



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA POR FADIGA EM MODO MISTO (I+II)

Pedro Gustavo Pereira Leite

Gilberto Gomes

pedroprk92@gmail.com

ggomes@unb.br

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil, 71910-900, Brasília-DF, Brasil

Resumo. *O objetivo deste estudo é simular resultados experimentais e numéricos de propagação de trinca por fadiga em modo misto (I+II) em problemas 2D publicados na literatura. A modelagem numérica de cada espécime foi realizada pelo software BemCracker2D. O método dos elementos de contorno faz a análise de tensão no software com o método dos elementos de contorno dual (MECD) para análise de trincas; Os fatores de intensidade de tensão foram calculados pelo software utilizando o método da integral-J; O software usa o critério da máxima tensão circunferencial para prever a direção do crescimento da trinca; A taxa de crescimento da trinca é avaliada usando uma equação do tipo de Paris como uma função de um fator de intensidade de tensão equivalente. Os resultados obtidos aqui são apresentados diante resultados numéricos e experimentais presentes na literatura para discutir e validar os softwares BemLab2D e BemCracker2D para o uso em análises de propagação de trinca por fadiga em modo misto.*

Palavras-chave: Bemcracker2D, BemLab2D, Modo Misto, Método dos elementos de contorno dual, Fadiga.

1 INTRODUÇÃO

A utilização de programas comerciais e acadêmicos baseados no método dos elementos finitos (MEF) para o desenvolvimento de pesquisas na área da mecânica da fratura já são bem difundidos, apresentando excelentes resultados (Ma et al., 2006; Borges, 2010; Boljanovic e Maksimovic, 2011). Apesar do MEF apresentar ótimos resultados em análises de propagação de trincas, na maioria de suas formulações, há necessidade de um remalhamento contínuo para cada incremento de trinca.

O método dos elementos de contorno (MEC) também apresenta excelentes resultados no campo da mecânica da fratura, com a utilização da técnica de sub-regiões (Blandford et al., 1981), para contornar o problema da singularidade do sistema de equações ou com a utilização de duas equações integrais independentes conhecida como método dos elementos de contorno dual (MECD). Por sua vez, o MECD (Portela et al., 1992) apresenta uma clara vantagem sobre outros métodos, uma vez que não apresenta a necessidade de remalhamento a cada extensão da trinca e a singularidade é contornada pela utilização de equações distintas nos elementos que discretizam cada face da trinca.

Apesar das vantagens do MECD sobre outros métodos numéricos para o estudo de propagação de trincas, o MEC ainda não apresenta uma aplicação ampla como o MEF nessa área. Existe uma insuficiência de pacotes computacionais via MEC para análise de trincas se comparado com o MEF, onde há vários programas que se baseiam nesse método. Gomes et al. (2016) apresentou em seu trabalho um software baseado em MECD para análise de trincas bidimensionais denominado como BemCracker2D e uma interface gráfica para visualização dos problemas denominado como BemLab2D (Delgado Neto et al., 2016). Em seu trabalho, é possível observar a clara simplificação no processo de modelagem dos exemplos propostos seguidos de ótimos resultados.

Assim, realizar simulações numéricas utilizando o BemCracker2D e BemLab2D proporcionará resultados e discussões de grande relevância para a difusão dos programas acadêmicos baseados no MECD citados no âmbito da mecânica da fratura. Para isso, este trabalho utilizará resultados numéricos e experimentais de propagação de trinca por fadiga em modo misto (I+II) presentes na literatura. O estudo de problemas de propagação em modo misto são o alvo deste trabalho, com o intuito de extrair todo o potencial do programa em problemas bidimensionais, apresentando valores dos fatores de intensidade de tensão KI e KII, direção de propagação, taxa de propagação e vida à fadiga.

Este trabalho está organizado nas seguintes seções: a seção 2 apresenta uma breve descrição dos programas BemCracker2D e BemLab2D, onde explica-se as técnicas que o software utiliza para se obter os fatores de intensidade de tensão, direção de propagação e vida à fadiga; a seção 3 apresenta as simulações numéricas realizadas com o BemCracker2D e BemLab2D, onde são apresentados os exemplos retirados da literatura e como foram realizadas as modelagens numéricas dos mesmos; por fim, as considerações finais e conclusões são apresentadas na seção 4.

2 SOBRE OS PROGRAMAS DE ANÁLISE

Os programas empregados neste trabalho foram desenvolvidos com o intuito de automatizar todo o processo de uma análise de propagação de trinca, desde a definição da geometria do problema, definição da malha, processamento até a apresentação dos resultados. Para isso, Gomes et al. (2016) desenvolveu um programa escrito em C++ para analisar problemas elastostáticos bidimensionais utilizando o MEC fundamentado nos conceitos da Programação Orientada a Objetos (POO), denominado como BemCracker2D. Posteriormente, Delgado Neto et al. (2016) desenvolveram o BemLab2D, uma interface gráfica para pré e pós-processamentos, escrita em MATLAB, capaz de gerar dados (geometria, malha e condições de contorno) para o processador BemCracker2D, onde é feita toda a análise do problema e finalmente, direcionando os resultados da análise de volta para o BemLab2D, onde podem ser visualizados em uma etapa de pós-processamento (gráficos, diagramas e caminho da trinca). O processo descrito acima pode ser visualizado no fluxograma apresentado na Fig. 1, onde é esquematizado todo o processo do trabalho conjunto de ambos os programas:

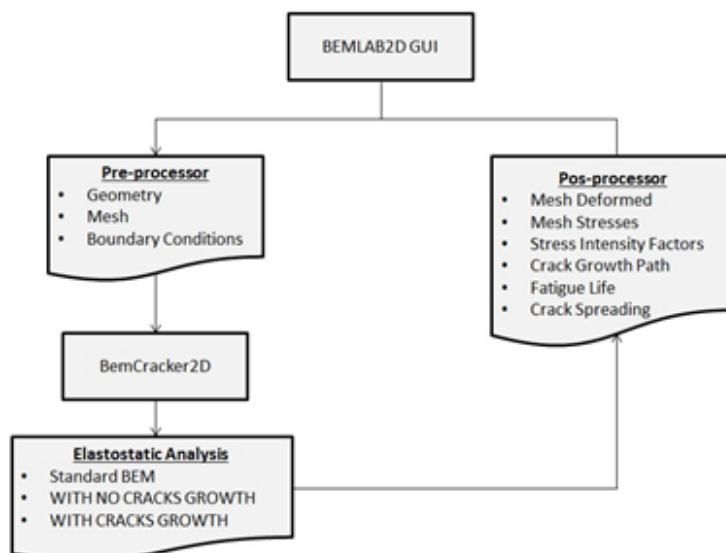


Figura 1 - Fluxograma do processo de automatização da análise de propagação de trinca feita pelo BemLab2D e BemCracker2D (Fonte: Gomes et al. 2016)

2.1 Sobre o BemLab2D

Desenvolvido por Delgado Neto et al. (2016), o programa BemLab2D é uma interface gráfica com a função de pré e pós-processador, escrita em MATLAB, com o intuito de gerar e visualizar sólidos bidimensionais, proporcionando ferramentas para a entrada de dados do problema de análise por meio de botões, mouse e caixas de diálogos. Além das funções de pré-processador, há também o módulo referente a etapa de pós-processamento, onde é possível solicitar os resultados gerados pelo BemCracker2D.

O BemLab2D apresenta os seguintes módulos:

- GEOMETRY (Módulo I): Utilizado para a construção do modelo bidimensional do problema por meio de ferramentas de desenho (pontos de auxílio, linhas, arcos e definição de zonas);
- MESH (Módulo II): Utilizado para gerar a malha do problema. Há opções para gerar malhas de MEC, MEF e opção sem malha (Meshless). As duas últimas opções ainda não estão bem desenvolvidas e não há interesse de utilizá-las no presente trabalho;
- BOUNDARY CONDITIONS (Módulo III): Aqui são definidos as condições de contorno especificamente para o MEC;
- ELASTOSTATIC ANALYSIS (Módulo IV): Aqui é definida o tipo de análise que será executado para o problema. Pode-se optar pela análise padrão do MEC, análise sem propagação de trinca e análise com propagação de trinca;
- GRAPHICAL RESULTS (Módulo V): Este módulo é responsável pela visualização dos resultados gerados pelo processador BemCracker2D, onde é possível visualizar a malha deformada, valores dos fatores de intensidade de tensão KI e KII, caminho da propagação da trinca e vida à fadiga.

