



FINITE STRAIN ELASTOPLASTIC SOLUTIONS FOR MECHANICAL COMPACTION IN SEDIMENTARY BASINS

Paulo S. B. Lemos

André Bruch

Eurípedes do A. Vargas Jr.

Samir Maghous

paulobaumbach@hotmail.com

andrebruch@hotmail.com

vargas@puc-rio.br

samir.maghous@ufrgs.br

Federal University of Rio Grande do Sul, Department of Civil Engineering

Av. Osvaldo Aranha 99, 3rd floor, Centro – CEP 90035-190 – Porto Alegre, RS, Brazil

Abstract. *Sedimentary basins are open material systems with continuous supply of organic and inorganic material which are of great economic interest as they are favorable environments for natural hydrocarbons formation. In Petroleum engineering, numerical basin simulators are used to describe the evolution of these structures in order to optimize exploration processes. This work presents analytical solutions for purely mechanical deformation of sedimentary basins in the context of finite irreversible transformation which may provide useful references for the verification of numerical simulators. The analysis is restricted to materials with high permeability, for which the drained behavior is acceptable. Due to the large variation in porosity induced by compaction process, an elastoplastic constitutive law is used in the context of large irreversible strains. The elastic properties and sediment hardening are also affected by porosity variation. These effects are introduced by additional terms, deduced from micromechanics, in the equations of state, as well as derivation of an expression for the hardening law, which avoids the development of negative porosities under high isotropic compression. The analytical approach is compared to numerical solutions derived from a finite element simulator specifically designed to deal with sedimentary basins in the context of large irreversible deformations.*

Keywords: *sedimentary basin, finite plasticity, elastoplastic coupling.*

1 INTRODUÇÃO

As bacias sedimentares formam grandes regiões da superfície terrestre caracterizadas pela retenção de material sedimentar oriundo da destruição de alguma rocha e transportado geralmente por águas. Esses sedimentos são novamente transformados em rochas através do fenômeno da diagênese, que é o conjunto de processos físicos, químicos e biológicos que atuam na formação de um maciço sedimentar. Esse processo ocorre ao longo de períodos geológicos de milhões de anos.

As bacias contêm a maior parte dos recursos de energia fóssil e renovável, reservas de minérios, bem como reservatórios de águas subterrâneas. A exploração desses recursos acelera-se a cada ano, principalmente no que diz respeito à indústria do petróleo. Nesse contexto, os simuladores de bacias implementam modelos numéricos para a predição da evolução dessas estruturas, bem como a otimização dos processos de exploração. No entanto, a descrição do material geológico do ponto de vista mecânico ainda é bastante simplista na maioria dos simuladores de bacias. De fato, o conceito de comportamento constitutivo e o acoplamento poromecânico são explicados classicamente por meio de uma relação entre a porosidade local e a tensão vertical efetiva de Terzaghi. Porém, é reconhecido que uma formulação abrangente da lei constitutiva para o material sedimentar é crucial para a reconstrução adequada do estado poromecânico de uma bacia ao longo do tempo geológico.

Na perspectiva da modelagem do processo de formação de uma bacia, a grande mudança de porosidade decorrente da compactação requer uma descrição mais rigorosa, no contexto das grandes deformações irreversíveis. Adicionalmente, o acoplamento termoporomecânico impõe a formulação de leis constitutivas adequadas ao comportamento do material. Os efeitos devidos a grande mudança de porosidade afetam também as propriedades poroelastoplásticas do sedimento. No contexto da modelagem dos processos mecânicos de formação e evolução das bacias, feita em escala macroscópica, dois fenômenos contribuem para a compactação dos sedimentos: a compactação puramente mecânica, originária do rearranjo das partículas; a compactação químico-mecânica, resultado dos mecanismos de dissolução-precipitação. O fenômeno de compactação mecânica prevalece nas camadas superiores, enquanto que a compactação químico-mecânica domina as camadas inferiores, onde a temperatura e os níveis de tensões são maiores (Schmidt et al., 1979).

Em relação à compactação de natureza puramente mecânica em bacias sedimentares, uma modelagem constitutiva para o comportamento poroelastoplástico do material foi anteriormente formulada (Dormieux et al., 1999; Bernaud et al., 2002; Deudé et al., 2004; Bernaud et al., 2006). Nessa formulação, os efeitos induzidos pela grande variação de porosidade nas propriedades poroelásticas foram introduzidos por termos adicionais nas equações de estado, deduzidos a partir de uma análise micromecânica. Uma expressão para a lei de endurecimento, que evita o desenvolvimento de porosidades negativas sob compressão isotrópica elevada, também foi desenvolvida novamente no contexto da micromecânica.

No contexto dos modelos numéricos, os processos de verificação e a validação apresentam destaque. A verificação é o processo de avaliação da correção do programa e da precisão numérica da solução para um determinado modelo matemático, onde a associação ou relacionamento da simulação com o mundo real não é um problema. A validação é o processo de avaliação da precisão física de um modelo matemático baseado em comparações entre resultados computacionais e dados experimentais, onde a relação entre o modelo matemático e o mundo real (dados experimentais) é a questão (Oberkampf et al., 2010). No contexto da veri-

ficação, os *benchmarks* são soluções analíticas de referência altamente precisas para modelos matemáticos específicos.

Assumindo um processo de compactação unidimensional, numa configuração oedométrica, e restringindo a análise a materiais altamente permeáveis para os quais se mantém condições totalmente drenadas, soluções analíticas são desenvolvidas no contexto da poroplasticidade finita, considerando leis dependentes da porosidade para os módulos elásticos e para o endurecimento do material. Essas soluções de referência são comparadas com soluções numéricas, desenvolvidas em um simulador de elementos finitos especificamente concebido para os processos de formação e compactação de bacias sedimentares no contexto das grandes deformações, resultado do trabalho de Brück (2016).

2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MECÂNICO

Por compactação puramente mecânica entende-se a expulsão dos fluidos dos poros interconectados e o rearranjo das partículas sólidas. Como hipótese, a análise está restrita a materiais com permeabilidade elevada, proporcionando assim a desacoplamento poromecânico das soluções.

O problema mecânico é definido da seguinte forma: material sedimentar é depositado a uma taxa constante ao longo de um intervalo de tempo geológico sobre o leito oceânico, considerado perfeitamente rígido. O material já sedimentado sofre o processo de compactação gravitacional, em condições drenadas (ausência de poropressão).

O esqueleto do sistema, composto pela matriz e pelo volume dos poros interconectados sem a presença de fluido, evolui com o tempo em virtude do acréscimo contínuo de material sedimentar sobre a superfície superior. Supondo-se que a camada de material com extensões laterais infinitas permanece horizontal, sua posição é dada pelo plano horizontal definido pela equação $x_3 = H(t)$ (Figura 1).

A compactação ocorre devido à ação do campo gravitacional descrito por $\underline{g} = -g\underline{e}_3$. Define-se a massa de sedimentos depositados por unidade de área como $M_d(t)$, que constitui um dado do problema. Definindo a massa específica em um ponto x_3 no instante t como $\rho(x_3, t)$, tem-se que a massa de sedimentos depositada por unidade de área a partir do instante $t = 0$ é dada por:

$$M_d(t) = \int_0^{H(t)} \rho(x_3, t) dx_3 \quad (1)$$

Na Figura 1 apresentam-se a geometria e as condições de contorno do problema mecânico.

