



OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO DE TRELIÇAS TUBULARES CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Larissa Bastos Martinelli

Elcio Cassimiro Alves

larissabastosm@gmail.com

elcio.calves1@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514, Cep 29097-910, Goiabeiras - Vitória - ES - Brazil

Resumo. *Sistemas treliçados tubulares são muito utilizados em projetos de coberturas para vencer grandes vãos. No dimensionamento dessas estruturas, a avaliação do comportamento não-linear é importante para evitar problemas de instabilidade. Este trabalho apresenta uma formulação para o dimensionamento otimizado de treliças tubulares considerando o comportamento geometricamente não-linear. O problema de otimização dimensional minimiza o custo total da estrutura e está sujeito a restrições de esforços, esbeltez e deslocamentos nodais de acordo com o recomendado pela ABNT NBR 8800:2008 e pela ABNT NBR 16239:2013, além de uma restrição de carga crítica devido aos efeitos de 2ª ordem. O programa computacional foi desenvolvido na plataforma Matlab e possui uma interface de fácil manuseio. A consideração da não-linearidade geométrica é feita por meio do método do comprimento de arco e o problema de otimização é resolvido pelo método dos pontos interiores. Exemplos numéricos são apresentados para estruturas espaciais.*

Palavras-chave: *Otimização, Dimensionamento, Não-linear, Treliças.*

1 INTRODUÇÃO

Dentro do contexto das estruturas de aço, os sistemas treliçados tubulares aparecem como uma boa alternativa para vencer grandes vãos, podendo ser empregados em diversas aplicações práticas da engenharia, como pontes, coberturas e torres de linhas de transmissão. No entanto, os perfis tubulares ainda apresentam um custo elevado em relação aos perfis tradicionais e, para que seu uso se torne competitivo, surge a necessidade de buscar projetos com um custo reduzido, mas sem comprometer o seu correto funcionamento.

Segundo Fonseca (2007), ainda que o projetista possua bastante experiência, é praticamente impossível encontrar a melhor solução para o dimensionamento de uma estrutura pelo método da tentativa e do erro, já que existem diversas combinações possíveis para este problema. Neste contexto está inserida a utilização de técnicas de otimização, com as quais se busca projetar estruturas que atendam aos critérios de segurança com menor consumo de material, menor custo de fabricação, transporte, entre outros.

A hipótese de comportamento linear no processo de otimização pode gerar estruturas com problemas de instabilidade, uma vez que o método de análise por vezes não é representativo do real comportamento estrutural. Essa situação pode ser evitada por meio da consideração dos efeitos de 2ª ordem. Nesse estudo será abordada a não-linearidade geométrica, em que as mudanças significativas na geometria da estrutura afetam os esforços internos, fazendo com que a análise de equilíbrio deva ser realizada na sua configuração deformada.

Os problemas que apresentam não-linearidade geométrica resultam em um sistema de equações não-lineares cuja solução necessita da aplicação de métodos numéricos. Atualmente, o método do comprimento de arco (Wempner, 1971; Riks, 1979; Crisfield, 1981; Ramm, 1981) é considerado como o mais robusto para resolução de equações não-lineares em mecânica dos sólidos e estruturas.

Diante disso, busca-se neste trabalho apresentar a formulação do problema de otimização de treliças tubulares levando em consideração a não-linearidade geométrica, bem como a sua aplicação por meio de um programa computacional desenvolvido através do software Matlab. As rotinas computacionais implementadas consistem em um módulo do Truss3D, um programa para análise e dimensionamento de estruturas treliçadas que vem sendo desenvolvido por alunos de graduação e pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo. Outras funcionalidades do Truss3D podem ser encontradas em (Novelli et al., 2015a, b; Martinelli et al., 2016; Azolin, Novelli e Alves, 2016).

2 DIMENSIONAMENTO DE TRELIÇAS TUBULARES

O dimensionamento de treliças tubulares é regido pelas normas ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 16239:2013. Para tal, são estabelecidas limitações para os esforços axiais e para a esbeltez das barras.

$$N_{Sd} \leq N_{Rd} \quad (1)$$

$$\lambda \leq \lambda_{m\acute{a}x} \quad (2)$$

Onde,

N_{Sd} : Força axial solicitante de cálculo;

N_{Rd} : Força axial resistente de cálculo;

λ : Índice de esbeltez da barra;

$\lambda_{máx}$: Índice de esbeltez máximo.

A condição expressa pela Eq. (2) é dada para barras tracionadas e para barras comprimidas pelas Eq. (3) e (4), respectivamente:

$$\lambda = \frac{L}{r} \leq 300 \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{K L}{r} \leq 200 \quad (4)$$

Onde,

L : comprimento da barra;

r : raio de giração;

K : coeficiente de flambagem (igual a 1 para barras birotuladas).

A determinação da força axial resistente de cálculo (N_{Rd}) para os casos de barras submetidas à força axial de tração e barras submetidas à força axial de compressão serão abordados a seguir.

2.1 Força axial de tração resistente de cálculo

Para barras tracionadas, a força axial de tração resistente de cálculo ($N_{t,Rd}$) é considerada como o menor valor obtido entre os dois casos abaixo:

$$\text{Escoamento de seção bruta: } N_{t,Rd} = \frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (5)$$

$$\text{Ruptura de seção líquida efetiva: } N_{t,Rd} = \frac{A_e f_u}{\gamma_{a2}} \quad (6)$$

Onde,

A_g : área bruta da seção transversal da barra;

f_y : resistência ao escoamento do aço;

γ_{a1} : coeficiente de ponderação de resistência para escoamento de aço estrutural (definido como igual a 1,1);

A_e : área líquida efetiva da seção transversal da barra;

f_u : resistência à ruptura do aço;

γ_{a2} : coeficiente de ponderação de resistência para ruptura de aço estrutural (definido como igual a 1,35).

