



PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE TRELIÇAS ESPACIAIS

Larissa Bastos Martinelli

Elcio Cassimiro Alves

larissabastosm@gmail.com

elcio.calves1@gmail.com

Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari, 514, Cep 29097-910, Goiabeiras - Vitória - ES – Brazil

Resumo. A análise estrutural considerando a não-linearidade geométrica da estrutura possibilita uma avaliação de seu comportamento mais próxima do real, além de evitar problemas estruturais indesejados. Ferramentas que realizam esse tipo mais complexo de análise não estão disponíveis de forma gratuita, portanto, buscou-se desenvolver um programa computacional com interface de fácil manuseio para realizar a análise não-linear geométrica de treliças espaciais. A rotina computacional foi desenvolvida por meio da plataforma Matlab e utiliza o método do comprimento de arco. Exemplos numéricos são apresentados para validação do programa.

Palavras-chave: Programa Computacional, Não-Linear, Treliças, Espaciais.

1 INTRODUÇÃO

Sistemas treliçados espaciais possuem a capacidade de vencer grandes vãos e podem ser utilizados em diversas aplicações práticas da engenharia, tais como torres de linhas de transmissão, pontes e coberturas. A concepção de estruturas cada vez mais complexas tem exigido a realização de análises não-lineares para a obtenção de resultados mais realistas sobre o comportamento estrutural e garantir sua eficiência.

Existem dois tipos principais de não-linearidade: o primeiro tipo é a não-linearidade física, que está relacionada ao comportamento mecânico do material, e o segundo tipo é a não-linearidade geométrica, que será abordada neste estudo, em que as mudanças significativas na geometria da estrutura afetam os esforços internos, fazendo com que a análise de equilíbrio deva ser realizada na sua configuração deformada.

Os problemas que apresentam não-linearidade geométrica, com base no método dos elementos finitos (MEF), podem ser abordados através de diferentes formulações, utilizando as descrições Lagrangeana ou Euleriana. A descrição Lagrangeana mede as mudanças de configuração da estrutura a partir de um referencial fixo no espaço, enquanto a descrição Euleriana utiliza um referencial móvel. Neste trabalho optou-se por uma formulação Lagrangeana baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais apresentada em Krenk (2009).

Como resultado da discretização do problema estrutural por meio do método dos elementos finitos, é gerado um sistema de equações não-lineares cuja solução necessita da aplicação de métodos numéricos. Dentre os diversos métodos propostos na literatura, o método do comprimento de arco, originalmente desenvolvido por Wempner (1971) e Riks (1972, 1979) e posteriormente modificado por diversos autores (Crisfield, 1981; Ramm, 1981; Forde & Stiemeier, 1987), é considerado como o mais robusto para resolução de equações não-lineares em mecânica dos sólidos e estruturas.

No estudo de sistemas estruturais com comportamento não-linear, programas computacionais atuam como grandes facilitadores no processo de modelagem, análise e avaliação de resultados. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho foi desenvolver um programa computacional com interface gráfica interativa de fácil manuseio, que possibilita a execução e visualização deste tipo de análise estrutural.

As rotinas computacionais foram desenvolvidas por meio do software Matlab e fazem parte do programa Truss3D, que vem sendo desenvolvido por alunos de graduação e pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo. Algumas funções do programa já foram explicadas em publicações anteriores (Novelli et al., 2015; Martinelli et al., 2016; Martinelli & Alves, 2017) e nesta versão serão apresentadas as rotinas que realizam a análise não-linear geométrica de estruturas treliçadas espaciais utilizando o método de comprimento de arco.

2 FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS

A seguir será apresentada resumidamente a formulação utilizada para descrever os elementos de treliça espacial e, conseqüentemente, determinar a expressão para a matriz de rigidez e para o vetor de forças internas. Mais detalhes podem ser obtidos em Krenk (2009).