2.2 Sobre o BemCracker2D

Desenvolvido por Gomes et al. (2016), o programa BemCracker2D foi escrito em linguagem C++ e fundamentado nos conceitos da Programação Orientada a Objetos (POO) para analisar problemas elastostáticos bidimensionais utilizando o MEC. O BemCracker2D trabalha como o processador da automatização da análise de propagação de trinca em geometrias 2D, recebendo dados da etapa de pré-processamento do BemLab2D e gerando resultados, enviando-os de volta para a etapa de pós-processamento.

Basicamente, o programa consiste em três módulos de processamento:

- MEC padrão (módulo I);
- MECD Sem Propagação (módulo II);
- MECD Com Propagação (módulo III);

Sendo o módulo III utilizado para análise de propagação de trinca baseado no MECD, onde a análise de tensões é feita com MEC, os fatores de intensidade de tensão K são calculados utilizando a Integral-J, a direção do crescimento da trinca é feita pelo critério da Máxima Tensão Circunferencial e a vida à fadiga pela Lei de Paris.

Método dos elementos de contorno dual. O termo *dual* vem do uso de duas equações distintas em cada face da trinca. Portela et al. (1992) propôs a utilização dessa metodologia para contornar o problema de singularidade do sistema de equações algébricas gerado pela aplicação direta do MEC e pelas dificuldades apresentadas pela técnica de sub-regiões, onde é preciso introduzir pontos no domínio, resultando em uma formação de grandes sistemas de equações em uma análise incremental. Este método é adequado no estudo de propagação de trincas, pois a cada incremento da trinca, geram novos elementos e resultam em linhas e colunas adicionais

à matriz já existente, mantendo os valores anteriores e só adicionando novos, diferente da técnica de sub-regiões, onde a cada incremento de trinca resulta em um novo sistema de equações.

O método consiste em utilizar equações distintas em cada face da trinca, a equação integral de deslocamento e a equação integral de tração. Assumindo a ausência de forças de corpo e continuidade de deslocamentos em um ponto x' do contorno, a equação integral de deslocamento é dada por:

$$c_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) \quad (1)$$

Onde i e j são componentes cartesianas; $T_{ij}(x', x)$ e $U_{ij}(x', x)$ representam as soluções fundamentais de Kelvin para tração e deslocamento, respectivamente, em um ponto x do contorno. $CPV \int$ é a integral com Valor Principal de Cauchy e $c_{ij}(x')$ apresentam coeficientes dados por $\delta_{ij}/2$ para um contorno suave no ponto x' onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Com as mesmas suposições e assumindo a continuidade de trações no ponto x' sobre um contorno suave, a equação integral de tração é dada por:

$$\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x')HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(x', x)u_k(x)d\Gamma(x) = n_i(x')CPV \int_{\Gamma} D_{ijk}(x', x)t_k(x)d\Gamma(x) \quad (2)$$

Onde $HPV \int$ é a integral com Valor Principal de Hadamard. Os tensores $S_{ijk}(x', x)$ e $D_{ijk}(x', x)$ contêm derivadas de $T_{ij}(x', x)$ e $U_{ij}(x', x)$, respectivamente, da Equação 2.32. O termo $n_i(x')$ representa a i -ésima componente do vetor normal unitário ao contorno, no ponto x' e $t_j(x')$ contém as componentes de tração.

Integral-J. A técnica utilizada pelo BemCracker2D para se obter os valores dos fatores de intensidade de tensão é pela integral-J (Rice, 1968). A integral-J é uma integral de linha que percorre as extremidades da trinca no sentido anti-horário, em um contorno arbitrário Γ , e é invariante para qualquer percurso adotado.

Seu valor é definido em relação ao eixo de coordenadas cartesianos, com origem na ponta da trinca.

$$J = \int_{\Gamma} \left(Udy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (3)$$

Na Equação 3, o valor de U representa a energia de deformação, T_i representa as componentes do vetor de tração e u_i representa as componentes do vetor de deslocamento em uma parcela infinitesimal do contorno ds . O valor de U é definido como:

$$U = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4)$$

Onde σ_{ij} e ε_{ij} são os tensores de tensão e deformação, respectivamente.

Apesar de ter sido introduzida para contornar problemas na mecânica da fratura elasto-plástica (MFEP), a integral-J pode ser utilizada na mecânica da fratura linear elástica (MFLE) para encontrar os valores dos fatores de intensidade de tensão K , uma vez que J é igual a taxa

de alívio energético G quando a análise é feita em MFLE, como é o caso das análises feitas no BemCracker2D. Desta forma, temos a seguinte relação entre K e J :

$$J_I = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{e} \quad J_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (5)$$

Direção de propagação da trinca. Para definir a direção de propagação, o BemCracker2D utiliza a técnica da máxima tensão circunferencial (Erdogan e Sih, 1963). A direção da trinca é definida perpendicularmente ao plano da máxima tensão normal.

Utilizando o princípio da superposição linear e as equações dos fatores de intensidade de tensão do modo I e II, é possível obter uma solução para o ângulo θ_t que define a direção da trinca:

$$\theta_t = 2 \arctg \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (6)$$

Sendo o sinal dependente do valor de K_{II} . Se K_{II} é positivo, então o valor de θ_t é negativo. Se K_{II} é negativo, então o valor de θ_t é positivo.

Existe uma correção que deve ser aplicada em uma análise incremental para definir a direção da trinca no n -ésimo incremento. Para determinar essa correção é introduzido um ângulo de correção β na direção tangente do caminho da trinca θ_t , como observado na Fig. 2. O ângulo de correção é dado por:

$$\beta = \frac{\theta_{t(n+1)}}{2} \quad (7)$$

Onde o valor de $\theta_{t(n+1)}$ é a direção do próximo incremento da extensão da trinca, calculada pelo critério da máxima tensão circunferencial (MTC).

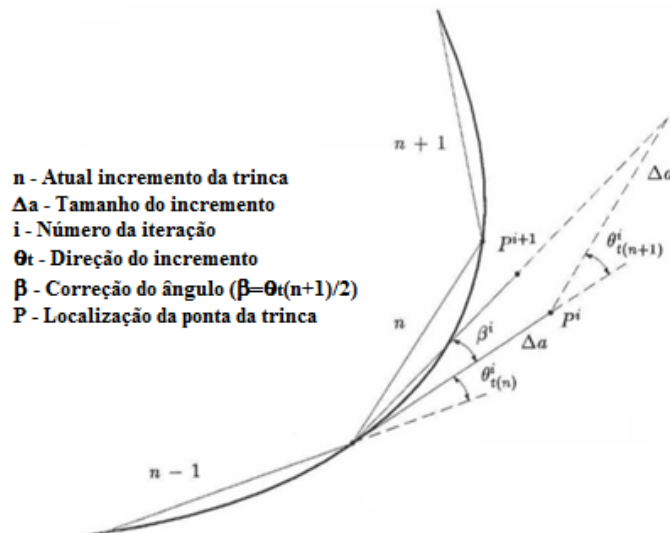


Figura 2 - Direção da extensão incremental da trinca (Fonte: Gomes, 2016)

Vida à fadiga. O BemCracker2D calcula a vida à fadiga utilizando uma equação similar à lei de Paris, proposta por Tanaka (1974). A taxa de propagação é função da variação do fator de intensidade de tensão equivalente:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_{eq}^m \quad (8)$$

Onde C e m são constantes do material determinados experimentalmente. A Equação 9 apresenta o valor de ΔK_{eq} que considera o modo misto I e II.

$$\Delta K_{eq} = \left(\Delta K_I^4 + 8 \cdot \Delta K_{II}^4 \right)^{0.25} \quad (9)$$

Para se obter o número de ciclos N_f necessários para propagar uma trinca de um comprimento inicial a_i até o seu comprimento final a_f , integra-se a Eq. (8) ou aplica-se outros métodos como o algoritmo proposto por Bannantine et al. (1990). Como o BemCracker2D já calcula o valor de ΔK para cada incremento de trinca por integral-J, o algoritmo de Bannantine se resume em três passos principais:

- Para cada valor de ΔK , determina-se a taxa de propagação da/dN da Eq. (8);
- Determina-se a média da taxa de propagação no intervalo:

$$\left(\frac{da}{dN} \right)_{médio} = \frac{\left(\frac{da}{dN} \right)_n + \left(\frac{da}{dN} \right)_{n+1}}{2} \quad (10)$$

- Determina-se o número de ciclos para o crescimento durante o incremento a_n até a_{n+1} , depois este valor é somado ao valor anterior de ΔN , obtendo o número de ciclos para cada incremento:

$$\Delta N = \frac{\Delta a}{\left(\frac{da}{dN} \right)_{médio}} = \frac{2 \cdot (a_{n+1} - a_n)}{\left(\frac{da}{dN} \right)_n + \left(\frac{da}{dN} \right)_{n+1}} \quad (11)$$

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Em todas simulações realizadas, a estratégia de modelagem aplicada foi a mesma apresentada por Gomes (2016 apud Portela et al., 1993), onde o MECD é utilizado. O contorno da trinca é modelado com elementos quadráticos descontínuos e utiliza-se a Eq. (1), para deslocamentos, em uma das faces da trinca e a Eq. (2), para forças de superfície, na outra face. O restante do contorno é modelado com elementos quadráticos contínuos e nas interseções entre trinca e uma aresta são utilizados elementos quadráticos semi-descontínuos, utilizando a Eq. (1) de deslocamento. Isso é feito de forma automática pelo programa e o usuário apenas define o número de elementos e a razão dos elementos descontínuos.

Neste trabalho, serão utilizados três exemplos presentes na literatura sobre propagação de trincas para apresentar uma comparação de resultados entre eles. O primeiro trabalho foi

apresentado por Borges (2010) em que utiliza-se um corpo de prova padronizado tipo compacto de tração (CT), para propagar uma trinca por fadiga em modo I. O segundo trabalho foi apresentado por Boljanovic e Maksimovic (2011) em que utiliza-se uma placa de alumínio com uma trinca inicial localizada no canto do furo central do corpo de prova. E o terceiro e último trabalho foi apresentado por Ma et al. (2006) em que um corpo de prova para propagações em modo misto (CTS) foi utilizado. Cada um deles é descrito a seguir, assim como seus respectivos modelos e resultados obtidos pelo BemLab2D e BemCracker2D.

3.1 Primeira simulação (Borges, 2010)

O corpo de prova utilizado foi do tipo compacto de tração (CT) ilustrado na Fig. 3, constituído de ferro fundido nodular austemperado (ADI), com as seguintes propriedades obtidas experimentalmente por Borges (2010 apud Dias, 2006): resistência ao escoamento $f_y = 871.6$ MPa; resistência última $f_u = 1115.1$ MPa; módulo de elasticidade $E = 155400$ MPa; coeficiente de Poisson $\nu = 0.28$. Considerou-se amplitude de carga constante de forma que se tenha $\Delta P = 5.4$ kN, sendo $\Delta P = P_{max} - P_{min}$, com carregamento máximo $P_{max} = 7.714$ kN, carregamento mínimo $P_{min} = 2.314$ kN, consequentemente, a razão entre o carregamento mínima e máxima é $R = P_{min} / P_{max} = 0.3$. Para análise de propagação, as constantes de Paris utilizadas são: $C = 7.1433 \cdot 10^{-12} \frac{m/ciclo}{(MPa\sqrt{m})^m}$ e $m = 3.0753$.

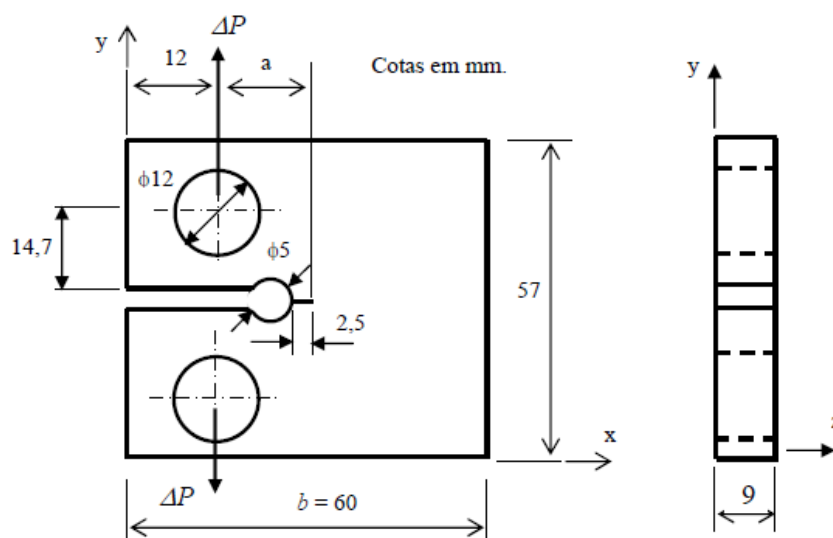


Figura 3 - Dimensões do corpo de prova tipo CT (Fonte: Borges, 2010)

A modelagem feita por Borges (2010) foi através do programa FRANC3D, onde obteve-se os valores dos fatores de intensidade de tensão e, a partir destes, os valores da taxa de propagação pela lei de Paris, assim como o número de ciclos para cada incremento de trinca utilizando o algoritmo proposto por Bannantine et al. (1990). Seus resultados foram apresentados em comparação com resultados experimentais realizados por Dias (2006). Os resultados obtidos são apresentados a partir da dimensão $a = 15.5$ mm, tendo como dimensão

final, após a propagação, $a = 33$ mm. Cada incremento avança 0.5 mm até a dimensão $a = 30.5$ mm, a partir desta, o incremento avança em 1 mm para $a = 31.5$ mm e finalmente para $a = 33$ mm em um avanço final de 1.5 mm. O modelo 3D construído por Borges (2010) é ilustrado na Fig. 4.

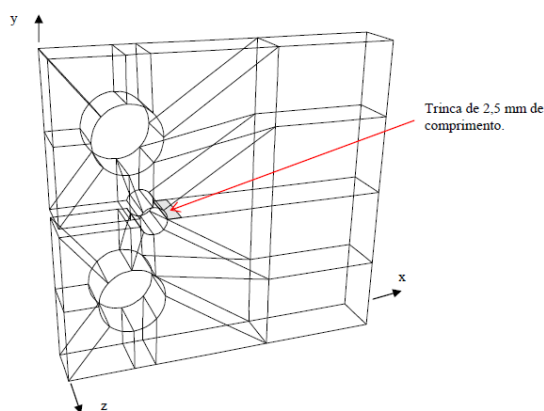


Figura 4 - Modelo tridimensional do corpo de prova CT utilizado nas simulações com o FRANC3D (Fonte: Borges, 2010)

Para realizar a modelagem no BemCracker2D, foi considerado o problema em um plano bidimensional no estado plano de tensão. Foram realizadas várias modelagens até chegar ao modelo definitivo, onde no processo houve refinamento de malha, mudança na aplicação de carga e nas condições de contorno de deslocamento. O modelo definitivo possui 78 elementos de contorno no total. A trinca foi modelada com elementos descontínuos de razão 0.5, 0.3, 0.2 para cada face da trinca. A malha utilizada pode ser observada na Fig. 5.