Cálculo da área líquida efetiva.

$$A_e = C_t A_n \quad (7)$$

Onde,

A_n : área líquida da seção transversal da barra;

C_t : coeficiente de redução da área líquida.

Neste estudo, foi considerado que a ligação entre barras é feita sem furos, portanto a área líquida da seção transversal A_n foi tomada como igual à área bruta A_g . Além disso, admitiu-se que a força de tração é transmitida diretamente para cada elemento da seção transversal por meio de solda, resultando em um coeficiente de redução da área líquida C_t igual a 1.

2.2 Força axial de compressão resistente de cálculo

A força axial resistente de cálculo em barras comprimidas ($N_{c,Rd}$) é calculada pela seguinte expressão:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (8)$$

Onde,

χ : fator de redução associado à resistência à compressão;

Q : fator de redução total associado à flambagem local;

A_g : área bruta da seção transversal da barra.

Fator de redução χ . Segundo a ABNT NBR 16239:2013, o fator de redução χ pode ser determinado para perfis tubulares da seguinte forma:

$$\chi = \frac{1}{(1 + \lambda_o^{4,48})^{1/2,24}} \quad (9)$$

Sendo λ_o o índice de esbeltez reduzido, dado por:

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{Q A_g f_y}{N_e}} \quad (10)$$

Onde,

A_g : área bruta da seção transversal da barra;

N_e : força axial de flambagem elástica;

Q : fator de redução total associado à flambagem local.

Fator de redução Q . Para efeito de flambagem local, a ABNT NBR 8800:2008 classifica os elementos que fazem parte das seções tubulares quadradas e retangulares como AA. Portanto, a relação entre largura e espessura (b/t) desses elementos fica limitada a expressão:

$$(b/t)_{lim} = 1,40 \sqrt{E/f_y} \quad (11)$$

Se a relação b/t for menor que este limite, adota-se o fator de redução Q como igual a 1. Caso contrário, tem-se:

$$Q = Q_a \quad (12)$$

$$Q_a = \frac{A_{ef}}{A_g} \quad (13)$$

$$A_{ef} = A_g - \Sigma(b - b_{ef}) \quad (14)$$

$$b_{ef} = 1,92 t \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \left[1 - \frac{c_a}{b/t} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \right] \leq b \quad (15)$$

Onde,

A_{ef} : área efetiva da seção transversal;

b_{ef} : largura efetiva do elemento AA;

b : largura do elemento AA;

t : espessura do elemento AA;

σ : tensão no elemento que, de forma conservadora, pode ser tomada como f_y ;

c_a : coeficiente igual a 0,38 para seções tubulares quadradas e retangulares.

No caso dos perfis com seção tubular circular, o fator de redução total associado à flambagem local (Q) é dado por:

$$Q = 1 \quad \text{para} \quad \frac{D}{t} \leq 0,11 \frac{E}{f_y} \quad (16)$$

$$Q = \frac{0,038}{D/t} \frac{E}{f_y} + \frac{2}{3} \quad \text{para} \quad 0,11 \frac{E}{f_y} < \frac{D}{t} \leq 0,45 \frac{E}{f_y} \quad (17)$$

Onde,

D : diâmetro externo da seção transversal;

t : espessura da seção transversal.

Força axial de flambagem elástica. Para barras de seção transversal duplamente simétrica, como é o caso das seções tubulares estudadas neste trabalho, a força axial de flambagem elástica é dada pelo menor valor entre N_{ex} , N_{ey} e N_{ez} .

- Para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia x da seção transversal:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 E I_x}{(K_x L_x)^2} \quad (18)$$

- Para flambagem por flexão em relação ao eixo central de inércia y da seção transversal:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 E I_y}{(K_y L_y)^2} \quad (19)$$

- Para flambagem por torção em relação ao eixo longitudinal z :

$$N_{ez} = \frac{1}{r_o^2} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(K_z L_z)^2} + G J \right] \quad (20)$$

$$r_o = \sqrt{(r_x^2 + r_y^2 + x_0^2 + y_0^2)} \quad (21)$$

Onde,

K_x e K_y : coeficientes de flambagem, tomados iguais a 1 para barras birotuladas;

I_x e I_y : momentos de inércia;

E : módulo de elasticidade do aço;

C_w : constante de empenamento, que para seções tubulares é igual a zero;

G : módulo de elasticidade transversal do aço;

J : constante de torção da seção transversal;

r_o : raio de giração polar.

3 ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

A determinação de esforços solicitantes e deslocamentos nodais é feita considerando a não-linearidade geométrica, caracterizada pela presença de mudanças significativas na geometria da estrutura que afetam os esforços internos, fazendo com que a análise de equilíbrio deva ser realizada na sua configuração deformada.

3.1 Formulação

Para descrever os elementos de treliça espacial, foi utilizada uma formulação Lagrangeana baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais apresentada em Krenk (2009).

Segundo Krenk (2009), as coordenadas da configuração deformada de um elemento genérico de treliça espacial com nós A e B , referenciadas a um sistema cartesiano de coordenadas globais, é dada pelo vetor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = [x_A; y_A; z_A; x_B; y_B; z_B] \quad (22)$$

O vetor de forças internas ($\mathbf{q}$) e a matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}$) deste elemento são dados por:

$$\mathbf{q} = \frac{N}{l_0} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l_0^3} \mathbf{d} \mathbf{d}^T + \frac{N}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{d} = [x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B; x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A] \quad (25)$$

Onde,

N : esforço axial do elemento;

l_0 : comprimento do elemento na configuração indeformada;

E : módulo de elasticidade;

A : área da seção transversal;

$\mathbf{I}$: matriz identidade de ordem 3.