Supõe-se que as partículas materiais, depositadas no topo da camada de sedimentos, encontram-se em estado natural, ou seja:

$$\underline{\underline{\sigma}}(H(t), t) = \underline{\underline{0}} \quad (2)$$

O substrato rígido ao qual a camada sedimentar está assentada implica na seguinte condição sobre o campo de velocidade:

$$\underline{u}(0, t) \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad (3)$$

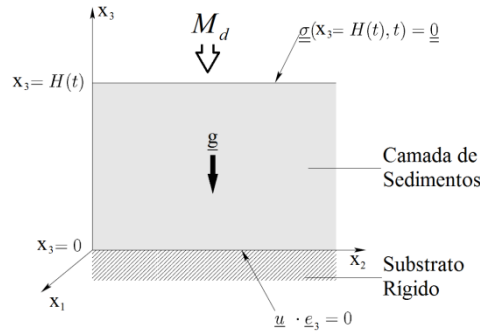


Figura 1. Geometria e condições de contorno do modelo mecânico

A posição de uma partícula material na camada sedimentar em um tempo t é definida como x_3 e o instante em que essa partícula se deposita no topo da camada é definido como $T(x_3, t)$.

O processo de compactação inicia com uma altura nula para a camada de sedimentos. Isso leva a seguinte condição de valor inicial:

$$H(0) = 0 \quad (4)$$

Com o aporte e compactação do material sedimentar a altura da camada aumenta gradativamente. As deformações induzidas pela gravidade permanecem elásticas até o instante em que a camada de sedimentos atinge uma altura H^e , denominada altura elástica. Esse comportamento é observado durante a fase elástica. Define-se o tempo T_0^e como o tempo para a formação da altura H^e , que corresponde ao tempo de início das deformações plásticas na bacia. Assim, tem-se:

$$H(T_0^e) = H^e \quad (5)$$

Após o tempo T_0^e , a bacia apresenta duas regiões de comportamentos distintos. Uma delas com comportamento elástico e outra com comportamento plástico. Isso é observado durante a fase elastoplástica.

A fase elástica é temporalmente e espacialmente definida por:

$$t \in [0, T_0^e] \quad (6)$$

$$x_3 \in [0, H(t)] \text{ com } H(t) \leq H^e \quad (7)$$

A fase elastoplástica é temporalmente e espacialmente definida por:

$$t \in [T_0^e, t] \quad (8)$$

$$x_3 \in [H(t) - H^e, H(t)] \text{ domínio elástico} \quad (9)$$

$$x_3 \in [0, H(t) - H^e] \text{ domínio plástico} \quad (10)$$

A altura da camada elástica H^e é constante ao longo do tempo. Sob o ponto de vista geométrico, isso significa que a camada elástica translada na direção positiva do eixo x_3 à medida que os sedimentos são depositados no topo da camada. Isso evidencia o crescimento da zona plástica após o início da plastificação.

Por outro lado, no plano material, uma partícula passa do estado elástico para um estado plástico, quando se atinge uma profundidade H^e . Tal comportamento é evidenciado na Figura 2.

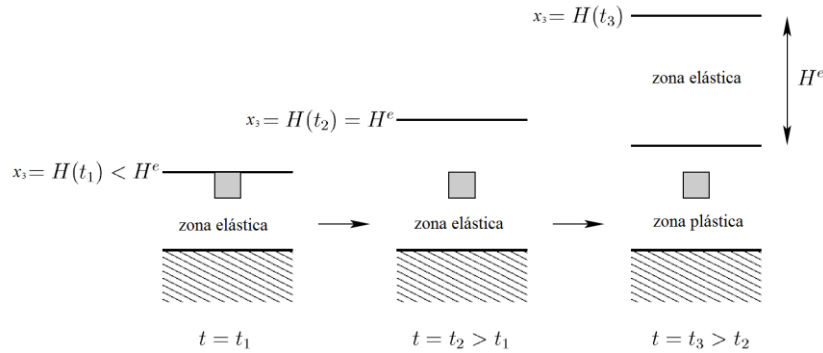


Figura 2. Comportamento elástico e elastoplástico de uma partícula

A evolu  o da bacia    de caráter quase est  tico, o que permite negligenciar as forças inerciais (ignorando a acelera  o das partículas), o que possibilita escrever a equa  o de balanço de momentum como:

$$\underline{\text{div}}_x \underline{\sigma}(\underline{x}, t) + \rho \underline{g} = \underline{0} \quad (11)$$

A evolu  o da massa específica do material pode ser descrita pela expressão Euleriana da conserva  o de massa, dada por:

$$\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{div}_x (\rho(\underline{x}, t) \underline{u}(\underline{x}, t)) = 0 \quad (12)$$

Já a expressão Lagrangiana da conserva  o de massa    escrita como:

$$\rho(x_3, t) d\Omega_t = \rho_0 d\Omega_0 \quad (13)$$

Onde $d\Omega_t$ define o volume elementar de uma partícula do esqueleto que inicialmente era igual a $d\Omega_0$.

A descri  o do problema em transforma  es finitas demanda a defini  o do gradiente de transforma  o $\underline{F}$. Para isso,    necessária a defini  o de uma configura  o inicial de referência para o sistema. No entanto, por se tratar de um sistema aberto baseado no fornecimento contínuo de material sedimentar no topo da bacia, não    possível definir uma configura  o de referência para o sistema como um todo. Porém,    possível definir uma configura  o inicial de referência para cada partícula. Por defini  o, essa configura  o corresponde ao estado da partícula depositada no topo da bacia.

Relativo a essa configura  o de referência,    introduzido o conceito de dilata  o. A dilata  o vertical Λ relaciona a altura de uma partícula entre as configura  es atual e a de referência, conforme Figura 3.

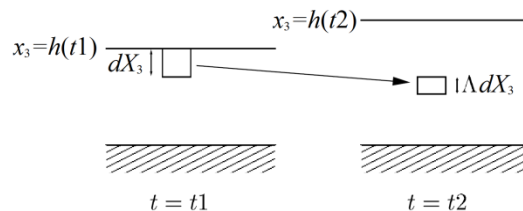


Figura 3. Evolu  o da dilata  o vertical Λ

Assim, $\Lambda(x_3, t)$ define a dilata  o vertical de uma partícula situada em x_3 no instante t . Essa nova variável conduz a duas novas condi  es de contorno. Uma no topo do maciço e outra na fronteira entre os domínios elástico e plástico da fase elastoplástica:

$$\Lambda(H(t), t) = 1 \quad (14)$$

$$\Lambda(H(t) - H^e, t) = \Lambda^e \quad (15)$$

O gradiente de transformação descreve a evolução de uma partícula entre o estado de referência e o atual. Baseado em (14), tem-se:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Lambda \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (16)$$

Adicionalmente, tem-se a relação entre o Jacobiano da transformação geométrica e a dilatação vertical:

$$J = \det \underline{\underline{F}} = \Lambda \quad (17)$$

3 COMPORTAMENTO DO MATERIAL

Supõe-se que o esqueleto do sistema considerado seja homogêneo, isótropo, em evolução isotérmica. Durante a transformação geométrica das partículas do esqueleto, as deformações reversíveis (elásticas) permanecem infinitesimais. A lei de comportamento elastoplástico apresenta a forma clássica:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \lambda \text{tr}(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) \quad (18)$$

Onde λ e μ são os coeficientes de Lamé do esqueleto; $\underline{\underline{d}}$ é a taxa de deformação total; $\underline{\underline{d}}^p$ é a taxa de deformação plástica do esqueleto. A constante λ se relaciona ao módulo de compressão por $\lambda = K - 2/3\mu$.