Considerando um elemento de treliça espacial genérico com nós A_0 e B_0 , sua posição inicial é dada pelo vetor $\mathbf{x}_0$, que contém as coordenadas nodais referenciadas a um sistema cartesiano de coordenadas globais.

$$\mathbf{x}_0 = [x_{A_0}; y_{A_0}; z_{A_0}; x_{B_0}; y_{B_0}; z_{B_0}] \quad (1)$$

Após sofrer um deslocamento, os nós da barra passam a ocupar as posições A e B , respectivamente. A configuração deformada é dada pelo vetor $\mathbf{x}$, que se relaciona com a posição inicial por meio dos deslocamentos nodais $\mathbf{u}$.

$$\mathbf{x} = [x_A; y_A; z_A; x_B; y_B; z_B] \quad (2)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \quad (3)$$

O comprimento inicial da barra (l_0) e o comprimento após o deslocamento (l) são dados por:

$$l_0^2 = \mathbf{x}_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{C} \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

$$l^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} \quad (5)$$

Onde, $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de ordem 3.

Substituindo as Eq. (3), (4) e (5) na expressão da deformação de Green, temos:

$$\varepsilon_G = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})^T \mathbf{C} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - \mathbf{x}_0^T \mathbf{C} \mathbf{x}_0}{2l_0^2} = \frac{1}{l_0^2} (\mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{u})^T \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (6)$$

A partir da equação anterior, define-se a deformação virtual:

$$\delta \varepsilon_G = \frac{1}{l_0^2} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u})^T \mathbf{C} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{l_0^2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{u} \quad (7)$$

O vetor de forças internas ($\mathbf{q}$) pode ser obtido a partir do trabalho virtual interno:

$$\delta W_{int} = \int_0^{l_0} N \delta \varepsilon_G ds = \frac{N}{l_0} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{u} \quad (8)$$

$$\mathbf{q} = \frac{N}{l_0} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \quad (9)$$

Onde, N é o esforço axial do elemento.

A matriz de rigidez tangente ($\mathbf{K}$) é dada pela variação do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos:

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{u}} = \frac{EA}{l_0^3} \mathbf{d} \mathbf{d}^T + \frac{N}{l_0} \mathbf{C} \quad (10)$$

Onde, E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal e $\mathbf{d}$ é um vetor definido da seguinte forma:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C} \mathbf{x} = [x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B; x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A] \quad (11)$$

3 MÉTODO DE SOLUÇÃO

O problema básico da análise não-linear é definir a sequência de configurações de equilíbrio de uma estrutura sob a ação de forças externas, sendo o carregamento usualmente aplicado de forma incremental. Para os elementos finitos que representam esta estrutura, as condições de equilíbrio podem ser expressas pelo seguinte sistema de equações não-lineares.

$$\mathbf{f}_n - \mathbf{q}(\mathbf{u}_n) = 0 \quad (12)$$

Onde,

n : passo de carga atual;

$\mathbf{f}$: vetor de forças externas nodais;

$\mathbf{q}$: vetor de forças internas nodais;

$\mathbf{u}$: deslocamentos nodais.

Para tal é utilizado o conceito de força residual ($\mathbf{g}$), que descreve a parcela das forças externas que não está balanceada pelas forças internas:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \mathbf{q}(\mathbf{u}) = 0 \quad (13)$$

A proposta do método do comprimento de arco é, partindo de um estado de equilíbrio conhecido, utilizar simultaneamente incrementos de carga e de deslocamento ao longo de iterações que satisfaçam as condições de equilíbrio da estrutura e uma restrição imposta referente ao comprimento de arco, para alcançar o próximo ponto de equilíbrio. Com isso, é possível traçar o caminho de equilíbrio da estrutura de forma eficaz, superando pontos limites de carga, de deslocamento e pontos de bifurcação.