3.2 Método de solução

O problema básico da análise não-linear é definir a sequência de configurações de equilíbrio de uma estrutura sob a ação de forças externas. O equilíbrio dos elementos finitos que compõem a estrutura é avaliado por meio do vetor de forças residuais ($\mathbf{g}$), conforme o sistema de equações não-lineares abaixo:

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{u}) = \lambda_n \mathbf{f} - \mathbf{q}(\mathbf{u}_n) = 0 \quad (26)$$

Onde,

n : passo de carga atual;

λ : fator de carga;

$\mathbf{f}$: vetor de forças externas;

$\mathbf{q}$: vetor de forças internas;

$\mathbf{u}$: deslocamentos nodais.

O algoritmo implementado (Fig. 1) utiliza o método do comprimento de arco com restrição do hiperplano constante. Nele, o vetor $\mathbf{f}$ é obtido por uma combinação de ações entre o peso próprio da estrutura e as forças aplicadas. O carregamento é imposto de forma incremental, tendo a sua intensidade ajustada pelo fator de carga λ até que a carga total seja atingida, ou seja, até que o fator λ seja igual a 1. Cada passo de carga é composto por uma etapa preditora e uma etapa corretora.

A etapa preditora tem início com a determinação da matriz de rigidez tangente, que é mantida constante ao longo das iterações, configurando o método de Newton-Raphson Modificado. Nesta etapa também é feita a primeira estimativa do incremento de carga $\Delta\lambda$ da seguinte forma:

$$\text{Se } \delta u_{f_n}^T \Delta u_{n-1} > 0: \quad \Delta \lambda_n = \frac{\Delta L_n}{\|\delta u_{f_n}\|} \quad (27)$$

$$\text{Se } \delta u_{f_n}^T \Delta u_{n-1} < 0: \quad \Delta \lambda_n = -\frac{\Delta L_n}{\|\delta u_{f_n}\|} \quad (28)$$

Onde,

Δu_{n-1} : incremento total de deslocamento do passo de carga anterior;

δu_{f_n} : subincremento de deslocamento do passo atual devido as forças externas;

ΔL_n : comprimento de arco do passo carga atual.

```

 $\Delta u = 0, u = 0, \lambda = 0, \Delta L_1$ 
Início dos incrementos de carga (etapa incremental/preditora)
for  $n = 1: n_{m\acute{a}x}$ 
    for  $c = 1: c_{m\acute{a}x}$ 
         $\delta u_f = K^{-1} f$ 
         $\Delta \lambda = \frac{\Delta L}{\|\delta u_f\|}$ 
        if  $\delta u_f^T \Delta u < 0$ 
             $\Delta \lambda = -\Delta \lambda$ 
        end
         $\Delta u = \Delta \lambda \delta u_f$ 
         $\Delta u_1 = \Delta u$ 
         $g = (\lambda + \Delta \lambda) f - q(u + \Delta u)$ 
        Início das iterações (etapa iterativa/corretora)
        for  $i = 1: i_{m\acute{a}x}$ 
             $\delta u_r = K^{-1} g$ 
             $\delta \lambda = -\frac{\Delta u_1^T \delta u_r}{\Delta u_1^T \delta u_f}$ 
             $\delta u = \delta u_r + \delta \lambda \delta u_f$ 
             $\Delta u = \Delta u + \delta u$ 
             $\Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda$ 
             $g = (\lambda + \Delta \lambda) f - q(u + \Delta u)$ 
            if  $\|g\| \leq tol \|f\|$  then break
        end (fim das iterações)
        if  $\|g\| \leq tol \|f\|$  then break
         $\Delta L = \Delta L/2$ 
    end
     $u = u + \Delta u$ 
     $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$ 
     $\Delta L = \Delta L \sqrt{\frac{I_a}{i}}$ 
    if  $1 - \lambda < tol$  then break
end (fim dos incrementos de carga)
    
```

Figura 1. Algoritmo de análise implementado

A etapa corretora consiste nas iterações, onde o subincremento de carga ($\delta \lambda$) é calculado de acordo com a seguinte equação:

$$\delta \lambda = -\frac{\Delta u_1^T \delta u_r}{\Delta u_1^T \delta u_f} \quad (29)$$

Onde,

Δu_I : estimativa de incremento de deslocamento feito na etapa preditora;

δu_r : subincremento de deslocamento devido a força residual;

δu_f : subincremento de deslocamento devido as forças externas.

A verificação de convergência nas iterações é feita utilizando o critério de parada apresentado na Eq. (30), onde tol é a tolerância, um valor adotado que normalmente varia de 10^{-3} a 10^{-6} .

$$\|g\| \leq tol \times \|f\| \quad (30)$$

Em caso de não-convergência dentro do número máximo de iterações pré-determinado ($i_{máx}$), foi adotada uma estratégia de cortes em que o comprimento de arco é reduzido à metade e o passo de carga é recalculado. Esse procedimento é limitado pelo número máximo de cortes ($C_{máx}$).

O comprimento de arco para o próximo passo de carga é calculado de forma automática de acordo com a expressão abaixo:

$$\Delta L_n = \Delta L_{n-1} \sqrt{\frac{I_d}{i_{n-1}}} \quad (31)$$

Onde,

I_d : número de iterações desejadas para convergência (pré-determinado pelo usuário);

i_{n-1} : número de iterações necessárias para a convergência no passo de carga anterior.

4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

A otimização é um processo utilizado para determinar a melhor solução para um dado problema. Esse problema é expresso por meio de uma função chamada de objetivo, que pode representar alguma quantidade, qualidade ou qualquer outro fator que pode ser apresentado como um número (Sias, 2014). A obtenção desta solução ótima geralmente envolve a minimização da função objetivo, que está sujeita a algumas restrições, conforme representado no esquema abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{Sujeito a} \quad & c(x) \leq 0 \\ & ceq(x) = 0 \\ & lb \leq x \leq ub \\ & x_o \end{aligned} \quad (32)$$

Onde,

x : variáveis de projeto;

$f(x)$: função objetivo;

$c(x)$: restrições de desigualdade que devem ser atendidas;

$ceq(x)$: restrições de igualdade que devem ser atendidas;

lb : limites inferiores de x ;

ub : limites superiores de x ;

x_0 : valor inicial das variáveis de projeto.