A taxa de deformação total é definida como a parte simétrica do gradiente Euleriano de velocidade:

$$\underline{\underline{d}} = \{\underline{\underline{\nabla u}}\}_s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla u}} + {}^T \underline{\underline{\nabla u}}) \quad (19)$$

Adicionalmente, o gradiente Euleriano de velocidade pode ser definido como:

$$\underline{\underline{\nabla u}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (20)$$

Considerando uma regra de escoamento associado, o que permite definir a taxa de deformação plástica em função do critério de plasticidade $f(\underline{\underline{\sigma}})$, tem-se:

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{onde } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (21)$$

Onde $\dot{\lambda}$ é o multiplicador plástico positivo. Essa grandeza pode ser expressa, para um dado incremento $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$, como (Halphen et al., 1987):

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{m(\underline{\underline{\sigma}}, p_c)} \left\langle \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \right\rangle \quad (22)$$

Onde $\langle \rangle$ corresponde a notação de Macaulay e $m(\underline{\underline{\sigma}}, p_c)$ é o módulo de encruamento.

A grande variação irreversível de porosidade no processo de compactação mecânica é a manifestação macroscópica de grandes deformações locais na bacia. Isso justifica a necessidade de uma formulação constitutiva no contexto das transformações finitas. Os módulos elásticos do esqueleto também são afetados pelas grandes deformações, sendo necessária uma formulação mais abrangente. Nesse contexto, algumas formulações relacionam a evolução das

dos módulos elásticos   transformac  o finita (Meroi et al., 1995; Bourgeois et al., 1997; Dormieux et al., 1999). O acoplamento elastoplástico se d  na forma $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}(J^p)$, onde a incompressibilidade plástica da fase sólida relaciona o Jacobiano plástico da transformac  o J^p   porosidade Euleriana φ . Para o problema mecânico, tem-se as defini  es das porosidades Lagrangeana e Euleriana, e a rela  o com o Jacobiano plástico da transformac  o, respectivamente (Bernaud et al., 2006):

$$\phi = \frac{d\Omega_t^f}{d\Omega_0} \quad (23)$$

$$\varphi = \frac{d\Omega_t^f}{d\Omega_t} \quad (24)$$

$$\varphi = 1 - \frac{1 - \phi_0}{J^p} \quad (25)$$

Onde $d\Omega_0$   o volume total do meio poroso na configura  o inicial; $d\Omega_t$   o volume total do meio poroso na configura  o atual; $d\Omega_t^f$   o volume de fluido dos poros interconectados do meio poroso na configura  o atual; ϕ_0   a porosidade Lagrangeana inicial; J^p   o Jacobiano plástico da transformac  o, definido como:

$$\frac{\dot{J}^p}{J^p} = \text{tr} \underline{\underline{d}}^p \quad (26)$$

Nesse cenário, o comportamento do material   descrito por:

$$\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}(J^p) : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) + \underline{\underline{\dot{C}}}(J^p) : \underline{\underline{C}}^{-1}(J^p) : \underline{\underline{\sigma}} \quad (27)$$

Onde $\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt}$   a derivada de Jaumann do tensor de tens  es; $\underline{\underline{\Omega}}$   a taxa de rota  o, definida como a parte anti-simétrica do gradiente Euleriano de velocidade; $\underline{\underline{C}}(J^p)$,   o tensor dos módulos elásticos do esqueleto, dado por:

$$\underline{\underline{C}}(J^p) = K(J^p) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu(J^p) (\underline{\underline{1}} - 1/3 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}) \quad (28)$$

Onde $\underline{\underline{1}}$ e $\underline{\underline{1}}$ são os tensores unitários de segunda e quarta ordem respectivamente.

Dada a característica unidimensional do problema oedométrico, a taxa de rota  o $\underline{\underline{\Omega}}$   nula. Na hipótese de elasticidade infinitesimal pode-se admitir a aproxima  o entre o Jacobiano e o Jacobiano plástico $J^p \cong J$. Com essas duas considera  es, a lei de comportamento do material (Eq. (27)) pode ser reescrita como:

$$\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}}(J) : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p) + \underline{\underline{\dot{C}}}(J) : \underline{\underline{C}}^{-1}(J) : \underline{\underline{\sigma}} \quad (29)$$

As fun  es $K(J)$ e $\mu(J)$ expressam a varia  o do módulo de compressão e de cisalhamento do meio poroso decorrentes das grandes deforma  es plásticas. A anisotropia   desconsiderada, permanecendo o material isotrópico. O  nico parâmetro geométrico necessário para caracterizar a evolu  o dessas propriedades   a porosidade Euleriana φ .

Os efeitos das mudanças na microestrutura do material sobre os módulos elásticos drenados do esqueleto são avaliados a partir dos limites variacionais superiores de Hashin-Shtrikman para materiais compósitos isotópicos com inclusões esféricas (Hashin et al., 1963;

Hashin, 1983). Estes limites coincidem com as estimativas micromecânicas de Mori-Tanaka (Maghous et al., 2009) e são conhecidos por modelar razoavelmente as propriedades elásticas de meios porosos isotrópicos (Zaoui, 2002; Dormieux et al., 2006). O módulo de compressão K e o módulo de cisalhamento μ homogeneizados são funções da porosidade Euleriana φ e dos módulos de compressão e cisalhamento da fase sólida que compõe o esqueleto (considerados constantes), k^s e μ^s , respectivamente (Bernaud et al., 2006):

$$K(\varphi) = \frac{4k^s\mu^s(1-\varphi)}{3k^s\varphi + 4\mu^s} \quad (30)$$

$$\mu(\varphi) = \frac{\mu^s(1-\varphi)(9k^s + 8\mu^s)}{k^s(9 + 6\varphi) + \mu^s(8 + 12\varphi)} \quad (31)$$

Na Eq. (29), o termo suplementar introduzido pelo acoplamento elastoplástico pode ser reescrito como:

$$\dot{\underline{\underline{C}}}(J) : \underline{\underline{C}}^{-1}(J) : \underline{\underline{\sigma}} = \dot{J} \left[\bar{K}(J) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\bar{\mu}(J) (\underline{\underline{1}} - 1/3 \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}) \right] : \underline{\underline{\sigma}} = \dot{J} \left[\bar{K}(J) \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}} + 2\bar{\mu}(J) \underline{\underline{s}} \right] \quad (32)$$

Onde $\underline{\underline{s}}$ é o tensor desviador de tensões, e:

$$\bar{K}(J) = \frac{1}{3K(J)} \frac{\partial K(J)}{\partial J} \text{ e } \bar{\mu}(J) = \frac{1}{2\mu(J)} \frac{\partial \mu(J)}{\partial J} \quad (33)$$

No âmbito do estudo do comportamento elastoplástico dos geomateriais, adota-se um modelo simplificado para o critério de plasticidade, que corresponde a um tipo de “cap model” (Figura 4). O critério de plasticidade adotado, nomeado de critério inclinado, tem a forma:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, p_c) = -1/3 \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} - p_c - a\sqrt{J_2} \quad (34)$$

Onde J_2 é o segundo invariante do tensor desviador de tensões; a é um escalar constante positivo que controla a inclinação da parte dúctil da superfície de plastificação.

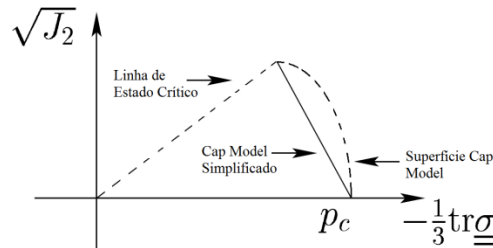


Figura 4. Critério de plasticidade simplificado adotado

A taxa de deformação plástica (21) aplicada ao modelo (34), fornece:

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\chi} \left(-1/3 \underline{\underline{1}} + a / (2\sqrt{J_2}) \underline{\underline{s}} \right) \quad (35)$$

A condição de consistência $\dot{f} = 0$ expressa para o critério de plasticidade (34) é dada por:

$$\dot{p}_c = \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = -\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + a / (2\sqrt{J_2}) \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{s}}} \quad (36)$$

Objetiva-se o desenvolvimento de uma expressão para o módulo de encruamento $m(\underline{\underline{\sigma}}, p_c)$, introduzido em (22), que considera a influência do adensamento (redução de poro-

sidade) sobre os módulos elásticos do material. A redu  o de porosidade deve induzir um valor infinito do módulo de encruamento quando o Jacobiano plástico da transforma  o atinge um valor crítico, ou seja, $\lim_{J^p \rightarrow J_{cr}^p} m(J^p) = +\infty$, onde $J_{cr}^p = 1 - \phi_0$ corresponde a uma porosidade $\phi = 0$.

