



MÉTODO BASEADO EM ENSEMBLE COM REFINAMENTO PARA OTIMIZAÇÃO DE INJEÇÃO DE ÁGUA

Juan Alberto Rojas Tueros

Bernardo Horowitz

Ramiro Brito Willmersdorf

albert_rojast@hotmail.com

horowitz@ufpe.com.br

ramirowillmersdorf@net.com

Universidade Federal de Pernambuco.

Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, 50740530, Pernambuco, Recife, Brasil.

Resumo, O problema de determinar a vazão do ciclo de vida para os poços produtores e injetores que maximizam o Valor Presente Líquido (VPL) sujeito a restrições de capacidade de poço e campo é resolvido usando o algoritmo programação quadrática sequencial. O vetor gradiente é aproximado usando o método baseado em ensemble. Técnicas de refinamento são utilizadas para eliminar o efeito das correlações espúrias e melhorar a eficiência do processo de otimização. As variáveis de controle são as vazões de cada poço. O VPL do campo é decomposto como a soma de VPL de cada poço. A matriz de sensibilidade do VPL de poços com respeito aos controles de todos os poços é obtida do produto entre a matriz pseudo inversa do ensemble e a covariância cruzada. Por razões de eficiência, o tamanho do ensemble deve ser mantido pequeno, o que resulta em erros de amostragem. Como as matrizes de covariância são afetadas por correlações espúrias, são necessárias técnicas de regularização e localização não baseadas na distância para melhorar a qualidade da matriz de sensibilidade. O vetor gradiente aproximado é a soma das colunas do refinamento da matriz de sensibilidade. Dois reservatórios realistas extraídos da literatura são usados para demonstrar a eficiência das técnicas de refinamento. Usar os refinamentos propostos mostram ganhos de até 31% em comparação com a técnica sem refinamento.

Palavras chaves: Refinamento, Otimização de injeção de água, Método baseado em ensemble, Otimização restrita.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é determinar as vazões de controle para poços produtores e injetores que maximizem o VPL sujeito a restrições a nível de poço e campo, utilizando o algoritmo de programação quadrática sequencial (*Sequential Quadratic Programming SQP*). As restrições são impostas para garantir a viabilidade física da solução, que não viole as práticas da engenharia. Para a otimização de produção em reservatórios de petróleo as técnicas mais eficientes utilizam o cálculo do gradiente da função envolvida com respeito às variáveis de controle.

O vetor gradiente da função objetivo é eficientemente calculado usando o método adjunto, que requer unicamente duas simulações, independentemente do número de variáveis (Brouwer e Jansen, 2004; Jansen, 2011). Porém, a implementação do método é trabalhosa e requer acesso ao código do simulador, o que em geral não é possível em simuladores comerciais. O cálculo numérico do gradiente por diferenças finitas é inviável quando o número de variáveis é grande. Então, uma possível alternativa é a do cálculo aproximado do gradiente.

Lorentzen et al. (2006) e Nwaozo, (2006) apresentaram a técnica estocástica baseada em ensemble, onde se utiliza o vetor de covariância cruzada na determinação da direção de busca no método de maior aclave, fazendo o papel do gradiente. Esta aproximação é fácil de programar e é independente do simulador de reservatório. Na última década, o método tem alcançado grande acolhida na tomada de decisões sendo amplamente estudado para resolver problemas de otimização irrestrita (EnOpt) (Chen et al. 2009; Chaudhri et al., 2009; Asodollahi e Naevdal, 2009; Su e Oliver, 2009; Sarma e Chen 2014; Fonseca et al., 2015; Fonseca et al., 2016; Chen e Reynolds, 2016). Utilizando o cálculo aproximado do gradiente baseado em ensembles (Dehdari e Oliver, 2012; Dehdari et al., 2012; Alim, 2013; Tueros et al., 2015, Tueros et al, 2016) resolveram problemas de otimização restrita através da aplicação de algoritmos de programação não linear de propósito geral. Estudos teóricos sobre as propriedades dos gradientes aproximados foram desenvolvidos por Do e Reynolds (2013) e por Stordal et al. (2016), especificamente para métodos baseados em ensembles. Jafroodi e Zhang, (2011), apresentaram o método baseado em ensemble para ajuste de histórico e otimização conjunta baseado no modelo de capacitância e resistência.

Apesar da qualidade do vetor gradiente aproximado aumentar com o número de componentes do ensemble, é essencial utilizar o menor número possível de membros para garantir a eficiência dos métodos baseados em ensembles. A utilização de ensembles com poucos componentes permite a obtenção do vetor gradiente aproximado rapidamente, mas de baixa qualidade devido à introdução de correlações espúrias no vetor de covariâncias cruzada entre o VPL e os controles.

Correlações espúrias e regularizações são tratadas por Chen e Oliver, (2012) através da função de localização extrema, mantendo apenas as covariâncias entre completações distintas de cada poço produtor. A direção de busca é obtida através de sucessivas multiplicações da matriz de covariância a priori pelo vetor de covariância cruzada, o que resulta na sua suavização, evitando-se mudanças bruscas nos controles ao longo de tempo. Restrições a nível de poço e reservatório não são diretamente levadas em consideração pelo otimizador. Chen e Oliver, (2012) não levam em conta a diferença de conectividade entre poços injetores e produtores nem o grau de competitividade entre produtores pela mudança de pressão do reservatório.

Dehdari e Oliver, (2012) impõem restrições a nível de poço e utilizam gradientes aproximados através de ensemble com as mesmas técnicas de regularização de Chen e Oliver, (2012) para minoração dos problemas devido a correlações espúrias. Além disso os diferentes

níveis de conectividade entre injetores e produtores e graus de competitividade entre produtores não são levados em consideração na minoração da influência de correlações espúrias na qualidade do vetor gradiente aproximado.

Neste trabalho a conectividade entre produtores e injetores é levada em consideração incorporando informações tais como presença de falhas ou regiões de baixa permeabilidade entre os dois tipos de poços. Além disso, é também avaliado o grau de competitividade entre produtores pelo fluido resultante da mudança de pressão no reservatório. Estas informações permitem o refinamento da matriz de sensibilidade da função objetivo de cada poço em relação ao vetor de controles de todos os poços. Com isto, é obtido o gradiente da função objetivo do campo com relação aos controles de melhor qualidade, melhorando assim o desempenho dos algoritmos de otimização baseado em gradientes.

A conectividade entre poços é avaliada através do modelo de capacitância e resistência (Yousef, (2006) e Sayarpour, (2008)). As conectividades assim calculadas são utilizadas na depuração das correlações espúrias da matriz de sensibilidade através do produto Schur por uma função de localização proposta. Já o grau de competitividade entre produtores é avaliado através de análise simplificado de *Interference Test* de poços cujo resultado também é utilizado no refinamento da matriz de sensibilidade.

O vetor gradiente refinado como resultado de operações acima permite obter resultados significativamente melhores que aqueles obtidos sem refinamento para ensembles com pequeno número de componentes melhorando a eficiência da recuperação do fluido. Dois exemplos são apresentados que demonstram o potencial das técnicas de refinamento sugeridas para os métodos de otimização baseados em ensemble.