A seguir serão detalhados aspectos importantes referentes a formulação do problema de otimização dimensional implementado. Para solucioná-lo, optou-se pelo método determinístico dos Pontos Interiores, que converge para uma solução criando uma sequência de pontos dentro da região viável com os valores da função objetivo sempre decrescentes. Com isso, ainda que a solução ótima não seja atingida, garante-se que o último ponto encontrado será uma solução viável.

4.1 Função objetivo e variável de projeto

A função objetivo que se deseja minimizar é o custo total da estrutura, representado pela Eq. (33). A função custo está diretamente ligada ao peso da estrutura, variando em função da área da seção transversal das barras, uma vez que a massa específica do aço é constante.

Como os perfis tubulares podem ser circulares, retangulares ou quadrados, buscou-se analisar a otimização de cada tipo de perfil separadamente, variando suas dimensões. Assim, a área da seção a ser minimizada é calculada em função das dimensões do perfil escolhido e, portanto, são essas dimensões que consistem nas variáveis de projeto.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{nb} A(x)_i * \rho * L_i * custo \quad (33)$$

Onde,

nb : quantidade de barras da estrutura;

$A(x)$: área da seção transversal em função das dimensões do perfil escolhido;

ρ : massa específica do aço (7850 kg/m³);

L : comprimento da barra em m;

$custo$: preço do aço por kg;

4.2 Restrições

Foram impostas ao problema de otimização implementado restrições de esforços, esbeltez e deslocamentos nodais de acordo com o recomendado pela ABNT NBR 8800:2008 e pela ABNT NBR 16239:2013, além de uma restrição de carga crítica devido aos efeitos de 2ª ordem e uma restrição referente as dimensões das seções transversais.

Análise de esforços. Esta restrição garante que os esforços solicitantes sejam menores que os esforços resistentes de cálculo, conforme a expressão a seguir:

$$N_{Sd}/N_{Rd} - 1 \leq 0 \quad (34)$$

Sendo que N_{Sd} é obtido pela análise não-linear geométrica, enquanto N_{Rd} é determinado de acordo com o apresentado no item 2.

Índice de esbeltez. O índice de esbeltez (λ) das barras é limitado a um valor máximo ($\lambda_{máx}$), conforme a expressão abaixo:

$$\lambda/\lambda_{máx} - 1 \leq 0 \quad (35)$$

Onde, $\lambda_{máx}$ é definido como igual a 300 para barras tracionadas e igual a 200 para barras comprimidas.

Deslocamentos nodais. Esta restrição limita os deslocamentos nodais da treliça a um valor de deslocamento máximo ($Desl_{máx}$) escolhido de acordo com o estabelecido no Anexo C da ABNT NBR 8800:2008. Sendo que os deslocamentos da estrutura ($Desl$) são obtidos levando em consideração a não-linearidade geométrica.

$$|Desl|/|Desl_{máx}| - 1 \leq 0 \quad (36)$$

Carga crítica. O caminho de equilíbrio de uma estrutura com comportamento não-linear geométrico pode apresentar pontos críticos, como pontos limites de carga ou de deslocamento, usualmente seguidos por trechos em que ocorre perda de rigidez e que, portanto, devem ser evitados. Para isso, o carregamento aplicado deve ser limitado ao valor da primeira carga crítica encontrada no caminho de equilíbrio, lembrando que este último é alterado a cada iteração da otimização devido as mudanças nas variáveis de projeto.

Na restrição abaixo, a carga aplicada e a carga crítica são expressas por meio dos fatores de carga λ_a e λ_{cr} , respectivamente.

$$\lambda_a/\lambda_{cr} - 1 \leq 0 \quad (37)$$

Relação entre as dimensões. Como foram utilizadas variáveis de projeto contínuas, foi necessário inserir restrições referentes as relações limites entre as dimensões de cada tipo de perfil, com o objetivo de obter seções coerentes em relação aos perfis comerciais. Tomou-se como base o catálogo da empresa fabricante de tubos estruturais Vallourec Tubos do Brasil, de onde também foram retirados os limites máximos e mínimos das dimensões das seções transversais.

$$(d/t)_{mín} \leq d/t \leq (d/t)_{máx} \quad (38)$$

$$(b/t)_{mín} \leq b/t \leq (b/t)_{máx} \quad (39)$$

$$(h/t)_{mín} \leq h/t \leq (h/t)_{máx} \quad (40)$$

$$(h/b)_{mín} \leq h/b \leq (h/b)_{máx} \quad (41)$$

Onde, as dimensões d , t , b e h dos perfis tubulares são definidas na Fig. 2.

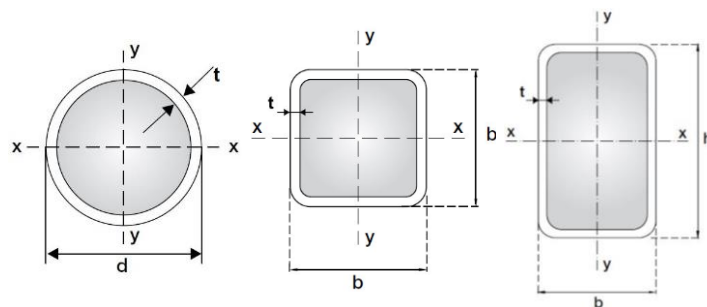


Figura 2. Perfis tubulares circular, quadrado e retangular

5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A rotina de otimização consiste em um módulo do programa computacional Truss3D, que vem sendo implementado na Universidade Federal do Espírito Santo por alunos de graduação e pós-graduação e cuja etapa de pré-processamento foi abordada com detalhes em Novelli et al. (2015a). A implementação foi feita utilizando os recursos de criação de Interface Gráfica do Usuário (GUI) e funções do *Optimization Toolbox* do software Matlab.