O desenvolvimento da expressão $m(\underline{\sigma}, p_c)$ pode ser entendido da seguinte forma: a partir da hipótese de elasticidade infinitesimal ($J^p \cong J$) considera-se um volume elementar representativo com comportamento plástico descrito por (34) e submetido a uma compressão isotrópica $\underline{\sigma} = -p_c \underline{1}$. A resposta em termos de taxa de deforma  o total e plástica    dada por:

$$\underline{d} = \frac{\dot{J}}{3J} \underline{1} \text{ e } \underline{d}^p = \frac{\dot{p}_c}{m(\underline{\sigma}, p_c)} \left(-1/3 \underline{1} + a / (2\sqrt{J_2}) \underline{s} \right) \quad (37)$$

Essas duas expressões são substituídas na lei de comportamento (29). Calculando-se o traço dessa expressão, tem-se:

$$m(J) = - \frac{J \frac{dp_c}{dJ}}{1 + J \frac{d}{dJ} \left(\frac{p_c}{K} \right)} \quad (38)$$

A condi  o de elasticidade infinitesimal implica que $p_c/K \ll 1$.

Utilizou-se uma lei de encruamento logarítmica, que evita a o desenvolvimento de porosidade negativa no material quando ele    submetido a altos níveis de tensão confinante (Deud   et al., 2004). A expressão    derivada de um modelo micromecânico simples para um material poroso, composto de uma esfera oca constituída por uma cavidade esférica cercada por uma casca sólida esférica (Barthélémy et al., 2003):

$$p_c(J) = \frac{p_{c0}}{\ln \phi_0} \ln \phi = \frac{p_{c0}}{\ln \phi_0} \ln \left(1 - \frac{1 - \phi_0}{J} \right) \quad (39)$$

4 HIPÓTESE DA EVOLU  O OEDOM  TRICA

Devido às hipóteses de homogeneidade do material depositado ao longo do tempo de estudo e da ausência de sequências tect  nicas, o campo de deforma  o possui uma componente vertical apenas. Essa considera  o expressa um processo de compacta  o oedom  trica.

As simetrias geométricas e materiais levam a campos independentes das coordenadas x_1 e x_2 . Os campos de velocidades e de tensões têm a forma:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u(x_3, t) \underline{e}_3 \quad (40)$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \sigma_h(x_3, t) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_v(x_3, t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (41)$$

Dessa forma, o tensor desviador de tensões resulta em:

$$\underline{s} = -\sqrt{3J_2}/3 (-\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3), \text{ onde } -\sqrt{3J_2} = \sigma_v - \sigma_h \quad (42)$$

A taxa de deforma  o total assume a forma:

$$\underline{d} = \frac{\partial u}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (43)$$

Com as taxas de deformação plástica e total (Eq. (35) e Eq. (43)) e o tensor desviador de tensões (Eq. (42)) é possível expressar a lei constitutiva (Eq. (18)) em função do multiplicador plástico e da variação espacial da velocidade. Aplicando essa relação à condição de consistência plástica (Eq. (36)), tem-se:

$$\dot{p}_c = \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = - \left[(K + a^2 \mu) \dot{\lambda} + \left(K + \frac{2\sqrt{3}}{3} a \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x_3} \right] \quad (44)$$

Substituindo a expressão anterior na expressão que define o multiplicador plástico (Eq. (22)), tem-se:

$$\dot{\lambda} = G(J) \frac{\partial u}{\partial x_3}, \text{ onde } G(J) = - \frac{K + 2\sqrt{3}/3 a \mu}{K + a^2 \mu + m(J)} \quad (45)$$

Onde $m(J)$ foi definido na Eq. (38).

Substituindo o tensor desviador de tensões (Eq. (42)) e a expressão do multiplicador plástico anterior na taxa de deformação plástica (Eq. (35) e (42)), tem-se:

$$\underline{\underline{d}}^p = G(J) \frac{\partial u}{\partial x_3} \left[\left(\frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3} \right) (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left(-\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \right) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] \quad (46)$$

5 ANÁLISE CONSIDERANDO MÓDULOS ELÁSTICOS CONSTANTES

O propósito dessa seção é a derivação de soluções analíticas para o problema de compactação em bacias sedimentares desconsiderando a influência do adensamento do material (redução de porosidade) sobre os módulos elásticos.

Para isso, é desconsiderado o segundo termo à direita da igualdade na Eq. (29), referente à variação dos módulos elásticos do material, bem como a dependência do tensor dos módulos elásticos em relação ao Jacobiano da transformação geométrica.

5.1 Equacionamento

A relação entre altura da camada sedimentar $H(t)$ e o aporte de massa $M_d(t)$ é obtida combinando a expressão Euleriana da conservação de massa (12) com a derivada material de (1), resultando em:

$$\dot{H}(t) = \frac{\dot{M}_d}{\rho_0} + u(H(t), t), \text{ com } \rho_0 = \rho(H(t), t) \quad (47)$$

Essa equação diferencial descreve a lei de compactação da bacia. Nela, o campo de velocidade u é ainda desconhecido. Seu equacionamento é realizado da seguinte forma. A partir da relação entre o gradiente Euleriano de velocidade e o gradiente de transformação (Eq. (20)), e das Eqs. (16) e (40), deriva-se uma expressão que relaciona o campo de velocidade e a dilatação vertical:

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (48)$$

Substituindo a expressão Lagrangeana da conservação de massa (Eq. (13)), o campo de tensões (Eq. (41)) e a expressão do Jacobiano da transformação geométrica (Eq. (17)) no balanço de momentum (Eq. (11)), tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \quad (49)$$

Essa expressão é válida para as duas fases de comportamento.

Fase elástica. O campo de tensões (Eq. (41)) aplicado à lei de comportamento elastoplástico (Eq. (29)), juntamente com a Eq. (48), fornece:

$$\dot{\sigma}_h = \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x_3} = \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (50)$$

$$\dot{\sigma}_v = \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial u}{\partial x_3} = \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (51)$$

Nesse equacionamento foram desprezados os termos referentes à variação dos módulos elásticos do material e à taxa de deformação plástica.

Fase elastoplástica. O campo de tensões (Eq. (41)) aplicado à lei de comportamento elastoplástico (Eq. (29)), juntamente com a Eq. (48), fornece:

$$\dot{\sigma}_h = \beta_h(J) \frac{\partial u}{\partial x_3} = \beta_h(\Lambda) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}, \text{ com } \beta_h(\Lambda) = K - \frac{2}{3} \mu + \left(K - \sqrt{3}/3 a \mu \right) G(\Lambda) \quad (52)$$

$$\dot{\sigma}_v = \beta_v(J) \frac{\partial u}{\partial x_3} = \beta_v(\Lambda) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}, \text{ com } \beta_v(\Lambda) = K + \frac{4}{3} \mu + \left(K + 2\sqrt{3}/3 a \mu \right) G(\Lambda) \quad (53)$$

Onde $G(\Lambda) = G(J)$ foi definido na Eq. (45).