1 PROBLEMA DA INJEÇÃO DE ÁGUA

O problema de injeção de água pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } \text{VPL} = f(\mathbf{q}) &= \left[\sum_{t=1}^{N_t} \frac{1}{(1+d)^{\tau_t}} CF(\mathbf{q}_t) \right] \\ \text{sujeito a : } \sum_{w \in P} q_t^w &\leq Q_{l,max}, \quad t = 1 \dots N_t \\ \sum_{w \in I} q_t^w &\leq Q_{inj,max}, \quad t = 1 \dots N_t \\ q_t^{w,l} &\leq q_t^w \leq q_t^{w,u}, \quad t = 1 \dots N_t, \quad w = 1 \dots N_w \end{aligned} \quad (1)$$

Onde I = conjunto de índices para os N_I injetores, P = conjunto de índices para os N_P produtores, com $N_I + N_P = N_w$. O período de concessão é subdividido em N_t ciclos de controles, $\mathbf{q} = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_{N_t}^T]^T$ é o vetor das vazões para todos poços, N_w , em todos ciclos de controle, N_t ; $\mathbf{q}_t = [q_t^I, q_t^P, \dots, q_t^{N_w}]^T$ é o vetor das vazões de poços no ciclo de controle t ; q_t^w = vazão líquida de todos os poços w no ciclo de controle t . Na função objetivo d é a taxa de desconto e τ_t = tempo no ciclo de controle t . $Q_{l,max}$ = vazão de produção líquida máxima

permitida e $Q_{inj,max}$ = vazão de injeção líquida máxima permitida no campo. Os índices l e u representam o limite inferior e superior das variáveis de controle.

O fluxo de caixa no ciclo de controle, t , representa o custo de óleo menos o custo de água injetada e produzida, dado por:

$$CF(q_t) = \Delta\tau_t \left[\sum_{w \in P} (r_o q_t^{w,op} - c_{wp} q_t^{w,wp}) - \sum_{w \in I} (c_{wi} q_t^w) \right] . \quad (2)$$

Onde $\Delta\tau_t$ = intervalo de tempo do ciclo de controle t ; P e I são o conjunto de poços produtores e injetores, respectivamente. $q_t^{w,op}$; $q_t^{w,wp}$ = vazão de óleo e água produzida no produtor w no ciclo de controle t , respectivamente; r_o = preço de óleo, c_{wp} e c_{wi} = custo da produção e injeção de água (Horowitz, et al., 2013). Os índices, op e wp , denotam as faces óleo e água respectivamente.

As variáveis de controles são as vazões de cada poço em cada ciclo de controle. As vazões dos poços são normalizadas pela máxima vazão permitida no campo.

$$x_t^w = \frac{q_t^w}{Q_{l,max}}, \quad w \in P; \quad x_t^w = \frac{q_t^w}{Q_{inj,max}}, \quad w \in I . \quad (3)$$

As variáveis de controle, x_t^w , são as vazões alocadas para cada poço w no ciclo de controle t . Para este trabalho é considerada a seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \text{Maximize NPV} &= f(x) = \left[\sum_{t=1}^{N_t} \frac{1}{(1+d)^{t_t}} CF(x_t) \right] \\ \text{sujeito a: } &\sum_{w \in P} x_t^w \leq 1, \quad t = 1 \dots N_t \\ &\sum_{w \in I} x_t^w \leq 1, \quad t = 1 \dots N_t \\ &x_t^{w,l} \leq x_t^w \leq x_t^{w,u}, \quad t = 1 \dots N_t, \quad w = 1 \dots N_w \end{aligned} \quad (4)$$

O cálculo do VPL, requer uma completa execução do simulador de reservatórios que demanda um grande esforço numérico.

2 CÁLCULO DO VETOR GRADIENTE

Os métodos de otimização baseado em gradientes são os mais eficientes, tanto em termo do valor da função objetivo na solução, como no número de simulações necessárias. Os simuladores comerciais, em geral, não dispõem de cálculo dos gradientes. O cálculo numérico das derivadas por diferenças finitas resulta em um alto custo computacional devido ao número de simulações necessárias. Uma alternativa viável é adoção do vetor gradiente aproximado. As vantagens são a redução do número de simulações e o uso do simulador como uma caixa preta sem necessidade de intervenção do código fonte. Este método fornece uma aproximação não

local sobre o espaço gerado pela adoção do ensemble de realizações das variáveis de controle (Chen e Oliver, 2012). Portanto, necessitamos gerar diferentes realizações que são simuladas para calcular o VPL de cada realização.

Os seguintes passos são usados para criar o ensemble de realizações dos controles correlacionadas no tempo (Dehdari e Oliver, 2012; Su e Oliver, 2012, Tueros et al., 2016):

- 1.- Usar a função de covariância Gaussiana para gerar a matriz de covariância a priori, C , para as variáveis de controle, evitando mudanças abruptas com o tempo.
- 2.- Calcular a decomposição de Cholesky da matriz de covariância, $LL^T=C$.
- 3.- Informar os valores iniciais dos controles para perturbar, $x_0 \in R^N$ (Isto é unicamente informado na primeira iteração, para as seguintes iterações são usados os pontos ótimos de iterações prévias).
- 4.- Adotar uma desvio padrão para produzir perturbações sobre as variáveis de controle, δ , (Esta perturbação é a percentagem da diferença entre os limites inferiores e superiores).
- 5.- Criar um vetor de variáveis aleatórias independentes com média zero e variância um, Z ;
- 6.- A realização $xr \in R^{N_x}$ é dada por:

$$xr = x_0 + \delta LZ \quad (5)$$

Neste trabalho, as realizações das variáveis de controle satisfazem todas as restrições. São usados truncamentos para impor os limites inferior e superior sobre as variáveis e também sobre a capacidade máxima da injeção e produção.

A matriz $X \in R^{N_x \times N_e}$ contém o conjunto de todas as realizações viáveis.

$$X = \begin{bmatrix} xr_1 & \cdots & xr_{N_e} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde N_x = número de variáveis de controle; N_e = tamanho do ensemble.

A matriz de covariância baseada em ensemble $C_{xx} \in R^{N_x \times N_x}$ é dada por:

$$C_{xx} = AA^T; \quad A = \sqrt{\frac{1}{N_e - 1}} \Delta X, \quad \text{com } \Delta X = X - \bar{X}, \quad (7)$$

onde $\bar{X}$ = vetor média de todas as realizações e ΔX = matriz de desvios da média do ensemble. O ensemble baseado na matriz de covariância cruzada entre o VPL do campo e controles é dado por:

$$C_{xf} = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (xr_i - \bar{xr})(f_i - \bar{f}), \quad \text{com } \bar{xr} = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} xr_i, \quad (8)$$

onde $\bar{f}$ = media do VPL dos membros do ensemble. O gradiente aproximado baseado em ensemble é o produto da matriz pseudo inversa e do vetor covariância cruzada (Chen, 2008).

$$g = C_{xx}^{-1} C_{xf} . \quad (9)$$

No processo de otimização um grande número de variáveis é envolvido e a matriz de covariância de muitas delas com o VPL do campo é pequena. Manter estes valores dificulta a acurácia no cálculo baseado sobre ensemble com poucos membros devido à introdução de correlações espúrias. A correlação do VPL de um dado poço com seu próprio controle é mais forte e, portanto, mais acessível para o cálculo com ensemble de menor tamanho (Chen e Oliver, 2012). Para reduzir as correlações espúrias o VPL do campo é decomposto como a soma do VPL de cada poço. Logo é possível calcular a matriz de covariância cruzada do VPL de cada poço com respeito a todos os controles, $C_{xf_w} \in R^{N_x \times N_w}$, possivelmente dominado por correlações espúrias quando o tamanho do ensemble é pequeno. A matriz de sensibilidade dos VPL's dos poços com respeito aos controles pode ser estimada por (Chen e Oliver, 2012):

$$S_{xf_w} = C_{xx}^{-1} C_{xf_w} . \quad (10)$$

Com o objetivo de simplificar a notação para discussões futuras, a matriz de sensibilidade para cada ciclo de controle é particionada como segue:

$$S_{xf_w} = \begin{bmatrix} S_{x_P f_P} & S_{x_I f_P} \\ S_{x_P f_I} & S_{x_I f_I} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

onde, $S_{x_P f_P}$ e $S_{x_I f_P}$, são as sub-matrizes do VPL's de poços produtores com respeito aos controles dos produtores e injetores, respectivamente. Da mesma maneira, $S_{x_P f_I}$ e $S_{x_I f_I}$, correspondem a sensibilidade do VPL de poços injetores.