Para executar o dimensionamento otimizado considerando a não-linearidade geométrica, o usuário deve inicialmente escolher o tipo de perfil tubular desejado e informar o custo do aço e o deslocamento nodal máximo a ser admitido (Fig. 3).

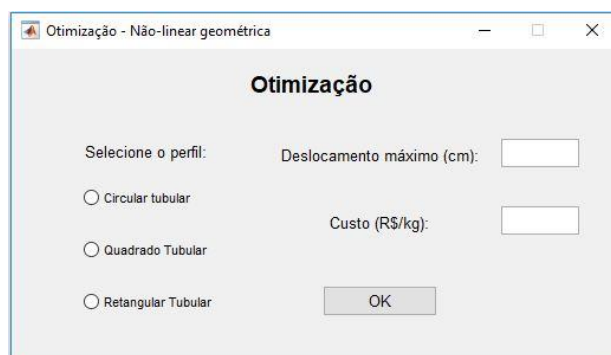


Figura 3. Tela de entrada de dados

Para utilizar o algoritmo de Pontos interiores, presente como função na biblioteca do Matlab, é necessário fornecer um projeto inicial viável (x_0). Por isso, o programa executa primeiramente um pré-dimensionamento, percorrendo a tabela do tipo de perfil escolhido e selecionando o mais leve entre os cinco primeiros que atendem as restrições para ser adotado em todas as barras.

Em seguida, o programa executa o algoritmo de otimização referente ao tipo de perfil selecionado. Cada tipo apresenta uma rotina específica com suas particularidades quanto às restrições, cálculo de propriedades geométricas e variáveis principais.

Em cada iteração da otimização as solicitações internas são recalculadas por meio do algoritmo de análise não-linear utilizando as dimensões encontradas na iteração anterior. Por fim, a solução ótima é apresentada na tela da Fig. 4.

Resultado Otimização - Não-linear Geométrica

Resultado da Otimização

Barra	D (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)
1	71.1			3.2
2	76.2			9.6
3	73.5			8.3
4	72.9			3.3
5	71.1			3.2
6	73.6			8.4
7	71.9			7.0
8	72.3			3.3
9	71.2			3.2
10	72.1			7.0
11	72.7			5.2
12	72.7			3.3
13	71.2			3.2
14	72.8			5.0
15	72.1			3.2
16	71.6			3.4
17	71.1			3.2
18	73.2			3.2
19	72.0			6.4
20	71.3			3.4
21	72.6			3.2

Peso Total (kg): 176.20

Custo Total (R\$): 704.80

Figura 4. Tela de resultados

6 EXEMPLOS

A rotina de otimização foi executada para dois exemplos de treliças espaciais que serão apresentados a seguir. Em todos eles selecionou-se o aço VMB 250, que possui resistência ao escoamento $f_y = 250$ MPa e resistência à ruptura $f_u = 400$ Mpa. O custo do aço foi considerado como igual a 4,00 R\$/kg.

A treliça do primeiro exemplo foi estudada anteriormente na literatura (Yang & Leu, 1991; Krenk & Hededal, 1995; Krenk, 2009) e é inicialmente utilizada para validar o algoritmo de análise implementado. O domo treliçado do segundo exemplo foi abordado em Novelli et al., (2015a, b), por meio de um procedimento de dimensionamento convencional com análise de 1ª ordem e sem utilização de técnicas de otimização.

6.1 Treliça com 12 barras

A treliça espacial apresentada na Fig. 5 é composta por 12 barras, todas com a mesma rigidez axial EA. Uma força de intensidade F atua no nó superior central e uma força de $1,5F$ é aplicada nos dois nós vizinhos. Como pode ser observado na Fig. 6, os caminhos de equilíbrio traçados pelo programa computacional desenvolvido apresentaram boa concordância com aqueles obtidos por Krenk (2009), validando o algoritmo implementado.

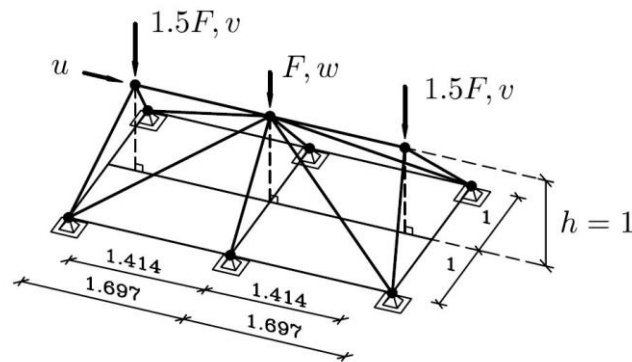


Figura 5. Treliça espacial com 12 barras (dimensões em m)