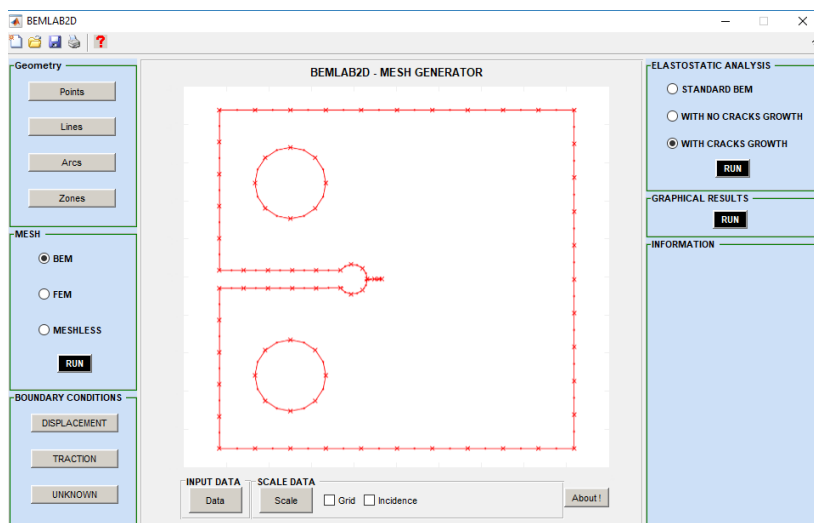


Figura 5 - Modelo bidimensional do corpo de prova CT utilizado nas simulações com o BemCracker2D

A Figura 6 apresenta o gráfico do número de ciclos acumulados na propagação a partir da dimensão $a = 15.5$ mm para a análise feita no FRANC3D por Borges (2010), por Dias (2006) obtidas experimentalmente e os resultados obtidos pelo BemCracker2D. O valor do número de ciclos para a dimensão $a = 33$ mm obtido pelo BemCracker2D foi de $N_f = 9.79 \cdot 10^4$ ciclos. O resultado do FRANC3D para a mesma dimensão foi de $N_f = 9.432 \cdot 10^4$ ciclos e o resultado experimental foi de $N_f = 1.942 \cdot 10^5$ ciclos.

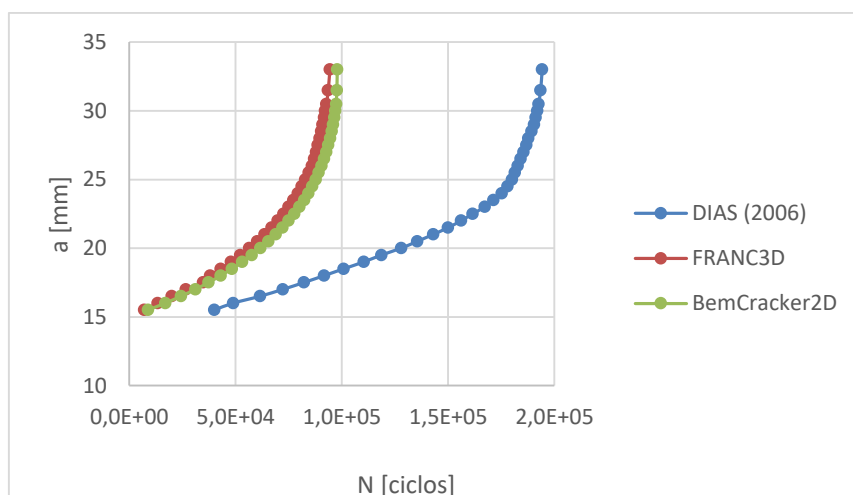


Figura 6 - Gráfico de N (número de ciclos) versus a (comprimento de trinca) para os modelos FRANC3D, Dias (2006) e BemCracker2D

A Figura 7 apresenta o gráfico da variação dos fatores de intensidade de tensão e partir da dimensão $a = 15.5$ mm para a análise feita no FRANC3D por Borges (2010), por Dias (2006) obtidas experimentalmente e os resultados obtidos pelo BemCracker2D. Observou-se uma diferença média entre os valores de ΔK de Borges (2010) e Dias (2006) de aproximadamente 14,17% e de 12,50% entre os resultados do BemCracker2D e Dias (2006).

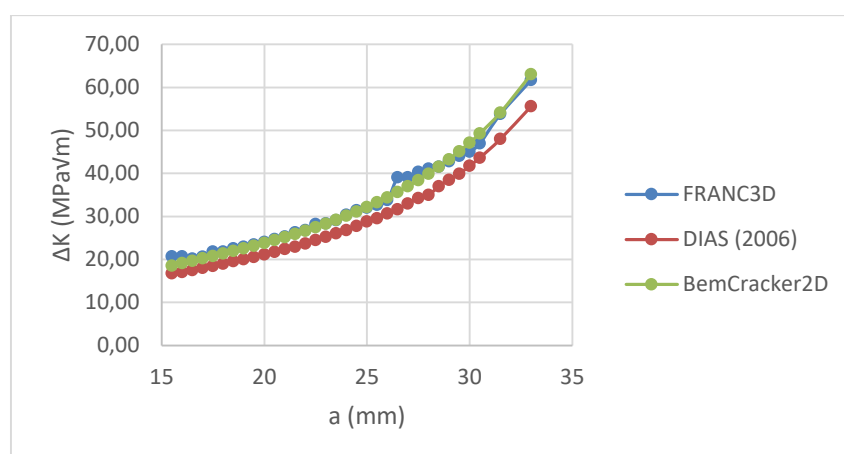


Figura 7 - Gráfico de ΔK (variação do fator de intensidade de tensão) versus a (comprimento de trinca) para os modelos FRANC3D, Dias (2006) e BemCracker2D

Os resultados obtidos numericamente do número de ciclos na dimensão $a = 33$ mm são aproximadamente 2 vezes menores que o valor experimental obtido por Dias (2006). Segundo Borges (2010), uma possível explicação para essa diferença é a provável ocorrência do fenômeno de fechamento de trinca, que foi automaticamente incorporado na pesquisa experimental realizada por Dias (2006). Para considerar essa possível influência do fenômeno de fechamento de trinca nos resultados numéricos, Borges (2010) adotou um fator de correção U proposta por Elber (1970), cujo valor altera os fatores de intensidade de tensão da seguinte forma:

$$\Delta K_{eff} = U \cdot \Delta K \quad (12)$$

Onde U é a relação entre os fatores de intensidade de tensão:

$$U = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} \cong 0.67 + 0.4R \quad (13)$$

Aplicando o fator de correção sugerido por Elber (1970) nos resultados obtidos pelo BemCracker2D, obteve-se um valor de $N_f = 2.02 \cdot 10^5$ ciclos para a dimensão $a = 33$ mm. A Figura 8 apresenta um novo gráfico com a correção proposta por Elber (1970) do número de ciclos acumulados na propagação a partir da dimensão $a = 15.5$ mm.

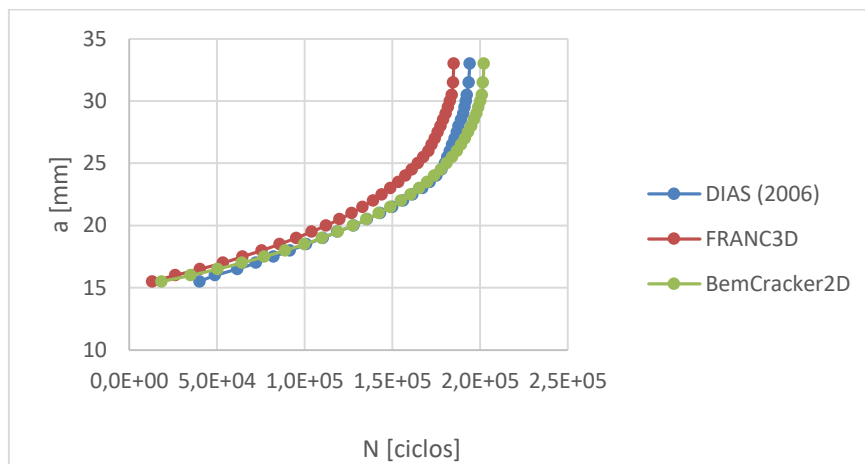


Figura 8 - Gráfico de N (número de ciclos) versus a (comprimento de trinca) para os modelos FRANC3D, Dias (2006) e BemCracker2D considerando o efeito de fechamento de trinca

3.2 Segunda simulação (Boljanovic e Maksimovic, 2011)

O corpo de prova utilizado foi uma placa de alumínio 2024 T3 com uma trinca inicial localizada na borda de um único furo no centro da placa, como ilustrado na Fig. 9, formando um ângulo de 45° em relação ao carregamento. Suas características geométricas são: $a_o = 2$ mm, $r = 10$ mm, $w = 50$ mm, $t = 5$ mm e $L = 200$ mm. O módulo de elasticidade é $E = 71.2$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. A placa é submetida a um carregamento externo de amplitude

constante com valor máximo de $P_{max} = 5.2$ kN e valor mínimo de $P_{min} = 0.52$ kN. A razão entre o carregamento mínimo e máximo é $R = P_{min} / P_{max} = 0.1$.