No algoritmo desenvolvido (Fig. 1), o carregamento é dado através de um vetor de força de referência $\mathbf{F}$, que armazena a direção e sentido do carregamento e cuja intensidade é ajustada pelo fator de carga λ . Cada passo de carga é composto por duas etapas: a etapa preditora e a etapa corretora.

Na etapa preditora, são estimados os valores iniciais dos incrementos de carga ($\Delta\lambda$) e de deslocamento ($\Delta\mathbf{u}$). Esta primeira estimativa de $\Delta\lambda$ é chamada de preditor e é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ Se } \delta\mathbf{u}_{f_n}^T \Delta\mathbf{u}_{n-1} > 0 \\ \Delta\lambda_n &= \frac{\Delta L_n}{\|\delta\mathbf{u}_{f_n}\|} \\ & \bullet \text{ Se } \delta\mathbf{u}_{f_n}^T \Delta\mathbf{u}_{n-1} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Delta\lambda_n = -\frac{\Delta L_n}{\|\delta u_{f_n}\|} \quad (15)$$

Onde,

Δu_{n-1} : incremento total de deslocamento do passo de carga anterior;

δu_{f_n} : subincremento de deslocamento do passo atual devido a força de referência;

ΔL_n : comprimento de arco do passo carga atual.

```

 $\Delta u = 0, u = 0, \lambda = 0, \Delta L_1$ 
Início dos incrementos de carga (etapa incremental/preditora)
for  $n = 1: n_{m\acute{a}x}$ 
    for  $c = 1: c_{m\acute{a}x}$ 
         $\delta u_f = K^{-1} F$ 
         $\Delta\lambda = \frac{\Delta L}{\|\delta u_f\|}$ 
        if  $\delta u_f^T \Delta u < 0$ 
             $\Delta\lambda = -\Delta\lambda$ 
        end
         $\Delta u = \Delta\lambda \delta u_f$ 
         $\Delta u_1 = \Delta u$ 
         $g = (\lambda + \Delta\lambda)F - q(u + \Delta u)$ 
        Início das iterações (etapa iterativa/corretora)
        for  $i = 1: i_{m\acute{a}x}$ 
             $\delta u_r = K^{-1} g$ 
             $\delta\lambda = -\frac{\Delta u_1^T \delta u_r}{\Delta u_1^T \delta u_f}$ 
             $\delta u = \delta u_r + \delta\lambda \delta u_f$ 
             $\Delta u = \Delta u + \delta u$ 
             $\Delta\lambda = \Delta\lambda + \delta\lambda$ 
             $g = (\lambda + \Delta\lambda)F - q(u + \Delta u)$ 
            if  $\|g\| \leq tol\|F\|$  then break
        end (fim das iterações)
        if  $\|g\| \leq tol\|F\|$  then break
         $\Delta L = \Delta L/2$ 
    end
     $u = u + \Delta u$ 
     $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ 
     $\Delta L = \Delta L \sqrt{\frac{I_d}{i}}$ 
end (fim dos incrementos de carga)
    
```

Figura 1. Algoritmo de análise implementado

A etapa corretora consiste nas iterações, onde são calculados os subincrementos de carga ($\delta\lambda$) e de deslocamento (δu). O cálculo de $\delta\lambda$ é consequência do tipo de restrição utilizada. No algoritmo implementado, optou-se pela restrição do hiperplano constante, que resulta em:

$$\delta\lambda = -\frac{\Delta u_1^T \delta u_r}{\Delta u_1^T \delta u_f} \quad (16)$$

Onde,

Δu_f : estimativa de incremento de deslocamento feito na etapa preditora;

δu_r : subincremento de deslocamento devido a força residual;

δu_f : subincremento de deslocamento devido a força de referência.

As iterações terminam quando um critério de parada é satisfeito. Neste trabalho foi adotado o critério de parada abaixo:

$$\|g\| \leq tol \times \|F\| \quad (17)$$

Onde tol é a tolerância, um valor adotado que normalmente varia de 10^{-3} a 10^{-6} .