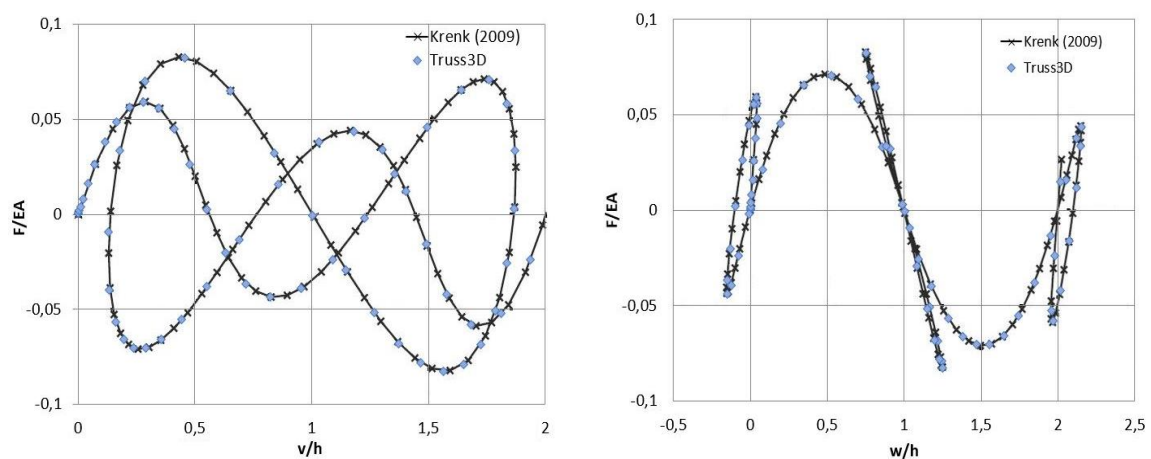


Figura 6. Caminhos de equilíbrio referentes às direções v e w

Para executar o dimensionamento otimizado, adotou-se $F = 300$ kN (Fig. 7), $E = 200000$ MPa e os deslocamentos nodais foram limitados a 1,3 cm. Na Tabela 1 são apresentados os resultados obtidos com a utilização de perfis tubulares circulares, quadrados e retangulares.

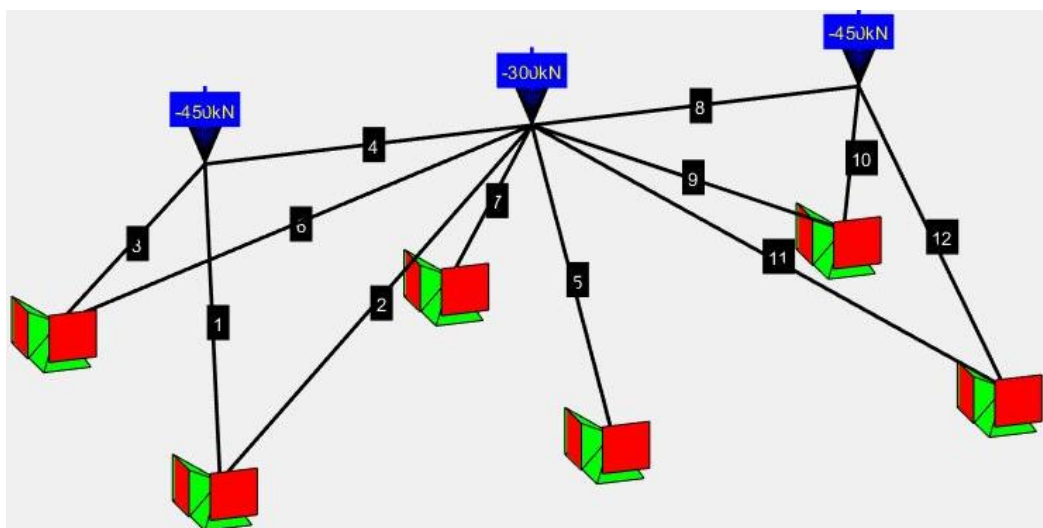


Figura 7. Carregamento aplicado e numeração das barras

Tabela 1. Dimensionamento otimizado da treliça espacial com 12 barras

Barra	Perfil Circular		Perfil Quadrado		Perfil Retangular		
	d (mm)	t (mm)	b (mm)	t (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)
1	134,7	5,0	95,1	5,7	123,1	102,1	4,7
2	61,3	3,2	61,8	3,6	70,9	40,6	3,6
3	128,1	5,3	94,7	5,7	123,4	102,6	4,7
4	88,9	3,2	62,7	3,6	68,0	58,4	3,6
5	86,6	4,3	68,6	3,6	76,9	66,0	3,6
6	64,5	3,2	61,6	3,6	72,1	42,7	3,7
7	99,0	3,2	67,6	3,7	76,1	65,4	3,6
8	88,9	3,2	62,7	3,6	67,9	58,4	3,6
9	64,8	3,8	62,8	3,6	71,9	42,7	3,6
10	129,4	5,3	118,8	4,4	123,9	102,9	4,6
11	54,7	3,2	61,3	3,6	70,2	40,3	3,6
12	136,5	4,9	119,1	4,4	123,1	103,1	4,7
Peso (kg)		177,82	189,85		185,56		
Custo(R\$)		711,28	759,4		742,24		

Analisando os resultados, é possível observar que o perfil circular se mostrou como o mais vantajoso, por gerar um dimensionamento que atende à todas as restrições impostas, porém com um menor custo. A economia proporcionada por este perfil foi de aproximadamente 6% em relação ao perfil quadrado e 4% em relação ao perfil retangular.

6.2 Domo de 52 barras

O exemplo de treliça espacial refere-se a um domo treliçado com 52 barras e com uma força vertical de 100 kN aplicada em seu ápice. As dimensões da estrutura são apresentadas na Fig. 8, a numeração das barras e o carregamento aplicado na Fig. 9.

A otimização foi realizada adotando um deslocamento nodal máximo de 4,8 cm. Os resultados para os diferentes tipos de perfil tubular são comparados nas Tabelas 2 e 3 com os apresentados em Novelli et al., (2015a, b).