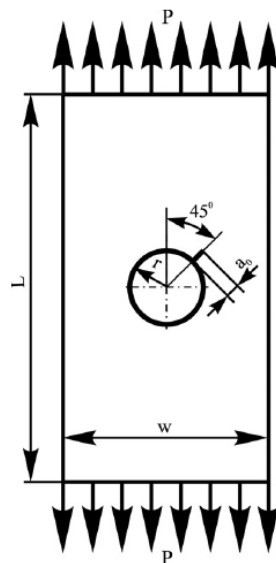


Figura 9 - Dimensões da placa de alumínio (Fonte: Boljanovic e Maksimovic, 2011)

Para análise de propagação, Boljanovic e Maksimovic (2011) consideraram uma alteração na constante de Paris C apresentada por Ma et al. (2006). Em resultados experimentais realizados por Ma et al. (2006), constatou-se que o coeficiente de Paris m se manteve constante em carregamentos em modo misto, porém o coeficiente C variou em função do modo de fratura. Essa influência do modo misto na taxa de propagação pode ser considerada utilizando uma representação aproximada do coeficiente C . Logo, Ma et al. (2006) considerou o coeficiente C^* como função da relação entre os fatores de intensidade de tensão do modo I e modo II:

$$C^* = f(M^e) = C(1 + \beta(M^e - 1)^2) \quad (14)$$

Onde β é uma constante obtida experimentalmente ($\beta = 3$ foi utilizado nesse exemplo). M^e é um parâmetro elástico introduzido por Shih (1974):

$$M^e = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{K_I}{K_{II}} \right| \quad (15)$$

Seu valor varia entre 1 e 0. Para casos de modo I puro, $M^e = 1$; para modo II puro, $M^e = 0$.

Os valores dos coeficientes de Paris considerados são: $C = 2.22 \cdot 10^{-10} \frac{m / \text{ciclo}}{(MPa\sqrt{m})^m}$ e $m = 3.545$.

Para modelagem numérica do problema proposto, Boljanovic e Maksimovic (2011) utilizaram o método dos elementos finitos (MEF) pelo programa MSC/NASTRAN. Utilizaram-se elementos *quarter-point* (Q-P) para malha em torno da trinca e a cada incremento houve mudança na malha. Cada incremento avança em torno de 2 mm da coordenada $(x,y) = (8.48, 8.48)$ em que se localiza a ponta da trinca, tendo como origem do plano cartesiano o centro

do furo da placa. A partir da coordenada $(x,y)=(22.41,7.52)$, a trinca avança 0.3 mm e finalmente sofre um avanço de 2.3 mm, onde ocorre a falha do material na coordenada $(x,y)=(25,7.17)$. O método para definir a direção de propagação foi pela técnica da máxima tensão circunferencial (MTC). Além disso, formulou-se uma expressão polinomial de terceiro grau para encontrar o número de ciclos em pontos de interesse utilizando valores computados pelo MEF de fatores de intensidade de tensão para diferentes extensões de trinca:

$$\Delta K_{eq} = A_3 a^3 - A_2 a^2 + A_1 a - A_0 \quad (16)$$

Onde $A_0 = 0.54 \text{ MPa.m}^{1/2}$, $A_1 = 1257.01 \text{ MPa.m}^{-1/2}$, $A_2 = 100772.16 \text{ MPa.m}^{-3/2}$, $A_3 = 4038712.50 \text{ MPa.m}^{-5/2}$ e a são valores da extensão de trinca em metros. Desta forma, utilizando a Eq. (8) e integrando-a, é possível obter os valores dos números de ciclos.

A representação da malha de elementos finitos para quatro diferentes passos da propagação realizada por Boljanovic e Maksimovic (2011) é ilustrada na Fig. 10.

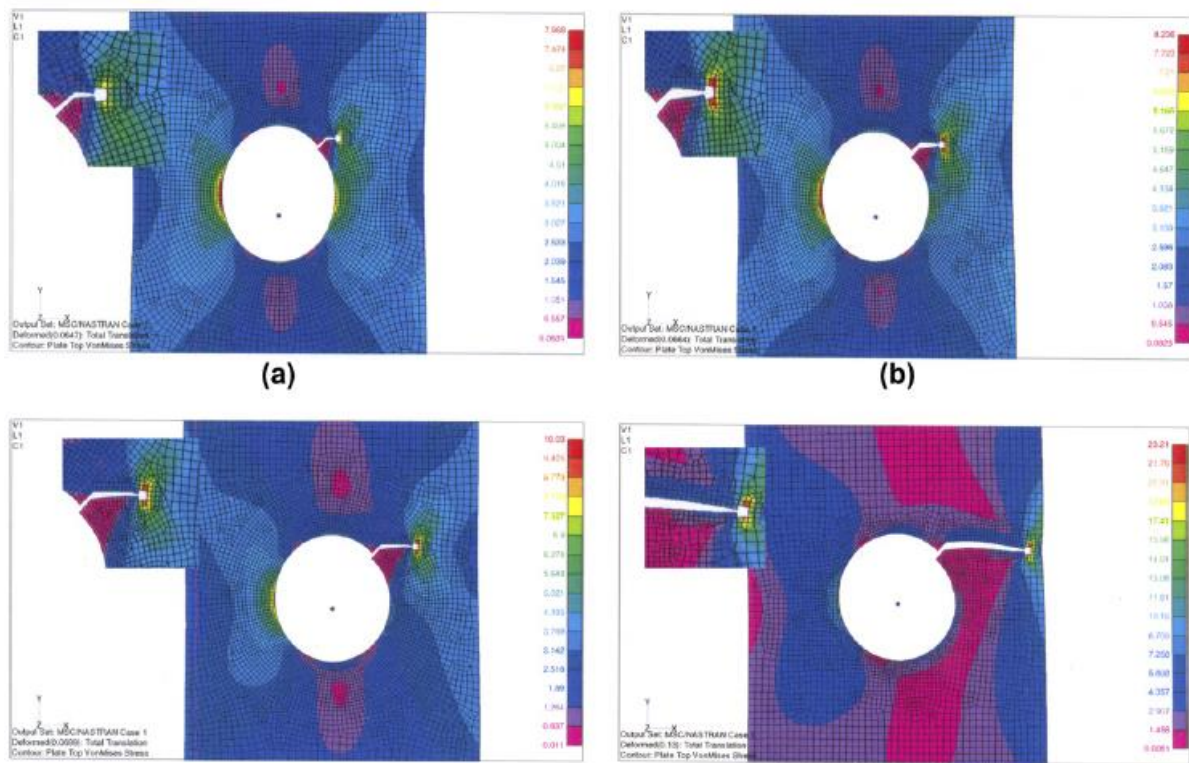


Figura 10 - Malha de elementos finitos para quatro diferentes passos de propagação da simulação (Fonte: Boljanovic e Maksimovic, 2011)

Para realizar a modelagem no BemCracker2D, foi considerado o problema em um plano bidimensional no estado plano de tensão. A trinca propaga até coordenadas muito próximas do contorno, por isso, uma malha melhor refinada nessa região é necessária para se obter bons resultados. O modelo definitivo possui 106 elementos de contorno quadráticos no total. A trinca foi modelada com elementos descontínuos de razão 0.5, 0.3, 0.2 para cada face da trinca. A malha utilizada pode ser observada na Fig. 11.

