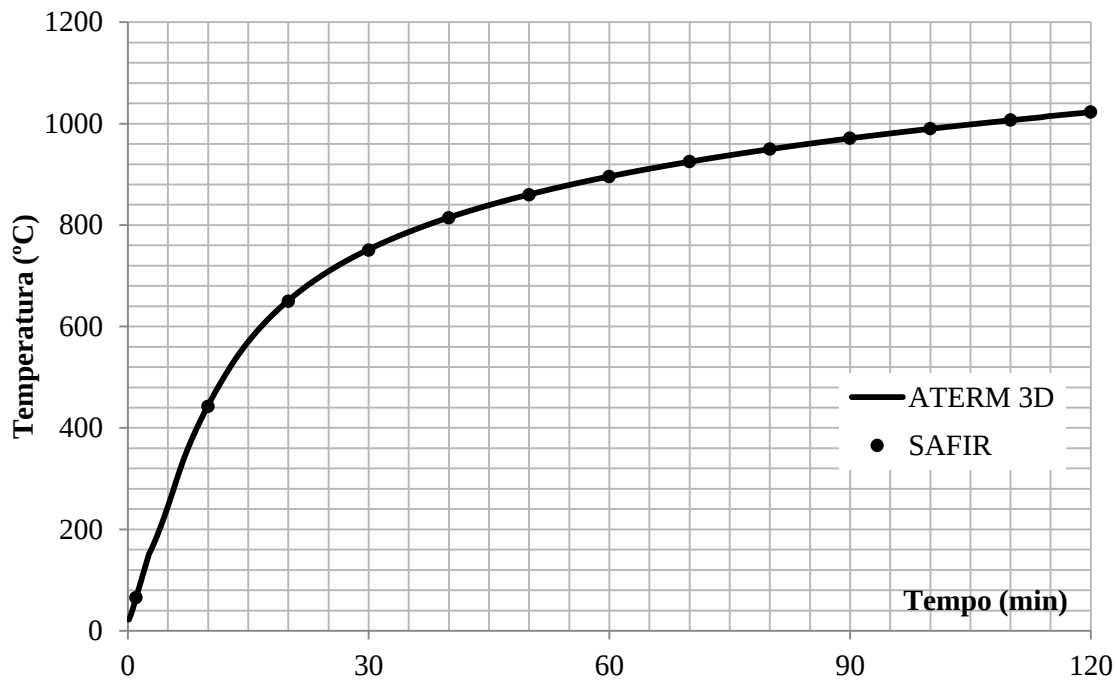


Figura 12. Evolução das temperaturas no ponto D.

O campo de temperaturas após 60 minutos de exposição ao incêndio-padrão obtido pelos programas ATERM-3D e SAFIR estão apresentados na Fig. 13 e na Fig. 14, respectivamente.

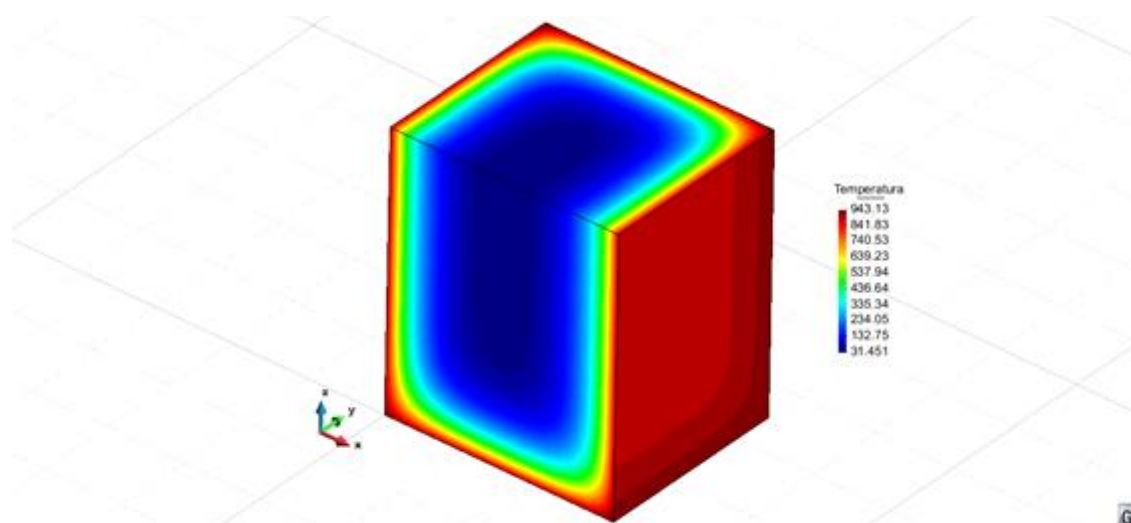


Figura 13. Campo de temperaturas após 60 minutos obtido pelo ATERM-3D.