O vetor gradiente é a soma das colunas da matriz de sensibilidade. A acurácia da matriz de sensibilidade depende da quantidade de membros do ensemble. Incrementar os membros do ensemble melhora a qualidade da matriz de sensibilidade, mas aumenta o número de execuções do simulador.

Para ilustrar os pontos apresentados na matriz, apresentamos a seguir, como exemplo ilustrativo, um modelo sintético de duas fases com falha selante (ver Fig. 1) (Cao et al., 2014), onde a permeabilidade, porosidade e transmissibilidade são nulas, dividindo o reservatório em dois compartimentos. Um compartimento contém dois produtores suportados por um injetor, e outro tem quatro injetores e dois produtores. Todos os poços são verticalmente completados em todas as camadas. A vazão de produção tem restrição mínima e máxima de 500 e 1500 bbl/dia, respectivamente. O injetor I-2 tem uma vazão mínima de 1800 e máxima de 2750 bbl/dia. Os outros injetores podem operar entre 540 e 1100 bbl/dia. A restrição máxima do campo para a produção total é 5000 bbl/dia e 6000 bbl/dia para injeção total. O modelo tem cinco camadas e 33x33 células ativas; permeabilidade constante de 200 mD; porosidade de 20%, pressão inicial 1250 psi, para outras características ver Cao et al, (2014).

Pode ser visto facilmente, a partir do modelo, que o injetor I-2 influi fortemente na produção dos poços produtores P-1 e P-3. Claramente, o injetor I-2 não afeta os produtores P-2 e P-4 do lado oposto da falha. Da mesma forma, o injetor I-3 influi na produção de P-2 e P-4 e não afeta

os produtores P-1 e P-3. O produtor P-1 compete unicamente pelo fluido com o produtor P-3 e não com os produtores P-2 e P-4, ambos do outro lado da falha.

Para melhorar o entendimento e acurácia da matriz de sensibilidade entre VPL dos poços e variáveis de controle comparamos aproximações obtidas por diferenças finitas e o método baseado em ensemble para o injetor I-3 e produtor P-1. O ensemble consiste de quatro realizações, o tempo de vida do reservatório são 32 anos com um único ciclo de controle e o número total de variáveis de controle são 9 (quatro produtores e cinco injetores). Os controles são normalizados usando a Eq. (3).

Figs. 2(a) e (b) mostram o comportamento da sensibilidade do injetor I-3 com respeito aos controles, por diferenças finitas e pelo método baseado em ensemble, respectivamente. Daqui em diante a bolha de cor azul mostra correlação positiva, e a de cor rosa representa a correlação negativa. O diâmetro das bolhas é diretamente proporcional ao valor da sensibilidade.

Fig. 2(a) mostra uma forte influência negativa da vazão de injeção de I-3 sobre seu próprio VPL, isto porque o VPL de qualquer injetor é sempre negativo. A sensibilidade com respeito a outros controles é nula. Isto significa que qualquer mudança nos controles de outros poços produtores e injetores não afeta o VPL do poço I-3. Fig. 2(b) mostra uma forte sensibilidade negativa entre I-3 e seu próprio controle. Também valores nulos com respeito a outras variáveis de controle que são atribuídas de correlações espúrias no método baseado em ensemble, que necessitam ser negligenciadas.

Fig. 3(a) mostra a sensibilidade do VPL do produtor P-1 calculado por diferenças finitas. O VPL do P-1 com sua própria variável tem correlação positiva. A correlação entre o VPL do P-1 e o controle do injetor I-2 é negativa. A correlação entre o VPL de P-1 e injetor I-2 é negativo. A correlação entre os produtores P-1 e P-3 é positiva. O produtor P-3 compete pelo fluido com o produtor P-1, causando perda de pressão pela retirada do fluido do compartimento. Os controles dos poços do lado oposto da falha não apresentam nenhum tipo de correlação com o produtor P-1. Fig. 3(b) mostra a sensibilidade baseada em ensemble do VPL do produtor P-1. Valores da sensibilidade com respeito a controles de P-3 e I-1 são próximas às obtidas por diferenças finitas. Por outro lado, Fig. 3(b) também mostra valores não nulos com respeito a controles de poços opostos pela falha, o que não tem sentido.

Neste trabalho, propomos uma metodologia para diminuir o tamanho do ensemble, reduzir o efeito das correlações espúrias sobre a matriz de sensibilidade através de refinamento e por consequência, melhorar a qualidade do vetor gradiente.

3 TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO E LOCALIZAÇÃO

Nesta seção, discutimos com detalhes as técnicas de regularização e localização proposta para o refinamento da matriz de sensibilidade.

3.1 Regularização do VPL de poço injetores

Na Fig. 2(a) podemos observar que o VPL de poços injetores não é afetado pelos controles dos produtores. Por esta razão, o procedimento de regularização é utilizado para eliminar estes termos:

$$\mathbf{S}_{x_I f_P}^{reg} = 0. \quad (12)$$

Assumimos que não existem problemas de injetividade, portanto o VPL dos injetores é unicamente afetado por seus próprios controles. A sub-matriz é, portanto, diagonalizada:

$$\underline{S}_{x_I f_I}^{reg} = \begin{bmatrix} S_{x_{I_1} f_{I_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_{x_{I_2} f_{I_2}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{x_{N_I} f_{I_{N_I}}} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Após a regularização é claro que a Fig. 2(b) é modificada e virtualmente idêntica a Fig. 2(a).

3.2 Técnicas de Localização para o VPL de produtores

Nesta seção discutimos a técnica de localização proposta para reduzir o efeito das correlações espúrias considerando a conectividade entre injetores e produtores, assim como também fatores de competitividade entre produtores que competem pelo fluido.

3.2.1 Sensibilidade do VPL de produtores devido a controles de injetores

Chen e Oliver, 2012 propuseram a técnica de localização para melhorar a sensibilidade do VPL de cada poço produtor com respeito aos controles dos outros produtores, afirmando que nenhuma dessas operações poderia ser realizada nos termos correspondentes aos controles dos injetores porque a influência da injeção nos produtores tem efeitos globais. Isso, no entanto, não se aplica no caso da existência de falhas ou regiões de baixa permeabilidade entre produtores e injetores. Para quantificar a comunicação entre pares de poços injetores e produtores propomos aplicar o modelo de capacitância e resistência entre pares de poços (CRMP).

O CRMP (Sayarpour, 2009) divide o reservatório em uma serie de volumes de controle baseado em cada poço produtor e inclui todos injetores que influem na vazão de produção. O modelo CRMP considera uma constante de tempo, τ , para capturar o tempo de atraso e atenuação do sistema de resposta correspondente ao estímulo da injeção ou variação da pressão de fundo de poço (BHP). Um índice de produtividade, J , que depende das propriedades da rocha, do fluido e do efeito mudanças de BHP no produtor. Um coeficiente de conectividade, λ_{ij} , é usado para representar a fração da vazão de injeção do injetor i que influi na vazão de produção do produtor j . A conectividade depende da geologia, da distância entre os poços e é independente das vazões de injeção/produção. Baseado nas conectividades torna-se possível quantificar o grau de comunicação entre pares de poços injetores e produtores.