Em caso de não-convergência dentro do número máximo de iterações pré-determinado ($i_{máx}$), o comprimento de arco é reduzido à metade e o passo de carga é recalculado. Esse procedimento pode ocorrer até o número máximo de cortes ($c_{máx}$) ser atingido.

O comprimento de arco para o próximo passo de carga é calculado de forma automática de acordo com a expressão abaixo:

$$\Delta L_n = \Delta L_{n-1} \sqrt{\frac{I_d}{i_{n-1}}} \quad (18)$$

Onde,

I_d : número de iterações desejadas para convergência (pré-determinado pelo usuário);

i_{n-1} : número de iterações necessárias para a convergência no passo de carga anterior.

Observa-se no algoritmo da Fig. 1 que a matriz de rigidez é determinada apenas no início de cada passo de carga, mantendo-se constante ao longo das iterações, configurando o método de Newton-Raphson Modificado.

4 PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa computacional criado faz parte da plataforma Truss3D, que vem sendo implementada na Universidade Federal do Espírito Santo por alunos de graduação e pós-graduação. Este foi desenvolvido utilizando os recursos de criação de Interface Gráfica do Usuário (GUI) do software Matlab e apresenta de forma integrada as etapas de pré-processamento, análise e pós-processamento.

4.1 Pré-processamento

Na tela inicial do Truss3D a geometria da estrutura pode ser importada do AutoCAD ou inserida manualmente no próprio programa. Nela também existem comandos para inserção direta dos esforços externos e condições de apoio na estrutura. Em relação a determinação da seção transversal e das propriedades mecânicas, o usuário pode escolher entre valores comerciais retirados de catálogos, ou ainda digitar os valores desejados. A etapa de pré-processamento foi explicada com detalhes em Novelli et al. (2015).

4.2 Análise

Para a análise do comportamento de uma estrutura considerando a não-linearidade geométrica, além do algoritmo da Fig. 1, também foi implementado uma tela para entrada de dados (Fig. 2), onde o usuário deve escolher se vai considerar ou não o peso próprio da estrutura e indicar o método de solução desejado.

Existem dois métodos de solução implementados, um método de controle de carga, que foi abordado em Martinelli et al. (2016), e o método do comprimento de arco. Para utilização deste último é necessário fornecer o número máximo de incrementos de carga ($n_{máx}$), a tolerância do critério de parada (tol), o valor inicial do comprimento de arco (ΔL) e a quantidade de iterações desejada (I_d).

Figura 2. Tela de entrada de dados

4.3 Pós-processamento

Após finalizado a execução do algoritmo de análise, a tela de saída de resultados é aberta (Fig. 3). Nela, a estrutura e seu carregamento são desenhados, com opções para visualizar na própria estrutura a numeração das barras, a numeração dos nós e as reações de apoio. Esta tela possui ainda quatro menus que apresentam os resultados obtidos e facilitam sua interpretação.