Nesse equacionamento foi desprezado o termo referente à variação dos módulos elásticos do material. As Eqs. (47), (48), (49), (50), (51), (52), (53) descrevem o problema de sedimentação e compactação na bacia.

5.2 Resolução

Fase elástica. As Eqs. (50) e (51) são integradas com a condição de contorno dada pela Eq. (2), resultando em:

$$\sigma_h(x_3, t) = \left(K - 2/3 \mu \right) \ln \Lambda(x_3, t) \quad (54)$$

$$\sigma_v(x_3, t) = \left(K + 4/3 \mu \right) \ln \Lambda(x_3, t) \quad (55)$$

A Eq. (49) pode ser reescrita substituindo-se a expressão anterior, resultando em:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{K + 4/3 \mu} \quad (56)$$

Integrando essa expressão com a condição de contorno sobre a dilatação vertical (Eq. (14)), tem-se:

$$\Lambda(x_3, t) = 1 + \frac{\rho_0 g}{K + 4/3 \mu} (x_3 - H(t)) \quad (57)$$

Para determinar a curva de compactação na fase elástica é necessário calcular a velocidade das partículas no topo da camada sedimentar. A taxa de tensão vertical $\dot{\sigma}_v$ é estaticamente determinada, uma vez que o seu cálculo independe da lei de comportamento:

$$\dot{\sigma}_v = -\dot{M}_d g \quad (58)$$

A velocidade das partículas no topo da camada é obtida substituindo a expressão anterior na Eq. (51). Rearranjando os termos, substituindo essa expressão na Eq. (48), tem-se:

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{-\dot{M}_d g}{K + 4/3\mu} \quad (59)$$

Integrando a expressão anterior com a condição de contorno sobre a velocidade na base da bacia (Eq. (3)) e então calculando a velocidade no topo da camada, tem-se:

$$u^e = u(H(t), t) = \frac{-\dot{M}_d g}{K + 4/3\mu} H(t) \quad (60)$$

Substituindo essa expressão na lei de compactação (Eq. (47)) e, resolvendo a equação diferencial com a condição de contorno dada pela Eq. (4), tem-se:

$$H(t) = \frac{K + 4/3\mu}{\rho_0 g} \left(1 - e^{-\frac{g}{K + 4/3\mu} M_d(t)} \right), \text{ com } M_d(t) = \dot{M}_d t \quad (61)$$

Fase elastoplástica. Em primeiro lugar, determina-se a altura da camada de sedimentos que faz o maciço plastificar (definida no capítulo 2). A plastificação inicia em $x_3 = 0$ para uma altura H^e que anule o critério de plastificação (Eq. (34)). Essa altura é dada por:

$$H^e = \frac{K + 4/3\mu}{\rho_0 g} \left(1 - e^{-\frac{p_{c0}}{K + 2\sqrt{3}/3\mu a}} \right) \quad (62)$$

Onde p_{c0} é a pressão de consolidação inicial.

Associado à altura H^e , tem-se o tempo T^e , que marca o instante em que o maciço plastifica. Ele é determinado igualando a curva de compactação (Eq. (61)) à altura H^e , resultando em:

$$T^e = \frac{K + 4/3\mu}{g\dot{M}_d} \frac{p_{c0}}{K + 2\sqrt{3}/3\mu a} \quad (63)$$

Associado à altura H^e e ao tempo T^e , define-se a dilatação vertical Λ^e . Ela é obtida substituindo $x_3 = 0$ e $t = T^e$ na Eq. (57), resultando em:

$$\Lambda^e = 1 - \frac{\rho_0 g}{K + 4/3\mu} H^e = e^{-\frac{p_{c0}}{K + 2\sqrt{3}/3\mu a}} \quad (64)$$

Também associadas à altura H^e e ao tempo T^e , tem-se as tensões:

$$\sigma_h^e = \sigma_h(x_3, t) \Big|_{t=T^e(x_3, t)} = (K - 2/3\mu) \ln \Lambda^e \quad (65)$$

$$\sigma_v^e = \sigma_v(x_3, t) \Big|_{t=T^e(x_3, t)} = (K + 4/3\mu) \ln \Lambda^e \quad (66)$$

Considerando a lei de encruamento logarítmica (Eq. (39)), o módulo de encruamento definido na Eq. (38) é calculado como:

$$m(\Lambda) = \frac{m_1}{\Lambda - m_2}, \text{ onde } m_1 = -\frac{p_{c0}}{\ln \phi_0} (1 - \phi_0) \text{ e } m_2 = (1 - \phi_0) \left(1 - \frac{p_{c0}}{K \ln \phi_0} \right) \quad (67)$$

Integrando as Eqs. (52) e (53), com as condições de contorno dadas nas Eqs. (65) e (66), tem-se:

$$\sigma_h(x_3, t) = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right) \ln \Lambda^e + h_1 \ln \left(\frac{\Lambda(x_3, t)}{\Lambda^e}\right) + h_2 \ln \left(\frac{\Lambda(x_3, t) - \Lambda^0}{\Lambda^e - \Lambda^0}\right) \quad (68)$$

$$\sigma_v(x_3, t) = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right) \ln \Lambda^e + v_1 \ln \left(\frac{\Lambda(x_3, t)}{\Lambda^e}\right) + v_2 \ln \left(\frac{\Lambda(x_3, t) - \Lambda^0}{\Lambda^e - \Lambda^0}\right) \quad (69)$$

Onde:

$$h_1 = K - \frac{2}{3}\mu + \frac{g_1 m_2 (K - \sqrt{3}/3a\mu)}{g_2 m_2 - m_1} \text{ e } h_2 = -\frac{g_1 m_1 (K - \sqrt{3}/3a\mu)}{g_2 (g_2 m_2 - m_1)} \quad (70)$$

$$v_1 = K + \frac{4}{3}\mu - \frac{g_1^2 m_2}{g_2 m_2 - m_1} \text{ e } v_2 = -\frac{g_1^2 m_1}{g_2 (g_2 m_2 - m_1)} \quad (71)$$

$$g_1 = -(K + 2\sqrt{3}/3a\mu), \quad g_2 = K + a^2 \mu \text{ e } \Lambda^0 = \frac{g_2 m_2 - m_1}{g_2} \quad (72)$$

Substituindo a expressão da componente vertical de tensões (Eq. (69)) no balanço de momentum (Eq. (11)), tem-se:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{\beta_v(\Lambda)} \quad (73)$$

Integrando a expressão anterior com a condição de contorno dada pela Eq. (15), tem-se:

$$\Lambda(x_3, t) = \Lambda^e + c_1 \left[W \left(c_2 e^{c_2 + c_3(x_3 + H^e - H(t))} \right) - c_2 \right] \quad (74)$$

Onde:

$$c_1 = \frac{\Lambda^0 v_2}{v_1 + v_2}, \quad c_2 = \frac{\Lambda^e - \Lambda^0}{c_1} \text{ e } c_3 = \frac{\rho_0 g}{\Lambda^0 v_2} \quad (75)$$

Na Eq. (74), $x \rightarrow W(x)$ é a função *LambertW* definida por $W(x) \exp W(x) = x$. Essa função satisfaz $W(x \exp x) = x$.