A equação de continuidade para o produtor j pode ser expressa (Holanda et al., 2015):

$$\tau_j \frac{dq^j}{dt} + q^j(t) = \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ij} I_i(t) - \tau_j J_j \frac{dp_{wf}^{(j)}}{dt} \quad \text{com} \quad \tau = \frac{c_t V_p}{J}. \quad (14)$$

onde $q_j(t)$ = vazão de produção líquida do produtor j no tempo t ; $I_i(t)$ = vazão de injeção da injetor i no tempo t ; $dp_{wf}^{(j)}$ = pressão de fundo de poço do produtor j em t ; C_t = compressibilidade total; v_p = volume poroso conectado. Pode ser rescrito como:

$$q_k^j = q_{k-1}^j e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \sum_{i=1}^{N_I} \lambda_{ij} I_{ik} - \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_j}}\right) \tau_j J_j \frac{p_{wf}^{j(k)} - p_{wf}^{j(k-1)}}{\Delta t} \quad (15)$$

O primeiro termo da Eq. (15) é a resposta inicial da vazão de produção associada com a depleção primária, o segundo termo é associado com a contribuição de injeção e o último com a mudança de BHP nos produtores. Os parâmetros λ_{ij} , τ_j , J_j , $i = 1 \dots N_I$, $j = 1 \dots N_P$ podem ser encontrados resolvendo o seguinte problema de mínimos quadrados restrito:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \sum_{k=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_P} \left(q_k^{j,obs} - q_k^{j,cal} \right)^2 \\ &\text{sujeito a :} \quad \sum_{j=1}^{N_P} \lambda_{ij} \leq 1, \text{ para todo } i \\ &\quad 0 \leq \lambda_{ij} \leq 1, \text{ para todo } i \text{ e } j \\ &\quad \tau_{\min} \leq \tau_j \leq \tau_{\max} \\ &\quad J_{\min} \leq J_j \leq J_{\max} \end{aligned} \quad (16)$$

onde, $q_k^{j,obs}$ = vazão líquida observada do produtor j no tempo k . Estes dados podem ser obtidos do atual histórico de produção do campo. Neste trabalho são gerados pelo simulador comercial IMEX (CMG, 2016). $q_k^{j,cal}$ = vazão de produção líquida calculada para o produtor j no passo de tempo k . O número de parâmetros do modelo desconhecido depende da consideração de BHP constante ou variável, sendo menos incógnitas no primeiro caso. Para o caso do BHP variável, o número de parâmetros desconhecidos, n_{par} , é dado por:

$$n_{par} = N_P (N_I + 2). \quad (17)$$

Para o cálculo das conectividades entre poços utilizamos o simulador de reservatório, que atua como um sistema que processa e estimula (injeção) e retorna uma resposta (produção). Seguimos a estratégia proposta por Weber, (2009) pela qual se resolvem dois problemas: um onde não é imposta a restrições de desigualdade da soma das conectividades sendo apenas consideradas as restrições de limite enquanto o outro considera todas as restrições. O primeiro problema é o desacoplado, e pode ser resolvido separadamente para cada produtor gerando um ponto de partida adequado para o segundo problema o qual é completo. As conectividades são calculadas usando um conjunto de cinco realizações sendo uma delas utilizada para o problema desacoplado. Os seguintes passos são necessários para o cálculo das conectividades:

- 1- Definir valores de BHP para os produtores e vazões de injeção aleatórias no simulador. Estes dados são alterados a cada 30 dias durante o período de simulação;

2- Usar os dados de produção a partir do passo de tempo em que todos os produtores apresentam irrupção de água;

3- Usando o método de mínimos quadrados não linear, resolver o problema desacoplado da Eq. (18) para cada poço produtor, $j = 1 \cdots N_p$, que servirá como ponto de partida do problema principal acoplado. Isso sempre fornece um ponto de partida apropriado, reduzindo o número de iterações;

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{k=1}^{N_t} \left(q_k^{j,obs} - q_k^{j,cal} \right)^2 \\ \text{sujeito a :} \quad & 0 \leq \lambda_{ij} \leq 1, \quad i = 1 \cdots N_I. \\ & \tau_{\min} \leq \tau_j \leq \tau_{\max} \end{aligned} \quad (18)$$

4- Para cada poço injetor, $i = 1 \cdots N_I$, impomos a condição de viabilidade com respeito a restrições do problema principal em relação as conectividades, para partir de um ponto viável.

$$\begin{aligned} \text{Se } \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{ij} > 1, \text{ então} \\ \lambda_{ij} \leftarrow \gamma \lambda_{ij} \quad \text{onde } \gamma = 1 / \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{ij}. \end{aligned} \quad (19)$$

5-. Usando o ponto de partida calculado pelo problema desacoplado, resolver o problema acoplado da Eq. (16) usando o algoritmo SQP.

O cálculo das conectividades para o modelo da Fig. 1 estão apresentados na Tabela 1 e representados graficamente na Fig. 4 onde o tamanho das setas são diretamente proporcionais as conectividades correspondentes. Podemos observar claramente que o produtor P-3 possui forte conectividade com o injetor I-2 e não tem conectividade com os injetores do lado oposto da falha. Isso significa que a sensibilidade do VPL do produtor P-3 em relação ao controle de I-2 deve permanecer inalterada enquanto a localização deve eliminar os termos de sensibilidade de P-3 em relação às demais variáveis de controle dos outros injetores. Os poços I-1 e P-1 estão localizados em lados oposto da falha. O valor da conectividade entre eles é pequeno, mas não nulo, como pode ser visto na Tabela 1. Portanto, a técnica de localização deve considerar um valor de limite abaixo do qual os poços devem ser considerados desconectados.

Tabela 1 Conectividade do modelo sintético

	P-1	P-2	P-3	P-4
I-1	0.0	0.6565	0.0	0.3435
I-2	0.5042	0.0089	0.4869	0.0
I-3	0.0026	0.4972	0.0	0.5002
I-4	0.0	0.4956	0.0	0.5044
I-5	0.0	0.3447	0.0	0.6553

Uma forma coerente para incorporar a conectividade entre injetores e produtores é adotar a matriz de localização, baseada em uma medida de “distancia”, r . Propomos esta medida como

a inversa da conectividade entre par de poços multiplicada por um fator, α . Para o cálculo destes temos da matriz de localização usamos a Função Quartic (Biniaz et al., 2014):

$$\rho_{ij} = \begin{cases} \left(1 - r(ij)\right)^4 & ; r(ij) \leq 1 \\ 0 & ; r(ij) > 1 \end{cases} \quad \text{com } r(ij) = \frac{\alpha}{100\lambda_{ij}} \quad (20)$$

Na Eq. (20), $r(ij)$ = medida de distância proposta. Adotamos $\alpha = 3$, que resulta em um valor limite de 3%, (Weber (2009)) recomendação corroboradas pelos autores através de experiências numéricas. Podemos observar na Fig. 5 que a função de localização anula os valores abaixo do valor limite.

A matriz de localização, $\rho \in R^{N_I \times N_P}$, contem valores da função de localização correspondentes aos pares injetores/produtores. Usando o produto Schur, $\circ$, entre as partições da matriz de sensibilidade correspondente ao VPL de produtores, com respeito aos injetores, e a matriz de localização, podemos obter como resultado a sensibilidade da sub-matriz com localização:

$$S_{x_I f_P}^{loc} = S_{x_I f_P} \circ \rho. \quad (21)$$

3.2.2 Sensibilidade do VPL de produtores devido a outros produtores

Chen e Oliver, (2012) propuseram a técnica de localização extrema para manter a sensibilidade do VPL do produtor j com sua própria variável de controle e afirmaram que se o reservatório é razoavelmente bem conectado, então, a primeira influência da produção de poços distantes sobre o estado do reservatório é a redução da pressão devida a retirada do fluido. Adotaram assim o efeito médio para a sensibilidade do VPL do produtor j devido às outras variáveis de controle.