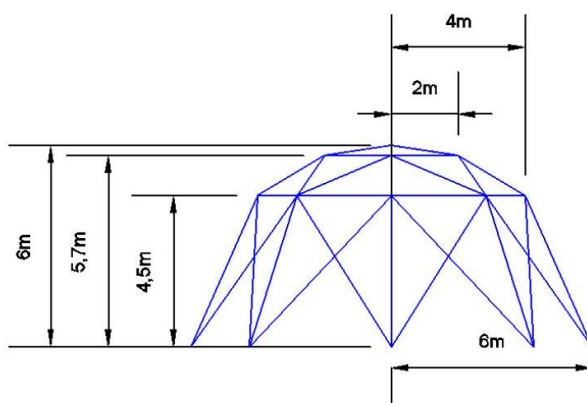


Figura 8. Dimensões do domo de 52 barras

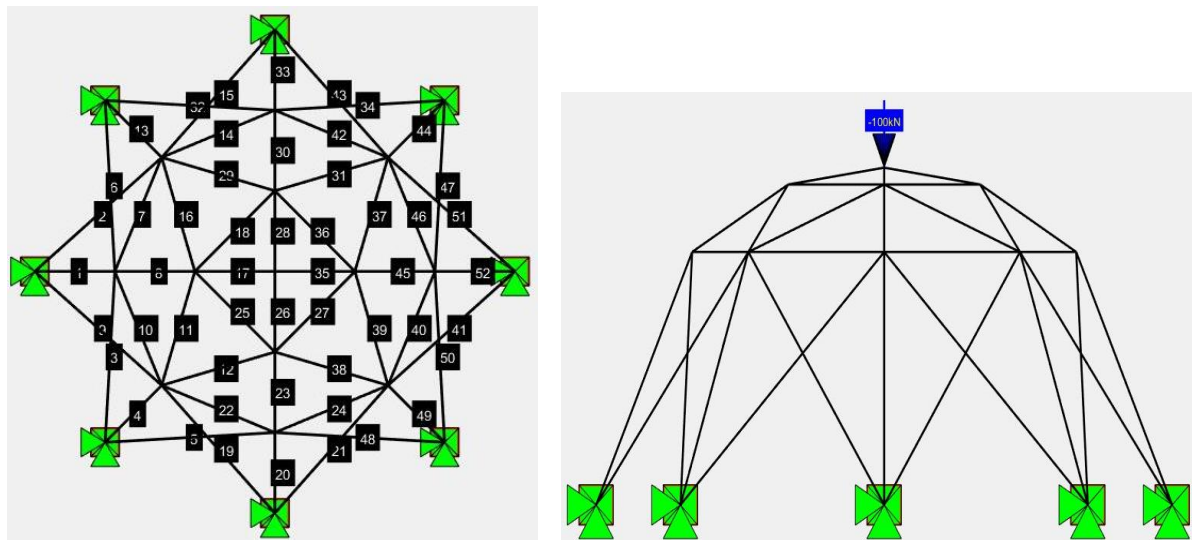


Figura 9. Numeração das barras e carregamento aplicado no domo

Tabela 2. Comparação para perfis circular e quadrado

(continua)

Barra	Perfil Circular				Perfil Quadrado			
	Novelli et al. (2015b) d (mm)	t (mm)	Otimizado d (mm)	t (mm)	Novelli et al. (2015b) b (mm)	t (mm)	Otimizado b (mm)	t (mm)
1	88,9	3,6	73,1	3,2	70	3,6	63,8	3,6
2	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
3	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
4	88,9	3,6	73,1	3,2	70	3,6	63,8	3,6
5	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
6	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
7	33,4	3,2	66,3	4,1	50	3,6	50,0	3,6
8	48,3	4,0	72,6	3,3	50	3,6	50,0	3,6
9	101,6	4,0	91,0	3,2	80	3,6	79,3	3,6
10	33,4	3,2	59,5	3,3	50	3,6	50,0	3,6
11	60,3	3,6	72,6	3,3	50	3,6	50,0	3,6
12	60,3	3,6	56,4	3,3	50	3,6	50,0	3,6
13	88,9	3,6	73,1	3,2	70	3,6	63,8	3,6
14	33,4	3,2	72,4	3,4	50	3,6	50,0	3,6
15	101,6	4,0	91,0	3,2	80	3,6	79,3	3,6
16	60,3	3,6	81,4	3,3	50	3,6	50,0	3,6
17	88,9	4,5	115,4	4,5	80	4,0	89,5	3,6
18	48,3	4,5	58,2	3,5	50	3,6	50,1	3,6
19	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
20	88,9	3,6	73,0	3,2	70	3,6	63,8	3,6
21	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
22	33,4	3,2	59,7	3,3	50	3,6	50,0	3,6

CILAMCE 2017

Tabela 2. Comparação para perfis circular e quadrado

(conclusão)

Barra	Perfil Circular				Perfil Quadrado			
	Novelli et al. (2015b) d (mm)	t (mm)	Otimizado d (mm)	t (mm)	Novelli et al. (2015b) b (mm)	t (mm)	Otimizado b (mm)	t (mm)
23	48,3	4,0	66,6	3,2	50	3,6	50,0	3,6
24	33,4	3,2	66,7	3,3	50	3,6	50,0	3,6
25	48,3	4,5	49,1	4,3	50	3,6	50,1	3,6
26	88,9	4,5	97,9	3,8	80	4,0	89,5	3,6
27	48,3	4,5	49,7	4,1	50	3,6	50,1	3,6
28	88,9	4,5	106,5	3,3	80	4,0	89,5	3,6
29	60,3	3,6	60,1	3,3	50	3,6	50,0	3,6
30	48,3	4,0	74,1	3,2	50	3,6	50,0	3,6
31	60,3	3,6	56,4	3,4	50	3,6	50,0	3,6
32	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
33	88,9	3,6	73,3	3,2	70	3,6	63,8	3,6
34	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
35	88,9	4,5	69,1	10,4	80	4,0	89,5	3,6
36	48,3	4,5	49,6	6,1	50	3,6	50,2	3,6
37	60,3	3,6	49,8	4,3	50	3,6	50,0	3,6
38	60,3	3,6	64,3	3,5	50	3,6	50,0	3,6
39	60,3	3,6	60,1	3,6	50	3,6	50,0	3,6
40	33,4	3,2	71,2	3,2	50	3,6	50,0	3,6
41	101,6	4,0	91,0	3,2	80	3,6	79,3	3,6
42	33,4	3,2	84,4	3,3	50	3,6	50,0	3,6
43	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
44	88,9	3,6	73,4	3,2	70	3,6	63,8	3,6
45	48,3	4,0	71,5	3,3	50	3,6	50,0	3,6
46	33,4	3,2	72,8	3,4	50	3,6	50,0	3,6
47	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
48	101,6	4,0	91,0	3,2	80	3,6	79,3	3,6
49	88,9	3,6	73,1	3,2	70	3,6	63,8	3,6
50	101,6	4,0	90,8	3,2	80	3,6	79,3	3,6
51	101,6	4,0	90,9	3,2	80	3,6	79,3	3,6
52	88,9	3,6	73,2	3,2	70	3,6	63,8	3,6
Peso (kg)	1609,90		1369,40		1598,40		1565,28	
Custo (R\$)	6439,60		5477,60		6393,60		6261,12	