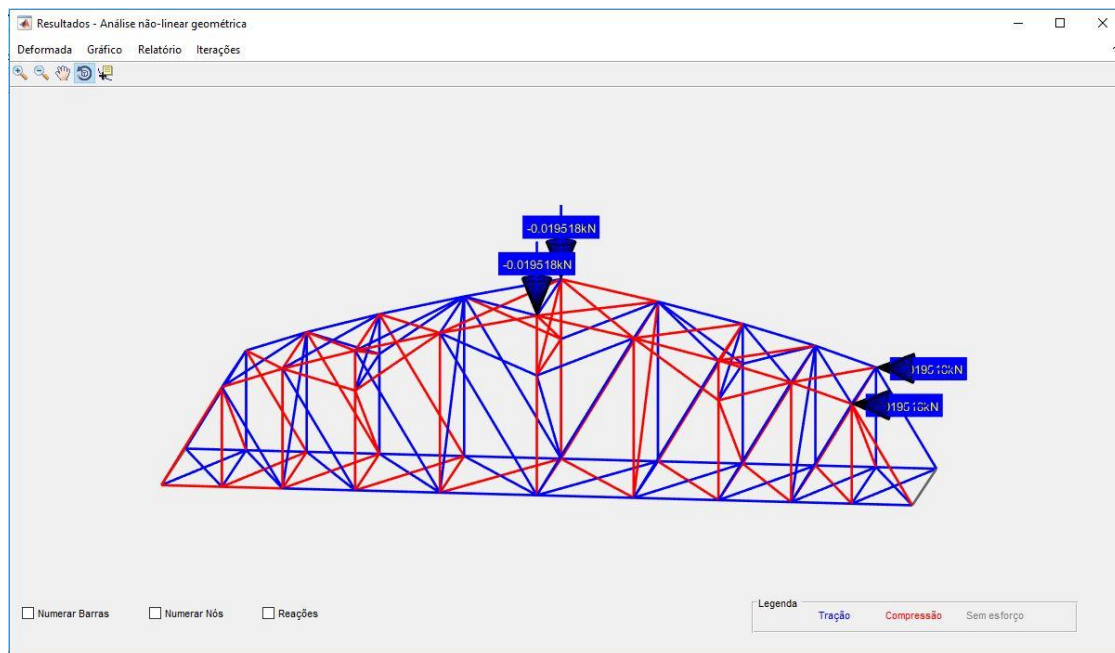


Figura 3. Tela de saída de resultados

O menu “Deformada” (Fig. 4) desenha a geometria da estrutura após cada incremento de carga em contraste com sua configuração inicial. O menu “Gráfico” (Fig. 5) permite que o usuário escolha um nó da estrutura para traçar o caminho de equilíbrio nas direções x, y e z.

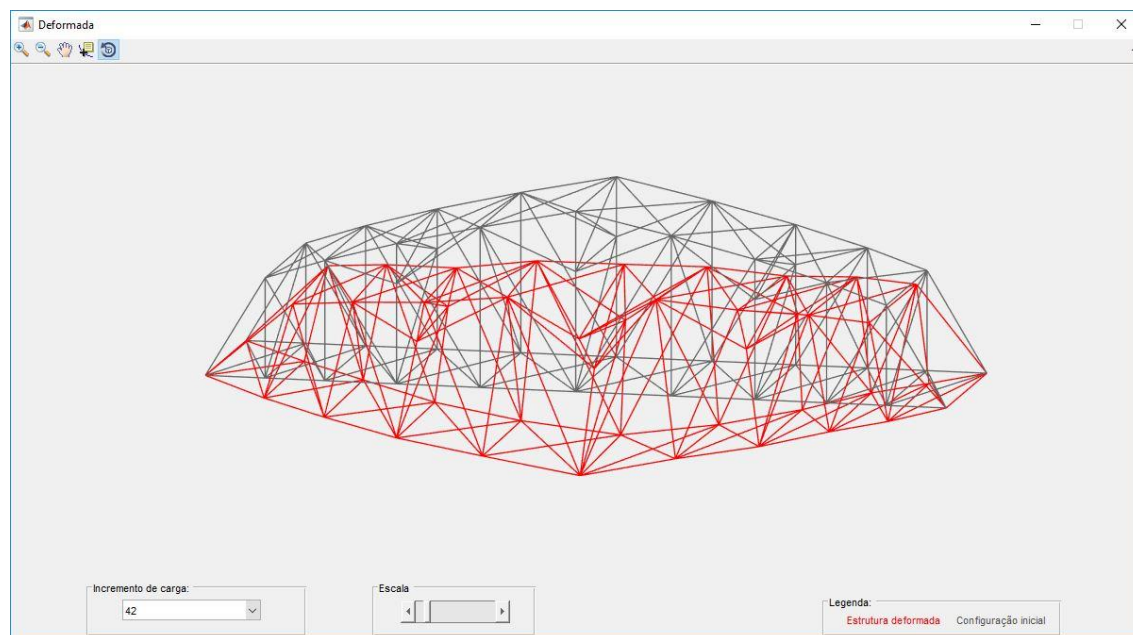


Figura 4. Menu “Deformada”