Por outro lado, no caso de falhas selantes ou regiões de permeabilidade muito baixas entre produtores, não há disputa pelo fluido. Portanto, para o cálculo de efeitos médios não é necessário incluir a sensibilidade do VPL de um dado produtor com o controle do produtor do lado oposto da falha para o cálculo de efeitos médios. Propomos avaliar a competitividade entre produtores utilizando a mudança de pressão entre os mesmos adotando a técnica Interference Test.

Interference Test é uma forma efetiva para avaliar o grau de comunicação entre poços (Maizeret, 2013). O teste típico é aplicar uma perturbação em um produtor e media a resposta da pressão em um ou mais poços. A mudança de pressão a uma certa distância a partir do produtor é muito menor do que no próprio poço. Isso significa que a sensibilidade do VPL de um dado produtor em relação ao controle de um poço distante deverá ser muito pequena, e na presença de uma falha entre produtores a sensibilidade deverá ser negligenciada, porque não há disputa sobre o fluido.

Definimos os coeficientes de competitividade com base nas mudanças de pressão entre os produtores. Para o cálculo desses coeficientes, é necessária uma única execução do simulador de reservatório, onde todos os produtores são controlados por vazão, seguindo os passos abaixo:

1. – O reservatório deve estar em equilíbrio.

2. – Fechar individualmente os poços produtores, um por um, com um intervalo de tempo entre os fechamentos, que permita que o reservatório esteja novamente em equilíbrio.
3. – Com a resposta do BHP para cada produtor $j = 1 \cdots N_p$.
 - 3.1 – determinar $\Delta P_j^{\max}$ para a máxima variação no BHP do produtor j devido ao fechamento dos outros produtores.
 - 3.2 – determinar ΔP_j^r para a mudança de BHP no produtor j devido ao fechamento do produtor r . $r = 1 \cdots N_p$.
 - 3.3. – Calcular os coeficientes de competitividade $w_r^j = \frac{|\Delta P_j^r|}{|\Delta P_j^{\max}|}$.

A sub-matriz de sensibilidade final do VPL de produtores com respeito aos controles dos outros produtores, incorporando localização e os coeficientes de competitividade, é expressa como:

$$S_{x_i f_p}^{\text{coef}} = \begin{bmatrix} S_{x_{P_1} f_{P_1}} & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1 & S_{x_{P_2} f_{P_2}} & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & S_{x_{P_{N_P}} f_{P_{N_P}}} \end{bmatrix}, \text{ onde } \varphi_j = \frac{\sum_{r \neq j} w_r^j S_{x_{P_r} f_{P_j}}}{\sum_{r \neq j} w_r^j}. \quad (22)$$

A tabela 2 mostra os coeficientes de competitividade entre os produtores para o modelo mostrado na Fig. 1, obtido seguindo os procedimentos propostos anteriormente. Qualquer produtor com respeito ao seu próprio controle tem coeficiente de competitividade unitário O produtor P-3 tem coeficiente competitividade um com o produtor P-1, porque eles competem diretamente pelo fluido. Os produtores P-2 e P-4 tem competitividade nula em relação ao produtor P-1, uma vez que ambos estão do lado oposto da falha.

Tabela 2 Cálculo dos coeficientes de competitividade

	P-1	P-2	P-3	P-4
P-1	1.0	0.0	1.0	0.0
P-2	0.0	1.0	0.0	1.0
P-3	1.0	0.0	1.0	0.0
P-4	0.0	1.0	0.0	1.0

Fig. 6 apresenta a sensibilidade do VPL do poço produtor P-1 com respeito aos controles de todos os poços usando a técnica de localização e coeficientes de competitividade proposto. É fácil perceber a partir da comparação com a Fig. 3(b) que o efeito das correlações espúrias é significativamente reduzido.

3.3 Técnicas de regularização e localização

A matriz final de sensibilidade refinada é dada por:

$$S_{x_{f_w}}^{ref} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} coef \\ S_{x_P f_P} \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} loc \\ S_{x_I f_P} \end{matrix} & \begin{matrix} reg \\ S_{x_I f_I} \end{matrix} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

O gradiente aproximado da função objetivo é a soma das colunas da matriz da Eq. (23). Fig. 7 é um gráfico de bolhas que representam o gradiente do VPL do campo. Na Fig. 7(a), o vetor gradiente é calculado por diferenças finitas. Fig. 7(b) mostra o gradiente baseado em ensemble enquanto a Fig. 7(c) descreve o gradiente refinado. Embora a sensibilidade na Fig. (c) não seja perfeita, comparando com a Fig. 7(a) podemos perceber que elas têm praticamente as mesmas cores, porém tamanhos diferentes.

4 EXEMPLO

Neste trabalho foram utilizados dois modelos sintéticos para validar as técnicas de regularização e localização na matriz de sensibilidade. O algoritmo de otimização para maximizar o VPL destes modelos é a programação quadrática sequencial (SQP) do tool-box MATLAB (MATLAB, 2014). As simulações foram executadas utilizando o simulador de reservatório IMEX. O vetor gradiente é aproximado utilizando ensembles de diferentes tamanhos. O método baseado em ensemble é de natureza estocástica, porém, para ter comparações eficientes foram realizadas 20 execuções do processo de otimização. Os resultados estatísticos da função objetivo serão apresentados em box-plot. Os limites do box-plot são 25% e 75% quartil, a linha no Box-plot é a mediana e as linhas extremas são valores máximos e mínimos.

4.1 Modelo Sintético

O primeiro modelo foi mostrado na Fig. 1. A função objetivo a maximizar é o VPL do campo. O período de concessão é 32 anos com mudança dos controles a cada quatro anos. As variáveis dos controles são os controles de todos os nove poços em oito ciclos de controle. O número total das variáveis de controle é 72. Os parâmetros usados para calcular o VPL são o preço do óleo 6 \$/ bbl, água produzida e injetada 2 \$/ bbl, e uma taxa de retorno de 9.3% por ano. Os controles iniciais para os produtores é 25% da produção total máxima do campo de 5000 bbl/dia. O controle do injetor I-2 é 33% da máxima injeção total do campo de 6000 bbl/dia e para os outros injetores é 16.75%. O VPL inicial base é \$ 2.22x10⁷.