A determinação da curva de compactação é feita de forma análoga ao exposto na fase elástica. Determina-se inicialmente o campo de velocidades na bacia. Igualando as Eqs. (53) e (58), tem-se:

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{-\dot{M}_d g}{\beta_v(\Lambda)} \quad (76)$$

Integrando a expressão anterior, com a condição de contorno dada pela Eq. (3), e calculando-a na fronteira entre os domínios elástico e plástico, tem-se:

$$u^p = u(H(t) - H^e, t) = -\dot{M}_d g \frac{c_4}{c_3} \left(c_2 - W \left(c_2 e^{c_2 + c_3(H^e - H(t))} \right) \right) \quad (77)$$

Onde:

$$c_4 = \frac{g_2}{(K + 4/3\mu)g_2 - g_1^2} \quad (78)$$

Integrando a Eq. (59), referente ao domínio elástico, com a condição de contorno (77), tem-se a velocidade no topo da camada da bacia:

$$u^e = u(H(t), t) = u^p - (1 - \Lambda^e) \dot{M}_d / \rho_0 \quad (79)$$

Substituindo a expressão anterior na equação diferencial da lei de compactação (Eq. (47)), tem-se:

$$\dot{H}(t) = \Lambda^e \frac{\dot{M}_d}{\rho_0} + u^p \quad (80)$$

Essa expressão possui a condição de contorno dada pela Eq. (5). Essa equação diferencial possui apenas solução numérica, calculada utilizando o *software Maple*. Obtido $H(t)$, as demais funções σ_h , σ_v e Λ são calculadas com as Eqs. (68), (69) e (74), respectivamente.

6 ANÁLISE CONSIDERANDO MÓDULOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS

6.1 Equacionamento e resolução

Em relação ao capítulo anterior, a única alteração diz respeito ao equacionamento no domínio plástico, na fase elastoplástica. O balanço de momentum (Eq. (11)) e a lei constitutiva (Eq. (29)) fornecem um sistema de equações diferenciais com incógnitas $\Lambda(x_3, t)$, $\sigma_h(x_3, t)$ e $\sigma_v(x_3, t)$:

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \quad (81)$$

$$\dot{\sigma}_h = \mathcal{F}_h \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (82)$$

$$\dot{\sigma}_v = \mathcal{F}_v \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (83)$$

Onde:

$$\mathcal{F}_h = K(1 + \bar{G}) - 2/3 \mu(1 + a\sqrt{3}/2\bar{G}) + \Lambda[\bar{K}tr\bar{\underline{\sigma}} - 2/3\bar{\mu}(\sigma_v - \sigma_h)] \quad (84)$$

$$\mathcal{F}_v = K(1 + \bar{G}) + 4/3 \mu(1 + a\sqrt{3}/2\bar{G}) + \Lambda[\bar{K}tr\bar{\underline{\sigma}} + 4/3\bar{\mu}(\sigma_v - \sigma_h)] \quad (85)$$

K , μ , $\bar{K}$ e $\bar{\mu}$ são funções de J (ou φ) como definido no capítulo 3.

O parâmetro $\bar{G}$ é uma função de J que compõe o multiplicador plástico:

$$\dot{\lambda} = \bar{G}(J) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (86)$$

Sendo calculado de forma análoga ao capítulo 4, resultando em:

$$\bar{G}(J) = -\frac{K + 2\sqrt{3}/3a\mu}{K + a^2\mu + m(J)} - \Lambda \frac{\bar{K}tr\bar{\underline{\sigma}} + 2\sqrt{3}/3a\bar{\mu}(\sigma_v - \sigma_h)}{K + a^2\mu + m(J)} \quad (87)$$

O módulo de encruamento é calculado com a Eq. (38), juntamente com a Eq. (30) que define $K(\varphi)$, resultando em:

$$m(J) = -\frac{4\mu^s p_{c0}(1 - \varphi)}{\varphi \left[4\mu^s \ln \phi_0 + \frac{3p_{c0}}{\varphi} \left(\frac{k^s + 4/3\mu^s}{k^s} \left[\frac{1}{\varphi} + \frac{\ln \varphi}{(1 - \varphi)} \right] - \frac{(1 - \varphi)}{\varphi} \right) \right]} \quad (88)$$

Assumindo que o processo sedimentar é monotônico (isto é, $\dot{M}_d \geq 0$), o estado de tensões $\underline{\sigma}(x_3, t)$ depende unicamente do valor da dilatação vertical $\Lambda(x_3, t)$:

$$\underline{\sigma}(x_3, t) = \underline{\sigma}(\Lambda(x_3, t)) \quad (89)$$

O sistema de equações diferenciais dado pelas Eqs. (81), (82) e (83), pode ser reescrito, retirando-se as variações temporais, sob a forma:

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \quad (90)$$

$$\frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{\mathcal{F}_h}{\mathcal{F}_v} \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \quad (91)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{\mathcal{F}_v} \quad (92)$$

Para uma dada configuração da bacia, definida pela altura da camada sedimentar $H(t)$, o sistema de equações diferenciais anterior depende unicamente da variável espacial $x_3 \in [0, H(t) - H^e]$.

O sistema formado pelas Eqs. (90), (91) e (92) é resolvido numericamente utilizando o *software Maple*, tendo como condições de contorno a continuidade das funções na fronteira entre os domínios elástico (já conhecido) e plástico (em $x_3 = H(t) - H^e$). Uma vez que Λ , σ_h e σ_v são calculados para um dado valor de $H(t)$, o campo Euleriano de velocidades na fronteira entre os domínios elástico e plástico pode ser determinado. Esse cálculo é realizado de forma semelhante ao exposto anteriormente, obtendo-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{-\dot{M}_d g}{\mathcal{F}_v} \quad (93)$$

Essa equação é integrada numericamente, tendo como condição de contorno sobre o campo de velocidade a Eq. (3). Assim é determinada a velocidade na fronteira entre os domínios elástico e plástico, de forma análoga à Eq. (77).

O último passo consiste em atualizar a altura da bacia sedimentar. Para um incremento de tempo Δt , o incremento na espessura da camada é dado por (ver Eq. (47)):

$$\Delta H = \Delta t \left(\frac{\dot{M}_d}{\rho_0} + u(H(t), t) \right) \quad (94)$$

O processo de integração numérica é então repetido para o tempo $t + \Delta t$ com a nova altura da bacia sedimentar $H(t + \Delta t) = H(t) + \Delta H$.

7 MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico adotado foi implementado em um simulador de elementos finitos especificamente concebido para os processos de formação e compactação de bacias sedimentares no contexto das grandes deformações, resultado do trabalho de Brück (2016).

O modelo constitutivo original desse simulador corresponde ao apresentado por Maghous et al. (2014), sendo resultado de pesquisas desenvolvidas por Bourgeois et al. (1995), Bourgeois et al. (1997), Dormieux et al. (1999), Dormieux et al. (2000), Bernaud et al. (2002),

Barthélémy et al. (2003), Deudé et al. (2004), Bernaud et al. (2006) e Brüch (2016), para representar o comportamento de um material sedimentar submetido à deformações de natureza mecânica e químico-mecânicas com a atuação conjunta da temperatura.

O modelo numérico adotado e implementado corresponde à lei constitutiva dada pela Eq. (29), onde as Eqs. (30) e (31) são utilizadas para descrever a evolução dos módulos elásticos em função da porosidade Euleriana. O critério de plasticidade implementado corresponde ao modelo inclinado exposto na Eq. (34), e a lei de encruamento é a logarítmica, dada na Eq. (39). No algoritmo de integração das deformações plásticas (*return mapping*), o cálculo do multiplicador plástico envolve duas aproximações por séries de Taylor, com truncamento nos termos de primeira ordem. A primeira aproximação é relativa ao critério de plasticidade, e a segunda diz respeito à lei de encruamento logarítmica.

A ferramenta computacional foi desenvolvida baseada no método dos elementos finitos, onde o processo de sedimentação é simulado a partir de um algoritmo de ativação/desativação de elementos (Hanafy et al., 1980; Bernaud et al., 1995). Nas simulações foram utilizados elementos hexaédricos de 20 nós.