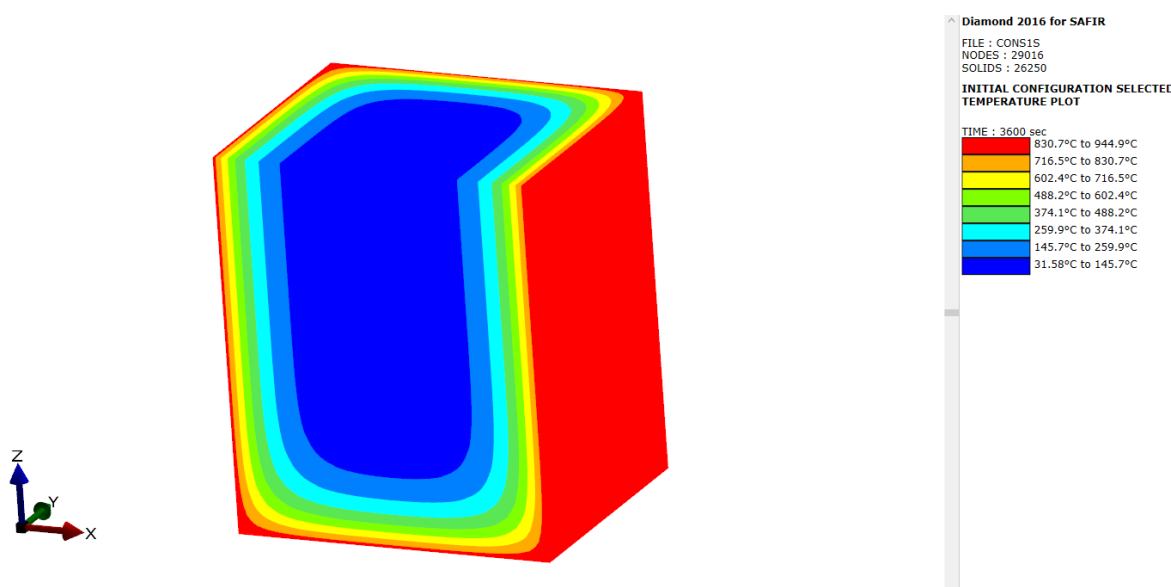


Figura 14. Campo de temperaturas após 60 minutos obtido pelo SAFIR.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se a formulação do Método dos Elementos Finitos aplicado à análise térmica não linear de estruturas bidimensionais, empregada na elaboração do programa de computador ATERM 3D. Esse tipo de análise é fundamental no estudo de estruturas em situação de incêndio.

Os resultados obtidos pelos autores foram validados com o programa SAFIR, desenvolvido na Universidade de Liège, (Franssen e Gernay, 2016). Observa-se que os resultados obtidos pelos programas apresentam uma ótima correlação em todos os exemplos realizados.

Observa-se que dependendo da malha utilizada os resultados podem não representar o comportamento físico. Assim, recomenda-se que, antes de se extrair qualquer conclusão do modelo a ser analisado termicamente, deve-se realizar um estudo de malhas geométrica e temporal.

Nas regiões mais frias da estrutura, os resultados são influenciados pela montagem da matriz de capacidade total da estrutura, sendo que a utilização da matriz de massa concentrada fornece temperaturas mais próximas às temperaturas obtidas com o refinamento da malha.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES, CNPq e FAPESP pelo apoio a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 15200* (2012): projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 6118* (2007): Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 14323* (2013): Projeto de estruturas de aço e estruturas mistas de ao e concreto em situação de incêndio - procedimento. Rio de Janeiro.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 5628* (2001): Componentes construtivos estruturais - determinação da resistência ao fogo. Rio de Janeiro.
- Bathe, K-J., 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.
- Cunha, M. C. C., 2000. Métodos Numéricos. Editora da Unicamp.
- European Committee for Standardization. *EN 1992-1-2* (2002): Eurocode 2: Design of concrete structures - part 1.2: general actions - actions on structures exposed to fire. Brussels: CEN.
- Franssen; J. M., Gernay; T., 2016. *User's manual for SAFIR 2016c: A computer program for analysis of structures subject to fire*. University of Liège. Departament ArGEnCO. Service Structural Engineering.
- Lewis, R.W., Nithiarasu, P., Seetharamu, K.N., 2004. Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow. Wiley.

Pierin; I., 2011. *A instabilidade de perfis formados a frio em situação de incêndio*. Tese de Doutorado. Escola Politécnica. Universidade de São Paulo.

Pierin. I., Silva; V. P., Rovere; H. L., 2015. *Thermal analysis of two-dimensional structures in fire*. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais. v. 8, p. 25-36.

International Center for Numerical Methods in Engineering, 2011. GiD 10.0 Users Manual. <http://gid.cimne.upc.es/>. (CIMNE).

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., 2006. *The finite element method*, 6th ed Boston, Vol. 2, Elsevier Butterworth-Heinemann.