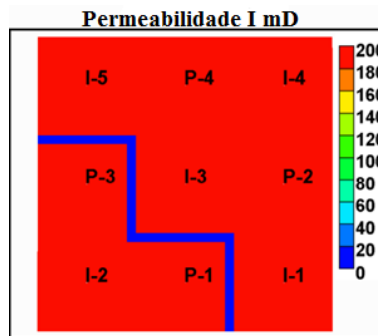


Figura. 1 Campo de permeabilidade (I) e distribuição dos poços

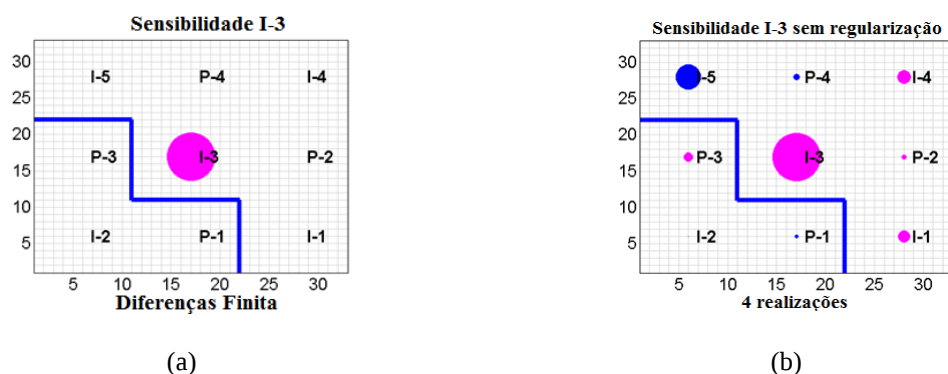


Figura. 2 Sensibilidade VPL do poço I-3 com variáveis de controle por diferenças finitas (a) e método baseado em ensemble

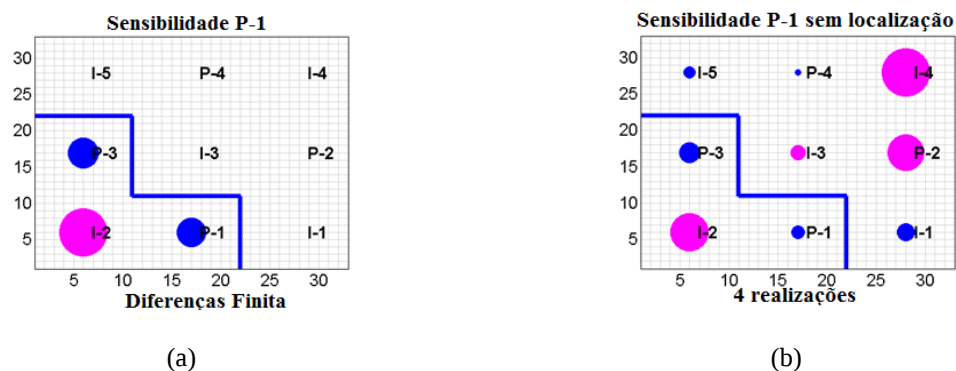


Figura. 3. Sensibilidade do VPL do produtor P-1 por diferença finita (a) e método baseado em ensemble (b).

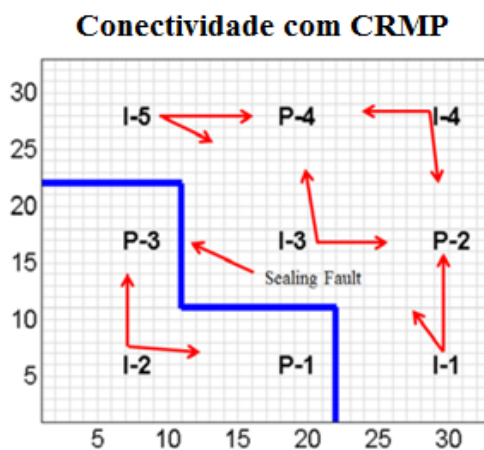


Figura 4. Representação das conectividades.

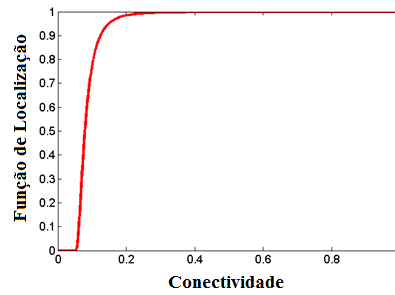


Figura 5. Comportamento da função de localização.

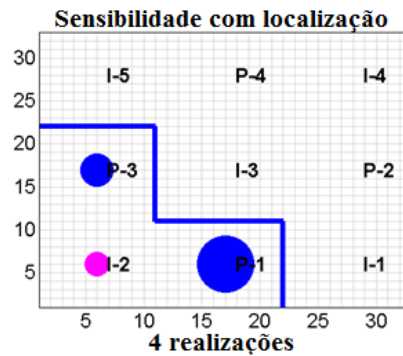


Figura 6. Sensibilidade do VPL do produtor P-1 devido a todos os controles após refinamento.

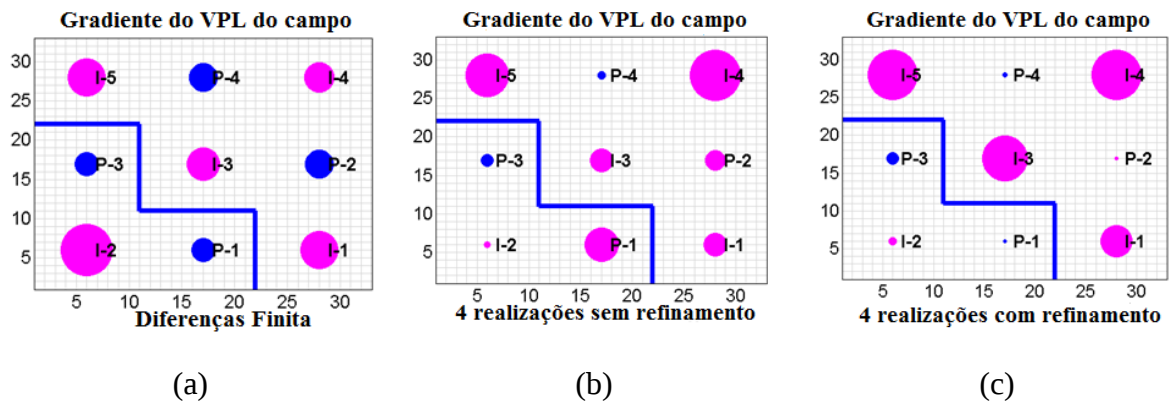


Figura 7. Comparação do cálculo do gradiente por diferença finitas (a) e método baseado em ensemble com (c) e sem (b) refinamento.

A Fig. 8 mostra os resultados obtidos com e sem refinamento (todos usam o mesmo ponto inicial na otimização). O primeiro e terceiro plot (da esquerda) nesta figura são relacionados a resultados sem refinamento com três e seis realizações, enquanto o segundo e quarto plot mostram resultados com os refinamentos propostos.

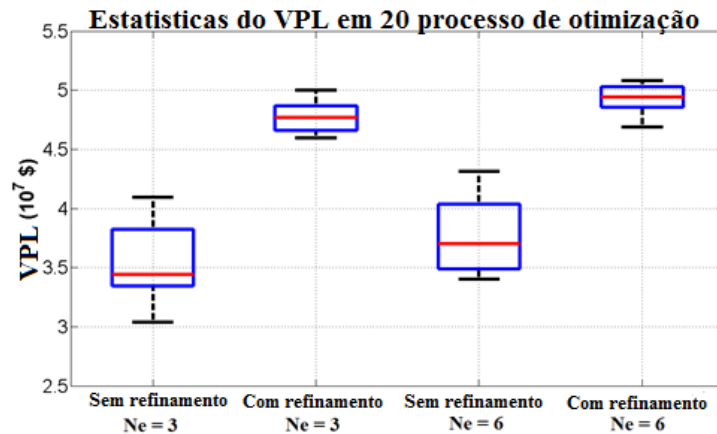


Figura 8. Resultados de otimização estatísticos em Box-plots para 20 execuções.

No caso de ensemble com três realizações o refinamento proposto resulta em um ganho de 35% com respeito ao valor médio sobre 20 execuções. Notamos também que a variabilidade dos resultados é reduzida. Para ensemble com seis realizações o refinamento proposto resulta em um ganho de 31%. Comparando os resultados com refinamento, o ganho é unicamente 4%, com respeito ao valor da mediana.