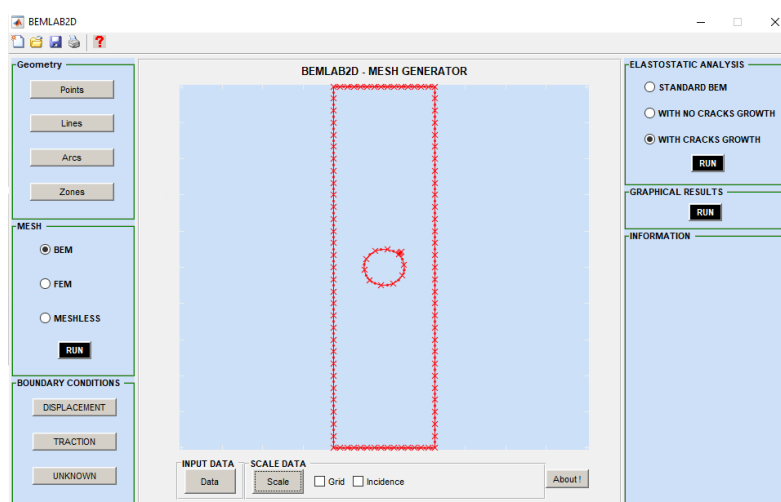


Figura 11 - Modelo bidimensional da placa de alumínio utilizado nas simulações com o BemCracker2D

A Figura 12 ilustra a propagação da trinca obtida por Boljanovic e Maksimovic (2011) via MEF e pelos ensaios experimentais, assim como a propagação da trinca obtida pelo BemCracker2D. O gráfico mostra a posição da trinca em coordenadas cartesianas, tendo como origem o centro do furo da placa de alumínio. A coordenada da ponta da trinca antes da propagação é $(x,y)=(8.48,8.48)$. O valor do ângulo de inclinação do primeiro incremento em relação a trinca inicial foi de -41° obtido pelo BemCracker2D e via MEF, Boljanovic e Maksimovic (2011) encontraram um valor de -42° .

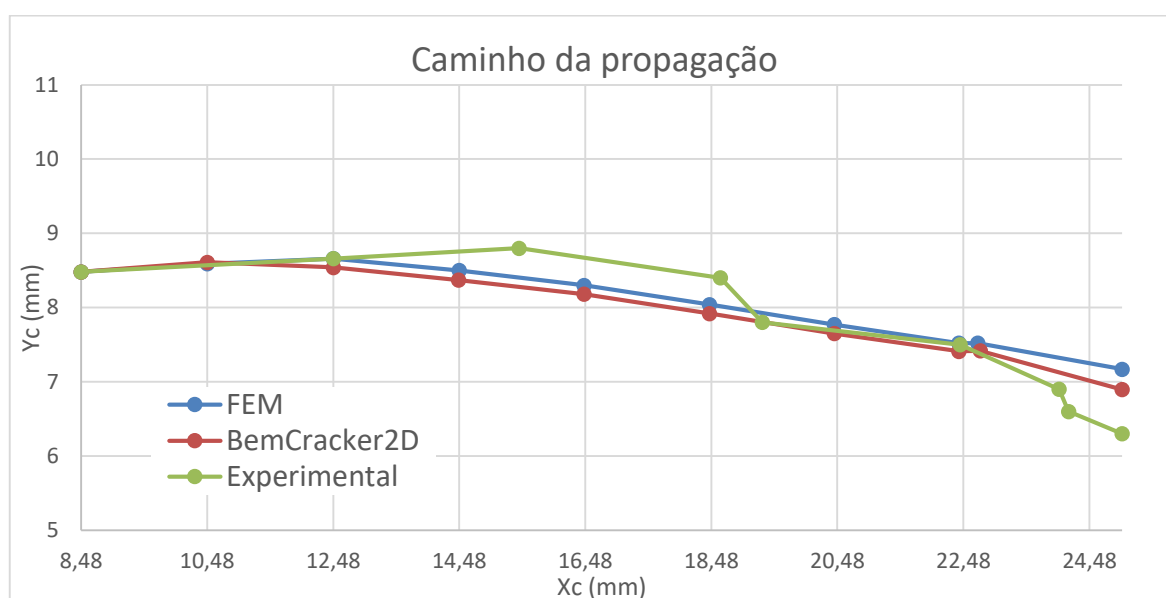


Figura 12 - Propagação da trinca obtida experimentalmente, via MEF e via BemCracker2D

A Figura 13 apresenta o gráfico da variação dos fatores de intensidade de tensão equivalentes, aplicando a Eq. (9), para cada passo de incremento de trinca obtida por Boljanovic e Maksimovic (2011) e pelas simulações feitas via BemCracker2D, sendo utilizados 10 passos no total. Cada passo representa um avanço de aproximadamente 2 mm, com exceção dos dois últimos passos que avançaram 0.3 mm e 2.3 mm, respectivamente. Observou-se uma diferença média entre os valores de ΔK_{eq} de Boljanovic e Maksimovic (2011) e pelo BemCracker2D de aproximadamente 3.3%.

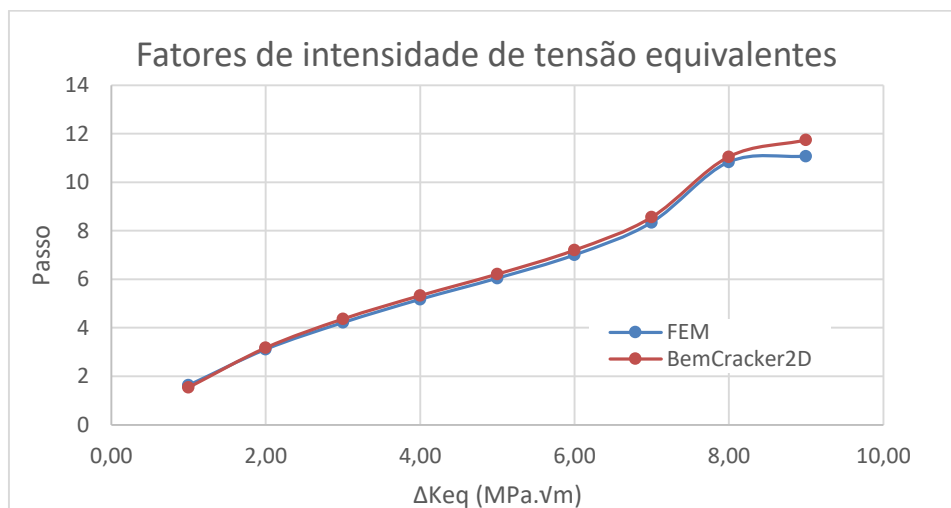


Figura 13 - Fatores de intensidade de tensão equivalentes para cada incremento de trinca obtidas via MEF e via BemCracker2D

A Figura 14 apresenta o número de ciclos para cada incremento de trinca obtido por Boljanovic e Maksimovic (2011), assim como o número de ciclos obtidos pelos valores de ΔK_{eq} via BemCracker2D. Observa-se que os valores foram próximos, devido a diferença entre os fatores de intensidade de tensão equivalentes de 3.3%.

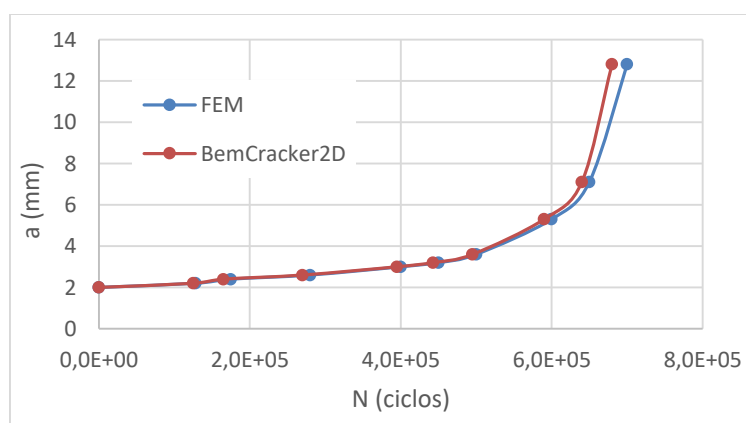


Figura 14 - Número de ciclos para cada incremento de trinca obtidas por Boljanovic e Maksimovic (2011) e pelo BemCracker2D

3.3 Terceira simulação (Ma et al., 2006)

O corpo de prova utilizado foi do tipo CTS em conjunto ao aparelho de aplicação de carregamento para ensaios em modo misto desenvolvido por Richard (1983), como ilustrado na Fig. 15a e Fig.15b. Ma et al. (2006) utilizaram corpos de prova de alumínio 7005 e aço S460. Para as modelagens no BemCracker2D, considerou-se apenas os corpos de prova de aço S460, pois os coeficientes de Paris C e m só foram especificados para este material. Portanto, as propriedades para o aço S460 consideradas para as simulações foram: resistência ao escoamento $f_y = 460$ MPa; resistência última $f_u = 610$ MPa; módulo de elasticidade $E = 200$ GPa; coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Foram realizados ensaios com ângulo de carregamento em 90° , 60° e 30° , sendo o caso de 90° correspondente ao caso de modo I puro, como ilustrado na Fig. 15c.