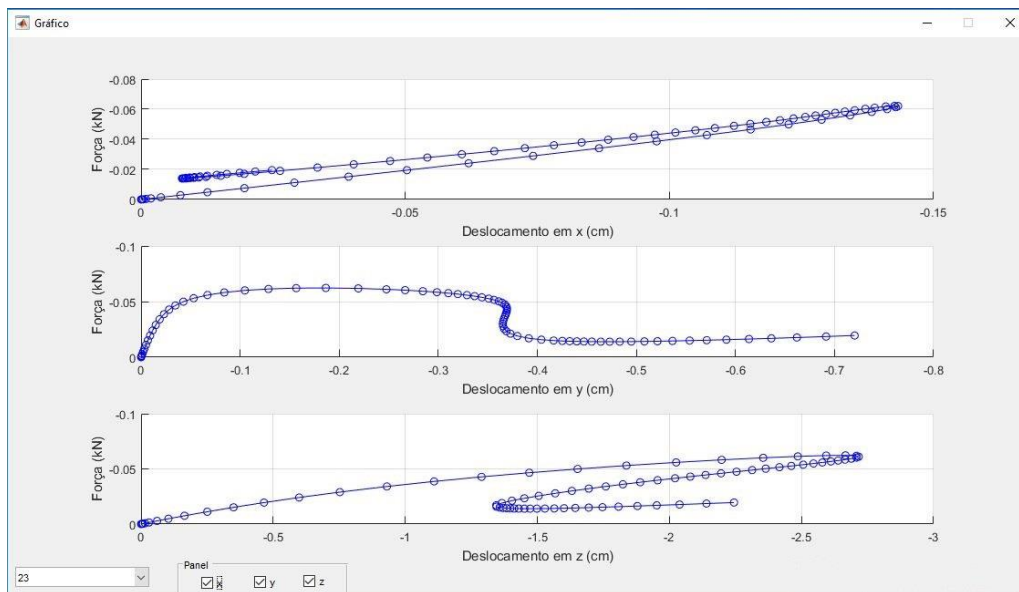


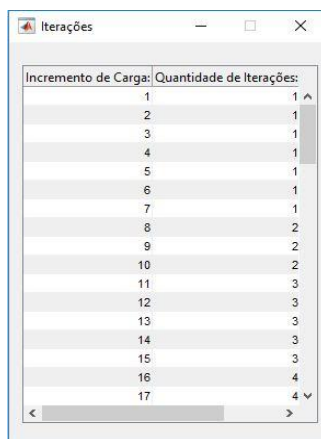
Figura 5. Menu “Gráfico”

O menu “Relatório” (Fig. 6) lista os deslocamentos nodais, esforços internos e reações de apoio obtidos em cada incremento de carga. E por fim, o menu “Iterações” (Fig. 7) relaciona a quantidade de iterações que foram necessárias para a convergência de cada incremento de carga.

The 'Relatório' menu interface includes a dropdown menu to select a load increment and three large tables for displaying results.

- Escolha o incremento de carga:** A dropdown menu.
- Deslocamentos (cm):** A table with columns: Nó, Dir. x, Dir. y, Dir. z.
- Esforços Internos (kN):** A table with columns: Barra, Esf. Interno.
- Reações (kN):** A table with columns: Nó, Dir. x, Dir. y, Dir. z.