4.2 Modelo Brugge Field modificado

O segundo exemplo é baseado sobre o modelo conhecido como Brugge Field com uma única completação por poço. Uma descrição detalhada do modelo pode ser encontrada em Peters et al., (2010). Neste trabalho, usamos a realização # 28. O modelo de reservatório tem nove camadas com 6672 blocos ativos. O número de poços é 30, sendo vinte produtores e dez injetores. O período de concessão no processo de otimização é de vinte anos e é dividido em 40 ciclos de controle, os controles são mudados a cada seis meses. As variáveis de controle são os controles dos 30 poços. O número total de variáveis é 1200. Os parâmetros utilizados para calcular o VPL são: preço de óleo 80 \$ bbl e 5 \$ bbl para injeção e produção de água. A vazão líquida máxima permitida na produção de campo é 60,000 bbl/dia e a injeção máxima permitida é 50,000 bbl/dia. Os controles iniciais dos poços foram selecionados aleatoriamente. O VPL para o caso base é \$ 7.324x10⁹. A Fig. 9 mostra a saturação de óleo e Fig. 10 mostra a permeabilidade por camadas.

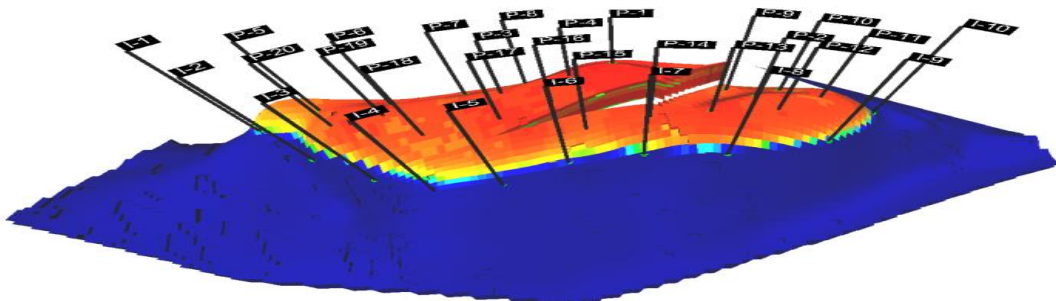


Figura 9. Saturação de óleo modelo Brugge Field

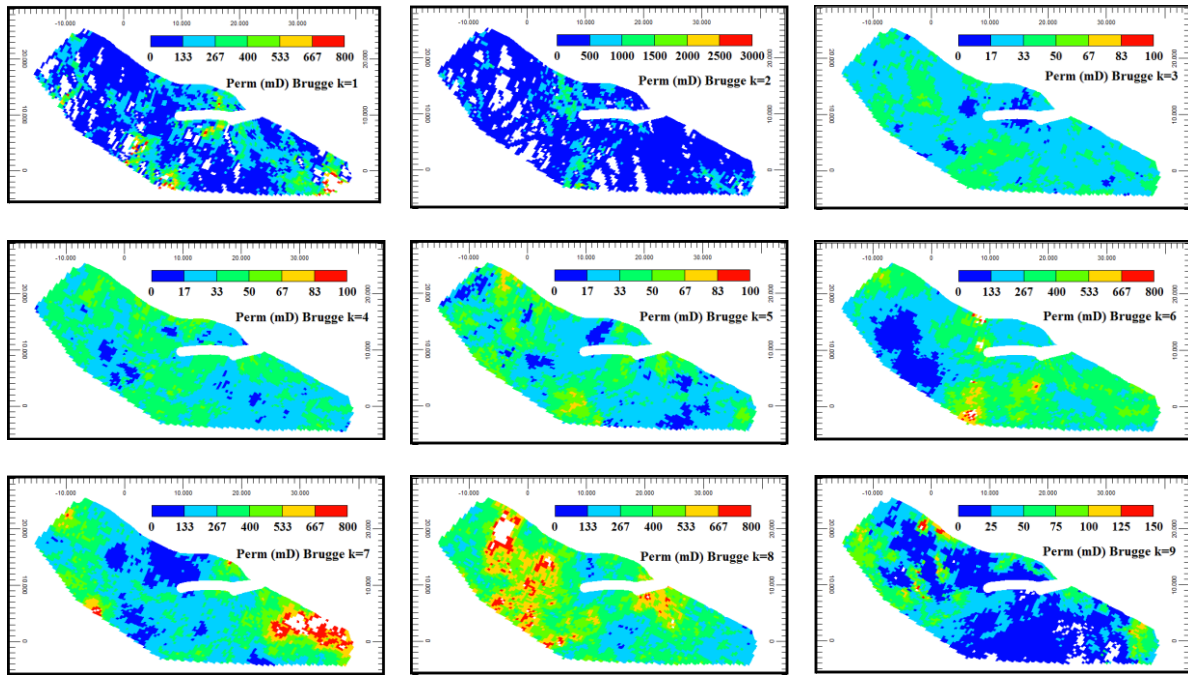


Figura 10. Permeabilidade do modelo Brugge por camadas

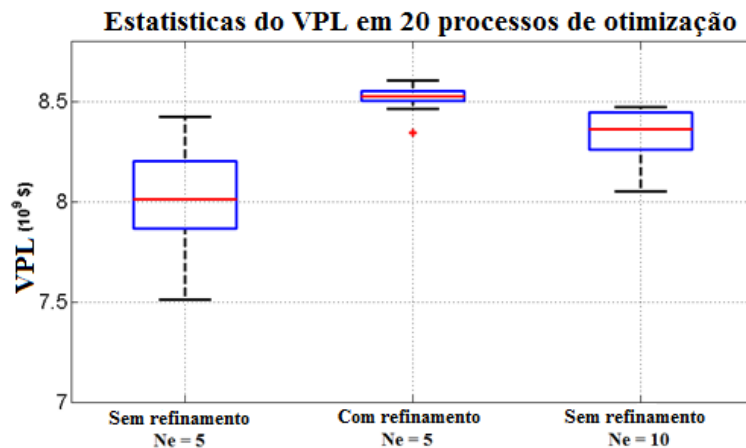


Figura 11. Box-plots com e sem refinamento para 20 processos de otimização

Os resultados do processo de otimização estão apresentados na Fig. 11 em três diferentes box-plots. Neste caso os resultados são obtidos com cinco e dez membros por ensemble. O primeiro (da esquerda) e terceiro plot são obtidos sem nenhum refinamento e o segundo plot é com refinamento para cinco membros. A mediana do plot com refinamento mostra um ganho de 6% sobre a mediana do primeiro plot, e em comparação com o terceiro o ganho é 1.2%. Os resultados com refinamento podem ser obtidos em média usando 120 execuções do simulador (114 no processo de otimização, cinco no cálculo das conectividades e uma para os coeficientes de competitividade). O refinamento proposto melhora a qualidade do vetor gradiente, portanto o desempenho do otimizador, reduz a quantidade de avaliações de função na solução e a variabilidade nos resultados.

5 CONCLUSÕES

Os refinamentos propostos para a matriz de sensibilidade do VPL de cada poço com relação aos controles de todos os poços podem ser especificados como:

- VPL de Injetores com relação a controles de Injetores: manter apenas aqueles termos relativos aos controles do próprio poço e anular os demais desde que a simulação demonstre a independência dos mesmos. Caso contrário não regularizar.
- VPL de Injetores com relação a controles de Produtores: anular todos os termos, desde que a simulação demonstre a independência dos mesmos. Caso contrário não regularizar.
- VPL de Produtores com relação a controles de Injetores: manter aqueles termos que influem significativamente na produção através de técnicas de localização.
- VPL de Produtores com relação a controles de Produtores: manter os termos relativos aos controles do próprio poço, calcular médias ponderadas dos efeitos de poços que competem pelo fluido baseadas em coeficientes de competitividade.