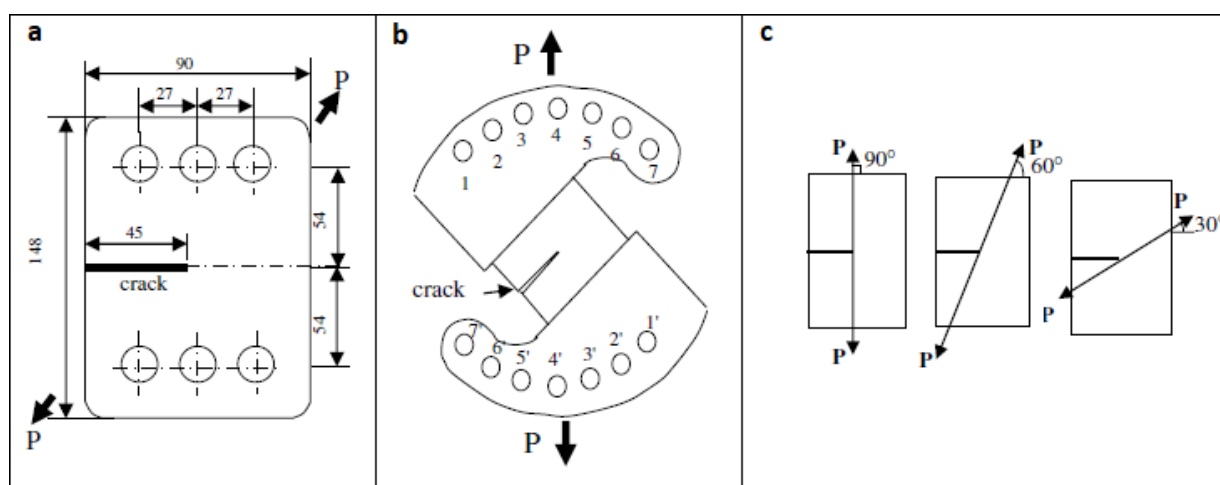


Figura 15 - a) Dimensões do corpo de prova tipo CTS; b) Aparelho de aplicação de carregamento para ensaios em modo misto; c) Ângulos de carregamento

Os corpos de prova foram submetidos a diferentes carregamentos com amplitudes constantes para cada angulação de aplicação de carga considerada, como pode-se observar na Tabela 1. A razão entre o carregamento mínimo e máximo é $R = P_{min} / P_{max} = 0.5$ para os três casos.

Tabela 1 - Carregamentos máximos e mínimos para cada ângulos de carga considerado

Ângulo de carregamento	P_{min} (kN)	P_{max} (kN)
90°	8.0	16.0
60°	9.0	18.0
30°	10.4	20.8

Para análise de propagação, Ma et al. (2006) considerou a taxa de propagação proposta por Tanaka (1974) apresentada na Eq. (8). O coeficiente de Paris corrigido C^* para análises em modo misto também foi considerado nas simulações, como apresentado na Eq. (14). Os valores

dos coeficientes de Paris considerados são: $C = 7.10 \cdot 10^{-8} \frac{\text{mm/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{m})^m}$ e $m = 2.1$. Cada incremento teve um avanço de 2 mm para os três casos considerados (90° , 60° e 30°), avançando 20 mm no total ($a_i = 45$ mm até $a_f = 65$ mm).

Após os ensaios experimentais, Ma et al. (2006) realizou simulações numéricas no software CASTEM 2000, baseado em MEF. A malha é apresentada na Fig. 16a e Fig. 16b.

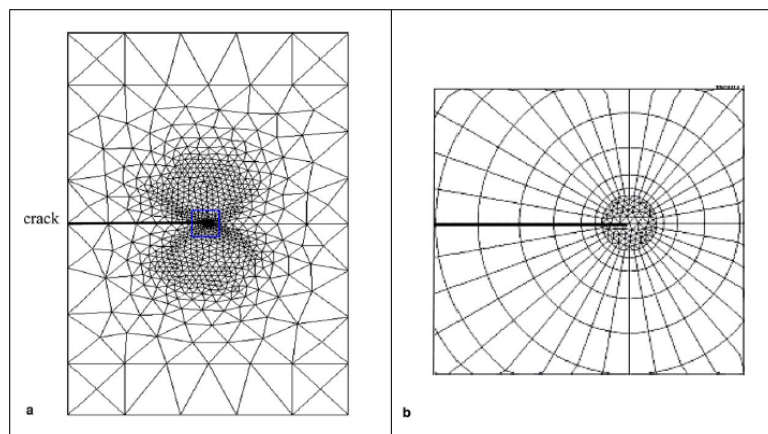


Figura 16 - a) Malha de MEF do corpo de prova CTS; b) Malha nas proximidades da trinca (Fonte: Ma et al, 2006)

Para realizar as modelagens no BemCracker2D, foi considerado o problema em um plano bidimensional no estado plano de tensão. O modelo sofreu alterações para cada ângulo de carregamento aplicado até o modelo definitivo que possui 136 elementos de contorno quadráticos no total. A trinca foi modelada com elementos descontínuos de razão 0.5, 0.3, 0.2 para cada face da trinca. A malha utilizada pode ser observada na Fig. 17.

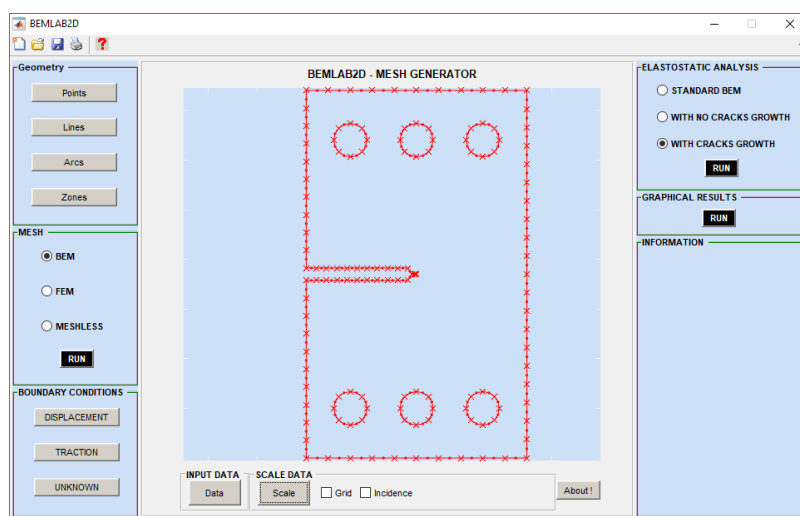


Figura 17 – Malha do corpo de prova CTS utilizado nas simulações do BemCracker2D

A Figura 18a apresenta o gráfico da variação dos fatores de intensidade de tensão para o caso de carregamento em 90° (modo I puro). Observou-se uma diferença média entre os valores de ΔK_{eq} de Ma et al. (2006) e pelo BemCracker2D de aproximadamente 1.4%. A Figura 18b apresenta o gráfico do número de ciclos para cada incremento de trinca em comparação aos resultados obtidos via MEF e experimentalmente por Ma et al. (2006).

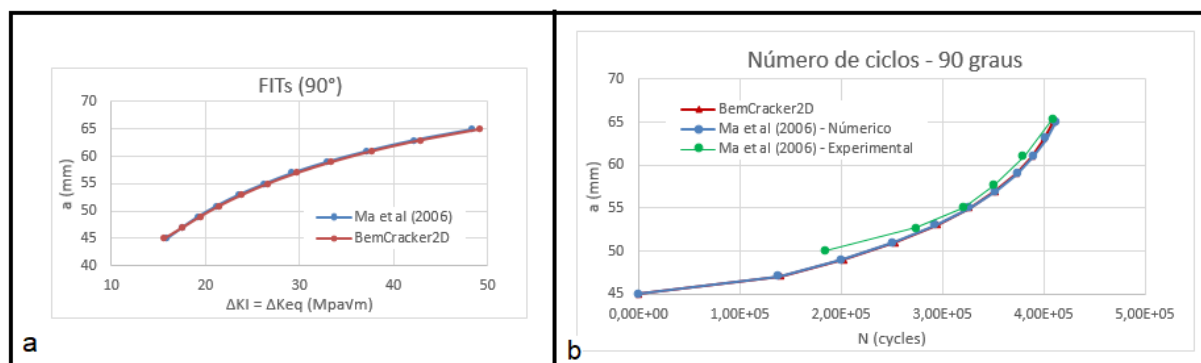


Figura 18 - a) Variação dos fatores de intensidade de tensão para modo I puro; b) Número de ciclos para o modo I puro

A Figura 19a e 19b apresentam os gráfico da variação dos fatores de intensidade de tensão para o caso de carregamento em 60° e 30°, respectivamente. Observou-se uma diferença média entre os valores de ΔK_{eq} de Ma et al. (2006) e pelo BemCracker2D de aproximadamente 3.9% para o caso de carga inclinada em 60° e 7.3% para o caso de carga em 30°.