Tabela 3. Comparação para perfil retangular

Perfil Retangular													
Barra	Novelli et al. (2015a)			Otimizado			Barra	Novelli et al. (2015a)			Otimizado		
	h (mm)	b (mm)	t (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)		h (mm)	b (mm)	t (mm)	h (mm)	b (mm)	t (mm)
1	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6	27	60	40	3,6	60,1	40,2	3,6
2	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	28	120	60	4,0	97,3	83,8	3,6
3	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	29	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6
4	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6	30	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6
5	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	31	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6
6	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	32	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
7	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	33	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6
8	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	34	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
9	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	35	120	60	4,0	97,3	83,8	3,6
10	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	36	60	40	3,6	60,2	40,0	3,6
11	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6	37	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6
12	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6	38	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6
13	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6	39	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6
14	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	40	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6
15	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	41	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
16	70	50	3,6	60,0	40,5	3,6	42	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6
17	120	60	4,0	97,3	83,8	3,6	43	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
18	60	40	3,6	60,4	40,0	3,6	44	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6
19	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	45	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6
20	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6	46	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6
21	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6	47	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
22	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	48	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
23	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	49	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6
24	60	40	3,6	60,0	40,0	3,6	50	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
25	60	40	3,6	60,3	40,0	3,6	51	100	80	4,0	90,4	77,9	3,6
26	120	60	4,0	97,3	83,8	3,6	52	110	60	4,0	72,7	62,7	3,6
Peso (kg)								1866,56			1637,70		
Custo (R\$)								7466,26			6550,80		

Comparando os resultados obtidos pelo processo de otimização implementado com o dimensionamento convencional, observa-se que os três tipos de perfil tubular resultaram em estruturas mais leves e baratas. A economia chegou a cerca de 15% com o perfil circular, 12% com o perfil retangular e apenas 2% com o perfil quadrado.

7 CONCLUSÃO

Com a implementação da rotina de otimização foi possível determinar uma solução ótima para estruturas treliçadas que atendesse a todos os critérios estabelecidos pelas normas brasileiras vigentes com um menor custo. Um fator importante para a eficiência do processo de dimensionamento foi a consideração da não-linearidade geométrica, uma vez que esta possibilita a obtenção de resultados baseados em um comportamento estrutural mais próximo do real e, aliada à restrição de carga crítica, evita que a solução ótima gerada apresente problemas de instabilidade.

O programa computacional desenvolvido possui uma interface gráfica de fácil utilização e permite que sejam considerados três tipos de seções transversais, referentes aos perfis tubulares circular, quadrado e retangular. Com isso, pode-se comparar os diferentes tipos de seção para definir qual o mais viável a ser adotado. A partir dos exemplos estudados, o perfil circular se mostrou como o mais vantajoso, gerando estruturas mais leves e baratas.

Um dimensionamento que leve em conta a não-linearidade geométrica tende a ser mais oneroso que um dimensionamento com análise de 1ª ordem, no entanto, o uso de técnicas de otimização torna a solução competitiva. Isso foi demonstrado ao comparar os resultados da otimização com um processo de dimensionamento convencional, onde foram observadas reduções significativas no custo total da estrutura.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estrutura mista de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 16239: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações com perfis tubulares. Rio de Janeiro, 2013.
- Azolin, L. G.; Novelli, L.; Alves, E. C., 2016. Projeto otimizado de estruturas tubulares espaciais submetidas a carregamento dinâmico. In: XXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília.
- Crisfield, M. A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers & Structures*, vol. 13, n. 1–3, pp. 55–62.
- Fonseca, M., 2007. *Otimização de estruturas treliçadas planas e espaciais sob carregamento estáticos e dinâmicos, usando algoritmos genéticos e redes neurais*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.
- Krenk, S., 2009. *Non-linear modeling of solids and structures*. New York: Cambridge University Press.

- Krenk, S.; Hededal, O., 1995. A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 123, n. 1–4, pp. 95–107.
- Martinelli, L. B.; Alves, E. C.; Novelli, L.; Azolin, L. G., 2016. Um sistema para análise dinâmica e não linear de treliças espaciais. In: XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília.
- Novelli, L.; Alves, E. C.; Filho, H. G.; Garozi, M. J. P.; Azevedo, M. S., 2015a. Ferramenta computacional para o dimensionamento de estruturas tubulares treliçadas. In: XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro.
- Novelli, L.; Alves, E. C.; Filho, H. G.; Garozi, M. J. P.; Sias, F. M.; Azevedo, M. S., 2015b. Otimização do dimensionamento de estruturas tubulares espaciais de aço. In: XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro.
- Ramm, E., 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In Wunderlich, W., Stein, E., & Bathe, K. J., eds, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 63–89. Springer-Verlag.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 7, pp. 529–551.
- Sias, F. M., 2014. *Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.
- Wempner, G. A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, n. 11, pp. 1581–1599.
- Yang, Y.-B.; Leu, L.-J., 1991. Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, pp. 121–131.