Os resultados obtidos demonstram que o refinamento na matriz de sensibilidades comprovou ser muito eficaz. No primeiro modelo, a matriz de sensibilidade calculada por três realizações com refinamento apresenta um ganho de 31% entre as medianas, em comparação com a matriz de sensibilidade sem refinamento gerado a partir de três realizações. O modelo Brugge Field modificado apresenta um ganho de 6% entre as medianas utilizando 5 realizações para a matriz de sensibilidade com e sem refinamento. Nos exemplos apresentados o refinamento proposto reduz drasticamente a variabilidade.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro para esta pesquisa ao Programa de recursos Humanos PRH-26, PETROBRAS e Fundação CMG.

REFERÊNCIAS

- Alim, Marcel, 2013. Constraint Handling in Life-cycle Optimization Using Ensemble Gradients, MSc Thesis Report, Delf University of Technology, The Netherlands.
- Asadollahi, M., Naevdal, G., 2009. Waterflooding Optimization Using Gradient Based Methods. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/125331-MS
- Biniaz, Delijani E., Pishvaie, Mahmoud Reza and Bozorgmehry Boozarjomehry, Ramin, Distance Dependent Localization Approach in Oil Reservoir History Matching: A Comparative Study, Iranian Journal of Chemistry and Chemical Engineering (IJCCE), 2014. volume 33-1, pages 75-91. INSS 1021-9986, http://www.ijcce.ac.ir/article_7199.html
- Brouwer, D.R., Jansen, J, -D., 2004. Dynamic Optimization of Water Flooding With Smart Wells Using Optimal Control Theory. *SPE J.9* (4): 391-402. SPE -78278-PA. doi: 10.2118/78278-PA.
- Cao, F., Luo, H., Lake, L. W., 2014. Development of a Fully Coupled Two-phase Flow Based Capacitance Resistance Model. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/169485-MS
- Chaudhri, M., H. Phale, N. Liu, D. Oliver, An improved approach for ensemble based production optimization, in SPE Western Regional Meeting, 2009.

- Chen, Yan., 2008. *Ensemble-based closed-loop production optimization*, Ph.D. thesis, University of Oklahoma, 2008.
- Chen, Y., Oliver, D. S., 2012. Localization of Ensemble-Based Control-Setting Updates for Production Optimization. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/125042-PA.
- Chen, Y., Oliver, D.S., Zhang, D., 2009. Efficient Ensemble-Based Closed-Loop Production Optimization. *SPE J.* 14(4): 634-645. SPE-112873-PA. doi:10.2118/112873-PA.
- Chen, B., Reynolds, A. C., 2015. Ensemble-Based Optimization of the WAG Injection Process. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/173217-MS
- Computer Modeling Group LTD., 2016. IMEX: User's Guide. Calgary Canada.
- Dehdari, V., Oliver, D.S., 2012: Sequential quadratic programming for solving constrained production optimization – case study from Brugge field. *SPE J.* 17, 874–884.
- Dehdari, Dean S. Oliver, Clayton V. Deutsch, Comparison of optimization algorithms for reservoir management with constraints—A case study, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 100, December 2012, Pages 41-49, ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2012.11.013>.
- Do, S.T., Reynolds, A.C. Theoretical connections between optimization algorithms based on an approximate gradient *Comput Geosci*, 2013. 17: 959. doi:10.1007/s10596-013-9368-9
- Fonseca, R. M., Kahrobaei, S. S., van Gastel, L. J. T., Leeuwenburgh, O., Jansen, J. D., 2015. Quantification of the Impact of Ensemble Size on the Quality of an Ensemble Gradient Using Principles of Hypothesis Testing. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/173236-MS
- Fonseca, Rahul M, Reynolds, Albert C., Jansen, Jan Dirk. Generation of a Pareto front for a bi-objective water flooding optimization problem using approximate ensemble gradients, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 147, November 2016, Pages 249-260, ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2016.06.009>.
- Holanda, R. W., Gildin, E., Jensen, J. L., 2015. Improved Waterflood Analysis Using the Capacitance-Resistance Model Within a Control Systems Framework. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/177106-MS
- Horowitz, Bernardo. Afonso, Silvana Maria Bastos, Carlos Victor Paiva de Mendonça, Surrogate based optimal waterflooding management, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 112, December 2013, Pages 206-219, ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2013.11.006>.
- Jafroodi, N., Dongxiao Zhang, New method for reservoir characterization and optimization using CRM–EnOpt approach, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 77, Issue 2, May 2011, Pages 155-171, ISSN 0920-4105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2011.02.011>.
- Jansen, J.D., 2011. Adjoint-based optimization of multiphase flow through porous media—a review. *Comput. Fluids* 46 (1), 40–51.
- Lorentzen, R. J., Berg, A., Naevdal, G., Vefring, E. H., 2006. A New Approach For Dynamic Optimization Of Water Flooding Problems. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/99690-MS
- Maizeret, P.-D., 2013. Best Practice to Design and Interpret Interference Tests Based on Features of the Line-Source Solution: Theory and Application. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/164714-MS

MATLAB'S Optimization Toolbox User's Guide, R2014a.

Nwaozo, J., Dynamic optimization of a water flood reservoir, Master's thesis, University of Oklahoma, 2006.

Peters, L., Arts, R., Brouwer, G., Geel, C., Cullick, S., Lorentzen, R. J., Reynolds, A., 2010. Results of the Brugge Benchmark Study for Flooding Optimization and History Matching. Society of Petroleum Engineers. doi:10.2118/119094-PA

Sarma, P., Chen, W., 2014. Improved estimation of the Stochastic gradient with Quasi-Monte Carlo Methods. Proc. 14th European conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR XIV), Catania, Italy, 8-11 September.

Sayarpour, M., Zuluaga, E., Kabir, C. S., Lake, L. W., 2009. The use of capacitance-resistive models for rapid estimation of waterflood performance and optimization, Journal of Petroleum Science and Engineering, 69 (3-4):227-238. <http://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>

Stordal, Andreas S., Szklarz, Slawomir P., Leeuwenburgh, Olwijn, 2016. A Theoretical look at Ensemble-Based Optimization in Reservoir Management, Mathematical Geosciences, 48(4):399--417. <http://dx.doi.org/10.1007/s11004-015-9598-6>.

Su, H.-J., Oliver, D.S, 2010. Smart Well Production Optimization Using An Ensemble-Based Method. *SPE Res Eval & Eng* 13(6): 884-892. SPE-126072-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/88901-MS>.

Tueros J.A.R., Horowitz, B., Willmersdorf, R., 2015. Numerical Experience With an Ensemble-based Method for Constrained Waterflooding Optimization, CILAMCE 2015, Congresso Ibero Americano em Métodos Computacionais em Engenharia, Rio Janeiro, RJ, 22-25, Novembro 2015. doi:10.20906/CPS/CILAMCE2015-0498.

Tueros J.A.R., Horowitz, B., Willmersdorf, R., 2015. Método Baseado em Ensemble com Refinamento na Matriz de Sensibilidade para Otimização de Injeção Água com Poços Inteligentes, CILAMCE 2016, Congresso Ibero Americano em Métodos Computacionais em Engenharia, Brasília-DF-Brasil, 06-09, Novembro 2015.

Weber, Daniel The Use of Capacitance-Resistance Models to Optimize Injection Allocation and Well Location in Water Floods. Ph.D dissertation, The University of Texas at Austin. 2009.

Yousef, A., 2006 Investigating Statistical Techniques to Infer Interwell Connectivity from Production and Injection Rate Fluctuations. Ph.D dissertation, The University of Texas at Austin, 2006.