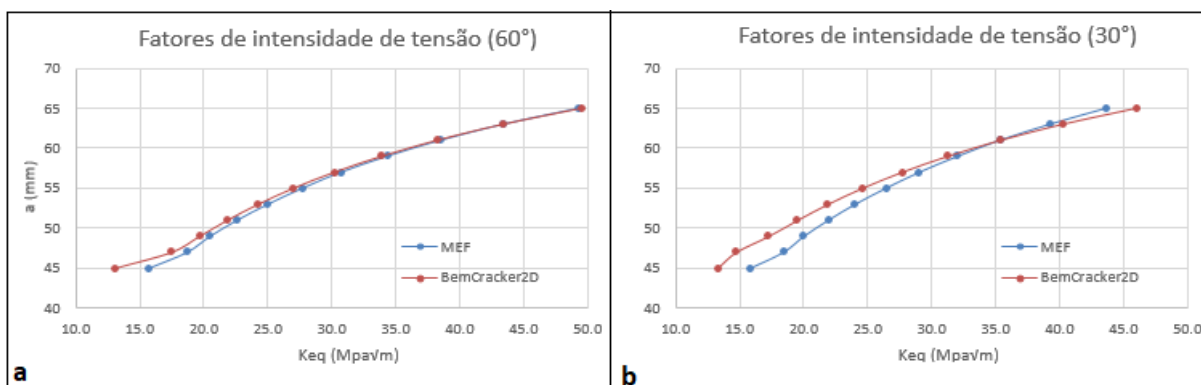


Figura 19 - a) Variação dos fatores de intensidade de tensão para a carga inclinada em 60°; b) Variação dos fatores de intensidade de tensão para a carga inclinada em 30°

Os valores dos ângulos de inclinação do primeiro incremento em relação a trinca inicial para os casos de ângulos de carregamento em 60° e 30° graus são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Valores da direção de propagação obtida experimentalmente e via BemCracker2D

Ângulo de carregamento	60°	30°
Experimental	26°	45°
BemCracker2D	29°	51°

4 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Neste trabalho, três exemplos retirados da literatura foram utilizados para simular numericamente propagações de trinca via BemCracker2D e BemLab2D, baseado no método dos elementos de contorno dual, apresentando comparações entre resultados numéricos e experimentais.

No caso do exemplo proposto por Borges (2010), observa-se que a diferença média dos fatores de intensidade de tensão obtidos pelo BemCracker2D e Franc3D foi de aproximadamente 2.64%, após a aplicação do fator de correção proposto por Elber (1970). A diferença média entre o número de ciclos final N_f obtido experimentalmente por Dias (2006) e por Borges (2010) foi de aproximadamente 4.8%, enquanto a diferença média entre o experimental e o BemCracker2D foi de 4%.

No exemplo proposto por Boljanovic e Maksimovic (2011), a diferença média entre os fatores de intensidade de tensão foi de 3.3%. O ângulo de inclinação inicial da propagação adquirido pelas simulações de Boljanovic e Maksimovic (2011) foi de -42° e via BemCracker2D foi de -41°. A diferença média entre o número de ciclos final N_f obtido por Boljanovic e Maksimovic (2011) e BemCracker2D foi de aproximadamente 1.4%.

Na última simulação utilizando o exemplo de Ma et al. (2006), a diferença média entre os fatores de intensidade de tensão no caso de carga inclinada em 90°, 60° e 30° foi de 1.4%, 3.9% e 7.3%, respectivamente. O ângulo de inclinação inicial da propagação adquirido pelos ensaios experimentais para os casos de carga inclinada em 60° e 30° foram de 26° e 45°, respectivamente. Os ângulos obtidos via BemCracker2D foram de 29° para o caso de carga inclinada em 60° e 51° para o caso de carga inclinada em 30°. A diferença média entre os números de ciclos finais N_f obtidos experimentalmente e numericamente por Ma et al. (2006) para o caso de carregamento em 90° foi de aproximadamente 4.78%, enquanto a diferença média entre o experimental e o BemCracker2D foi de 5.36%.

Em uma visão geral dos resultados aqui apresentados, obteve-se resultados muito próximos das simulações numéricas e ensaios experimentais retirados da literatura, em alguns casos, até mesmo melhores se comparados com os resultados experimentais apresentados por Borges (2010). Apesar das correções realizadas para modo misto (correção do coeficiente de Paris C) e a correção nos fatores de intensidade de tensão proposta por Elber (1970) para considerar o efeito de fechamento de trinca, estas são de fácil implementação no software, uma vez que são correções feitas nos resultados gerados pelo BemCracker2D. Por fim, os resultados mostram que, apesar da simplificação do processo de modelagem numérica devido a técnica dos elementos de contorno dual, o conjunto BemCracker2D e BemLab2D para análises de propagação de trinca em modo misto é extremamente eficaz.

REFERÊNCIAS

- Bannantine, J. A., Comer, J. J., Handrock, J. L.. *Fundamentals of metal fatigue analysis*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990, 273 p.
- Blandford, G.E., Ingrassia, A.R., Liggett, A.J., *Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v 17, 1981, pp.387-404.
- Boljanovic, S., Maksimovic, S., *Analysis of the crack growth propagation process under mixed-mode loading*. Engineering Fracture Mechanics: An International Journal, Sérvia, v. 78, p.1565-1576, 2011.
- Borges, M.L.M., *Análise de propagação de trincas por meio da mecânica da fratura*. Belo Horizonte. 178p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, UFMG – Minas Gerais, 2010.
- Delgado Neto, A.M., Gomes, G., Guimarães, D.C., *BEMLAB2D: GUI Modeling, Visualization and Analysis with Boundary Element – Na Application in Elastostatic Problems*, XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2016, Brasília, Brasil.
- Dias, J.F.. *Estudo do comportamento à fadiga de elementos estruturais e de máquinas em ferro fundido nodular austemperado (ADI) sujeito a carregamentos de amplitude variável*. Tese (Doutorado em engenharia de estruturas). Belo Horizonte: UFMG, 2006. 122 p.
- Elber, W.. *The significance of fatigue crack closure in damage tolerance in aircraft structures*. ASTM STP 486, American Society for Testing and Materials. Philadelphia, 1971, pp. 230-242.
- Erdogan, F., Sih, G.C., *On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear*, Journal of Basic Engineering, v 85, 1963, pp.519-527.
- Gomes, G., Delgado Neto, A.M., Wrobel L.C., *Modelagem e Visualização de Trincas 2D usando Equação Integral de Contorno Dual*, XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE 2016, Brasília, Brasil.
- Ma, S., Zhang, X.B., Recho, N., Li, J., *The mixed-mode investigation of the fatigue crack in CTS metallic specimen*. International Journal of Fatigue, China, v. 28, p.1780-1790, 2006.
- Paris, P.C., Erdogan, F., *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*, Journal of Basic Engineering, v 85, 1960, pp.528-534.
- Portela, A., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., *The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v 33, 1992, pp.1269-1287.
- Rice, J.R., *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, Journal of Applied Mechanics, v 35, 1968, pp.379-386.
- Richard, H.A., *Examination of brittle fracture criteria for overlapping mode I and mode II loading applied to cracks*. Application of fracture mechanics to materials and structures, 1983, pp. 309-316.
- Shih, C.F., *Small-scale yielding analysis of mixed plane strain crack problem*. ASTM STP 560, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1974, pp 187-210.
- Tanaka, K., *Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis*. Engineering Fracture Mechanics: An International Journal, Japão, v. 6, p.493–507, 1974.