8 VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo tem como objetivo a verificação das soluções do modelo numérico exposto no capítulo 7, por meio de comparações com as soluções de referência desenvolvidas nos capítulos 5 e 6.

Nas verificações foram considerados uma taxa de deposição sedimentar de $\dot{M}_d = 100 \text{ m/m}^2$ a cada milhão de anos e o período geológico de $T_{sed} = 60 \text{ Ma}$. O material sedimentar depositado durante a formação da bacia possui massa específica inicial $\rho_0 = 646.8 \text{ kg/m}^3$ e porosidade inicial $\phi_0 = 0.72$. Para a verificação considerando os módulos elásticos constantes foi utilizado o módulo de Young inicial $E_0 = 10^3 \text{ MPa}$, enquanto que na verificação considerando os módulos elásticos variáveis foi utilizado o módulo de Young inicial $E_0 = 10^2 \text{ MPa}$. O coeficiente de Poisson inicial utilizado foi $\nu_0 = 0.33$. A pressão de consolidação inicial utilizada foi $p_{c0} = 2.75 \text{ MPa}$ e o parâmetro que controla a parte desviadora no critério de plastificação foi definido como $\alpha = 1.15$.

Utilizou-se uma discretização espacial de 120 elementos para as simulações numéricas. Assim, tem-se 120 elementos hexaédricos regularmente distribuídos ao longo da espessura da camada, cada um com altura inicial $h_0 = 50 \text{ m}$. A malha corresponde a 1448 nós e 4344 graus de liberdade.

O algoritmo de deposição/sedimentação apresenta a dependência entre geometria e passo de tempo. Para a altura inicial dos elementos tem-se a discretização temporal de $\delta t = 0.5 \text{ Ma}$. A correlação entre esses dois dados é feita através da taxa de sedimentação, conforme Brüch (2016).

Os resultados analisados são a lei de compactação, os perfis de tensões, o perfil de dilatação vertical e o perfil de porosidade em $t = T_{sed} = 60 \text{ Ma}$.

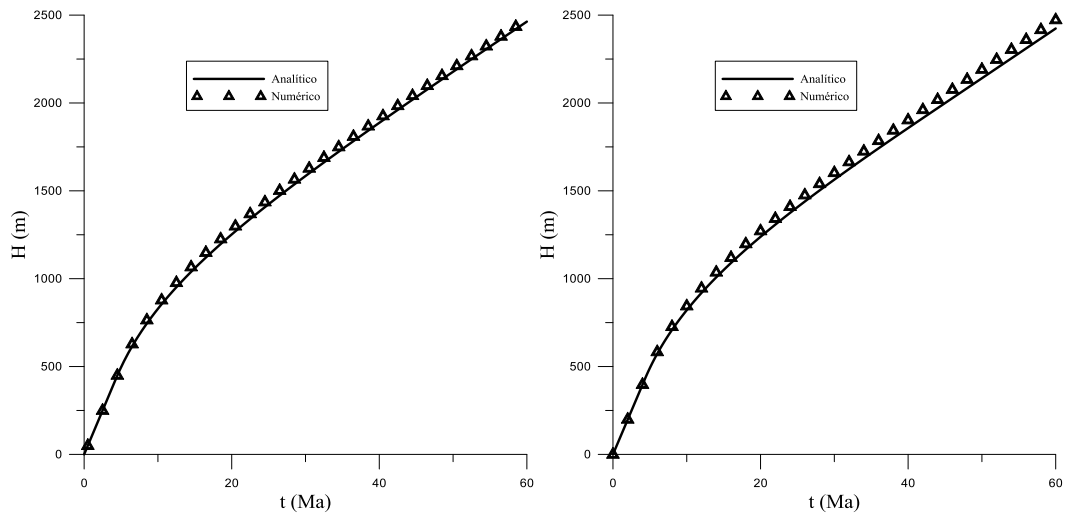


Figura 5. Lei de compact  o para módulos elásticos constantes (esquerda) e variáveis (direita)

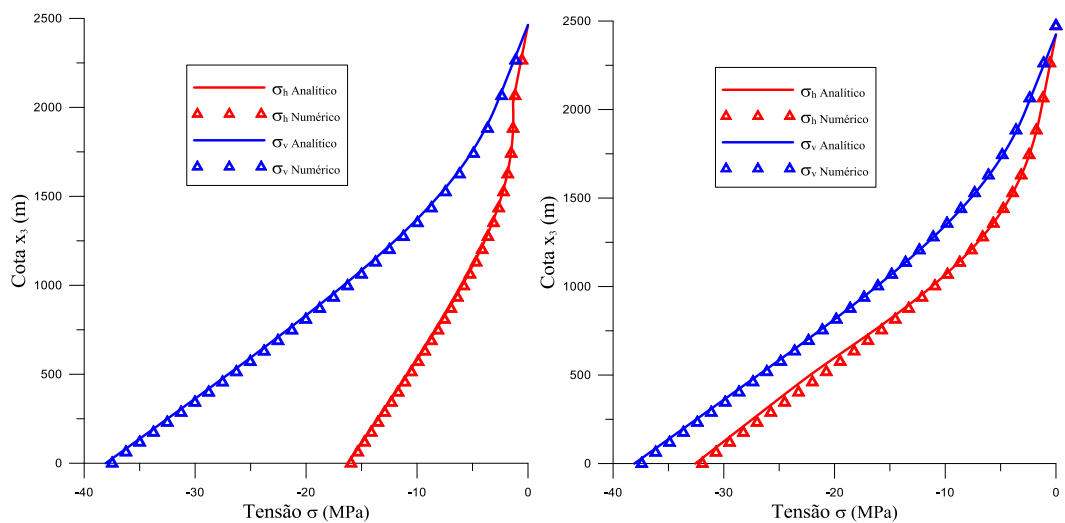


Figura 6. Perfil de tensões para módulos elásticos constantes (esquerda) e variáveis (direita)

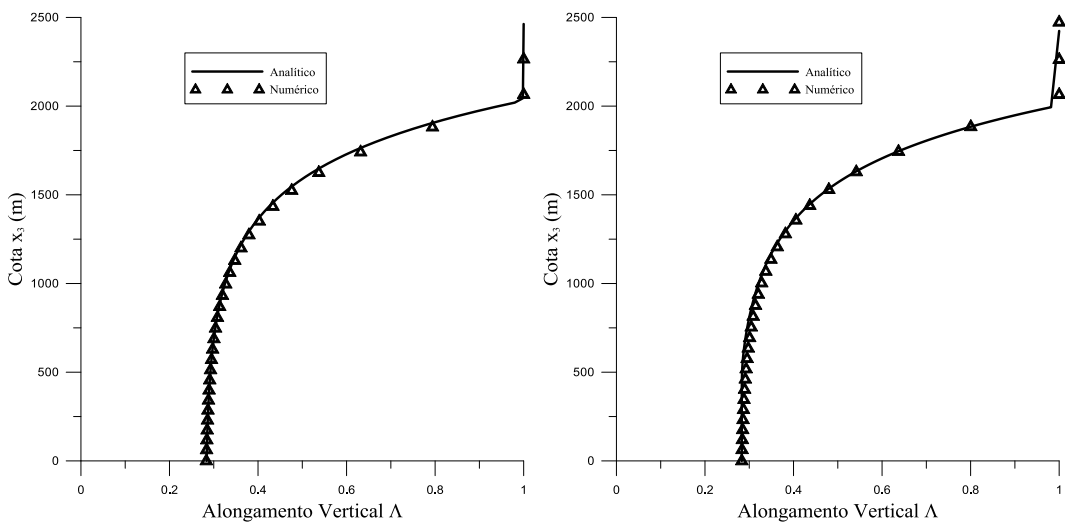


Figura 7. Perfil de dilata  o vertical para módulos elásticos constantes (esquerda) e variáveis (direita)

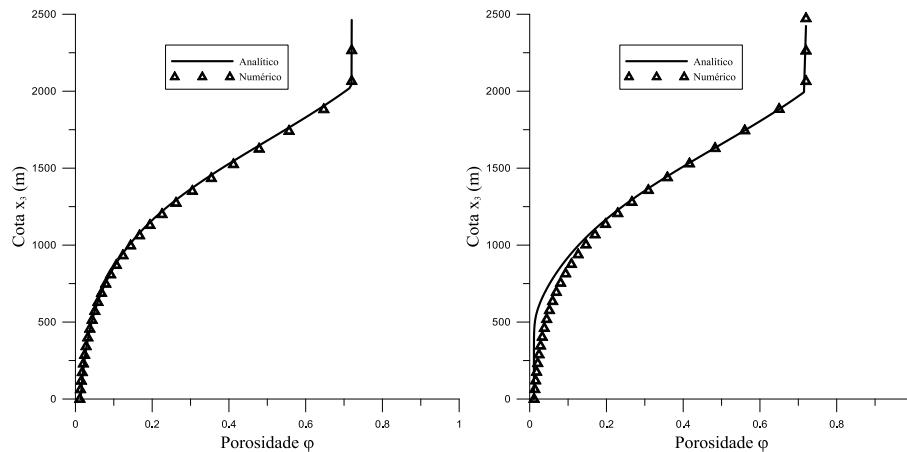


Figura 8. Perfil de porosidade para módulos elásticos constantes (esquerda) e variáveis (direita)

Verifica-se que as previsões numéricas se mostram muito próximas às soluções de referência para todas as variáveis analisadas.

A característica marcante do modelo que considera a influência do adensamento sobre os módulos elásticos é evidenciada nas leis de compactação (Figura 5). A lei de compactação com módulos elásticos variáveis foi traçada com um módulo de Young inicial dez vezes menor que àquela com módulos elásticos constantes. Apesar da diferença de rigidez entre os materiais sedimentares, a diferença entre as leis de compactação é inferior a 40 m. Isso evidencia, no modelo com módulos elásticos variáveis, o aumento de rigidez decorrente da compactação. O aumento de rigidez também é acompanhado pelo aumento da pressão de consolidação do material (endurecimento do material). Esse aumento produz deformações plásticas menores, que conduzem a uma menor deformabilidade do material. Esse comportamento também verificável no perfil de tensões da Figura 6 (direita), onde o desenvolvimento das tensões apresenta um trecho aproximadamente linear.

A Figura 7 apresenta a comparação entre os perfis de dilatação vertical obtidos analiticamente e pelas previsões numéricas. Para as soluções de referência, conforme os capítulos 2 e 3, foi empregada a aproximação $\Lambda = J \cong J^p$, válida sob a hipótese de transformação elástica infinitesimal. No algoritmo numérico o Jacobiano plástico é diretamente calculado a partir da deformação plástica obtida a cada incremento de carregamento. Verifica-se boa aproximação entre os resultados.

Verifica-se uma pequena diferença entre os perfis de porosidade analítico e numérico para o caso dos módulos elásticos variáveis Figura 8 (direita). Esse comportamento pode ser atribuído à linearização da lei de encruamento (conforme capítulo 7).

9 CONCLUSÕES

O estudo dos processos de sedimentação e de compactação de origem puramente mecânica foi abordado em dois modelos distintos, que diferem entre si pela consideração feita acerca da evolução dos módulos elásticos em relação ao adensamento do material. Para isso, foi apresentada a formulação constitutiva do material sedimentar, no contexto das transformações finitas, juntamente com um equacionamento dos módulos elásticos do esqueleto dependente da porosidade.

O problema mecânico foi desenvolvido em duas etapas: a primeira, desconsiderando a influência do adensamento do material sobre os módulos elásticos do material; e a segunda, considerando essa influência. Posteriormente, foram apresentadas as principais características do modelo numérico.

Ao final do trabalho foram apresentadas as verificações das soluções numéricas com as soluções de referência. As verificações demonstraram boa aproximação entre as predições dos modelos numéricos e as soluções de referência desenvolvidas.

REFERÊNCIAS

- Barthélémy, J.-F., Dormieux, L. & Maghous, S., 2003. Micromechanical approach to the modelling of compaction at large strains. *Computers and Geotechnics*, Volume 30, pp. 321-338.
- Bernaudo, D., Buhan, P. d. & Maghous, S., 1995. Numerical simulation of the convergence of a bolt-supported tunnel through a homogenization method. *Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 19, pp. 267-288.
- Bernaudo, D. et al., 2002. Evolution of elastic properties in finite poroplasticity and finite element analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 26, pp. 845-871.
- Bernaudo, D., Dormieux, L. & Maghous, S., 2006. A constitutive and numerical model for mechanical compaction in sedimentary basins. *Computers and Geotechnics*.
- Bourgeois, E., Buhan, P. d. & Dormieux, L., 1995. Formulation d'une loi élastoplastique pour un milieu poreux saturé en transformation finie. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série II: Mécanique, physique, chimie, astronomie*.
- Bourgeois, E. & Dormieux, L., 1997. Prise en compte des non-linéarités géométriques dans la modélisation de la compaction des sédiments. *Oil & Gas Science and Technology - Revue de l'Institut Français du Pétrole*.
- Brüch, A. R., 2016. *Simulação numérica tridimensional de processos de deformação em bacias sedimentares*, Porto Alegre: s.n.
- Deudé, V. et al., 2004. Compaction process in sedimentary basins: the role of stiffness increase and hardening induced by large plastic strains. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, March, p. 1279-1303.
- Dormieux, L., Kondo, D. & Ulm, F. -J., 2006. *Microporomechanics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- Dormieux, L. & Maghous, S., 1999. Poroelasticity and poroplasticity at large strains. *Oil & Gas Science and Technology*, Volume 54, pp. 773-784.
- Dormieux, L. & Maghous, S., 2000. Evolution of elastic properties in finite poroplasticity. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences*, Volume 328(IIb), pp. 593-600.
- Halphen, B. & Salençon, J., 1987. *Élasto-Plasticité*. Paris: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

- Hanafy, E. A. & Emery, J. J., 1980. Advancing face simulation of tunnel excavations and lining placement. *13th Canadian Rock Mechanics Symposium: Underground Rock Engineering*, pp. 119-125.
- Hashin, Z., 1983. Analysis of composite materials – a survey.. *Journal of Applied Mechanics*.
- Hashin, Z. & Shtrikman, S., 1963. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials.. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
- Maghous, S. et al., 2014. Two-dimensional finite element analysis of gravitational and lateral-driven deformation in sedimentary basins. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 38, pp. 725-746.
- Maghous, S., Dormieux, L. & Barthélémy, J. -F., 2009. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials.. *European Journal of Mechanics A/Solids*.
- Meroi, E. A., Schrefler, B. & Zienkiewics, O., 1995. Large strain static and dynamic semisaturated soil behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 19, pp. 81-106.
- Oberkampf, W. L. & Roy, C. J., 2010. *Verification and validation in scientific computing*. s.l.:Cambridge University Press.
- Perzyna, P., 1966. Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*, Volume 9, pp. 243-277.
- Schmidt, V. & McDonald, D. A., 1979. The role of secondary porosity in the course of sandstone diagenesis. *Aspects of Diagenesis*, Volume 26, pp. 175-207.
- Zaoui, A., 2002. Continuum micromechanics: survey.. *Journal of Engineering Mechanics*.