Figura 6. Menu “Relatório”



Incremento de Carga	Quantidade de Iterações
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	2
9	2
10	2
11	3
12	3
13	3
14	3
15	3
16	4
17	4

Figura 7. Menu “Iterações”

5 EXEMPLOS

A princípio, 2 exemplos amplamente estudados na literatura serão apresentados para validar o algoritmo de análise implementado. Em seguida, um último exemplo será utilizado para demonstrar o funcionamento do programa desenvolvido.

5.1 Treliça espacial com 12 barras

A treliça espacial apresentada na Fig. 8 foi estudada inicialmente em Yang & Leu (1991), onde apenas parte do caminho de equilíbrio foi gerado. Posteriormente, o caminho de equilíbrio completo foi traçado por Krenk & Hededal (1995), utilizando o algoritmo do resíduo ortogonal, e por Krenk (2009), por meio do método do comprimento de arco com restrição do hiperplano.

A estrutura é composta por 12 barras, todas com a mesma rigidez axial EA , e seu deslocamento é caracterizado pelas direções u , v e w . No nó superior central atua uma força de intensidade F e nos dois nós vizinhos é aplicada uma força de $1,5F$. Todas as dimensões são relativas a altura h .

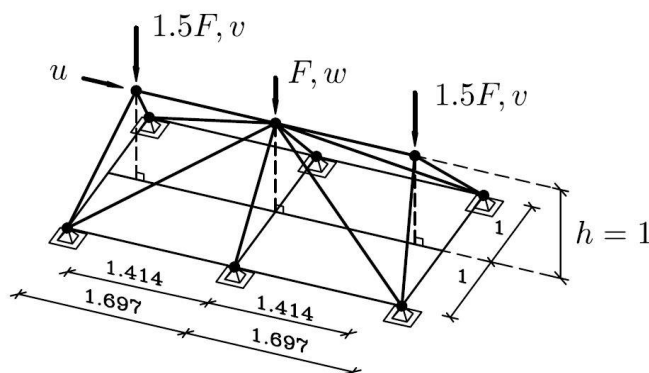


Figura 8. Treliça espacial com 12 barras

O caminho de equilíbrio foi gerado pelo programa computacional desenvolvido com 64 incrementos de carga, utilizando $tol = 10^{-4}$, $\Delta L_I = 0,1$ e $I_d = 4$. Os resultados apresentaram boa concordância com aqueles obtidos por Krenk (2009), como pode ser observado nas Fig. 9, 10 e 11.

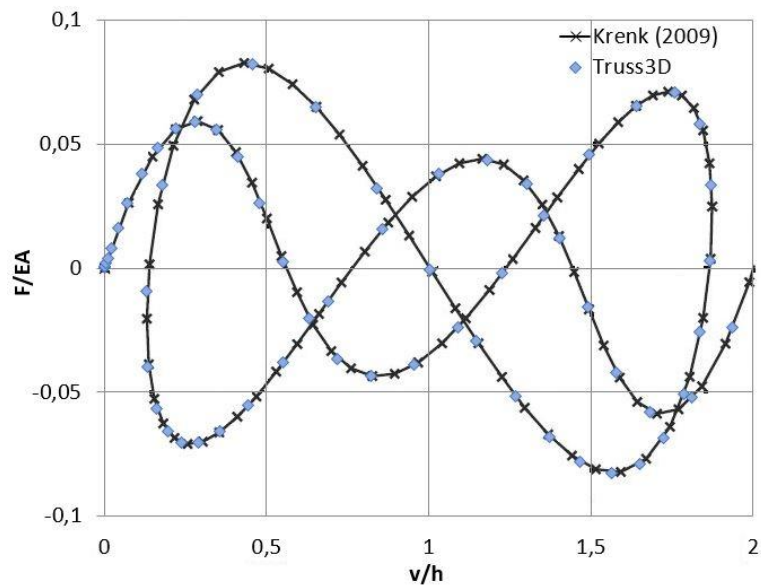


Figura 9. Caminho de equilíbrio referente à direção v

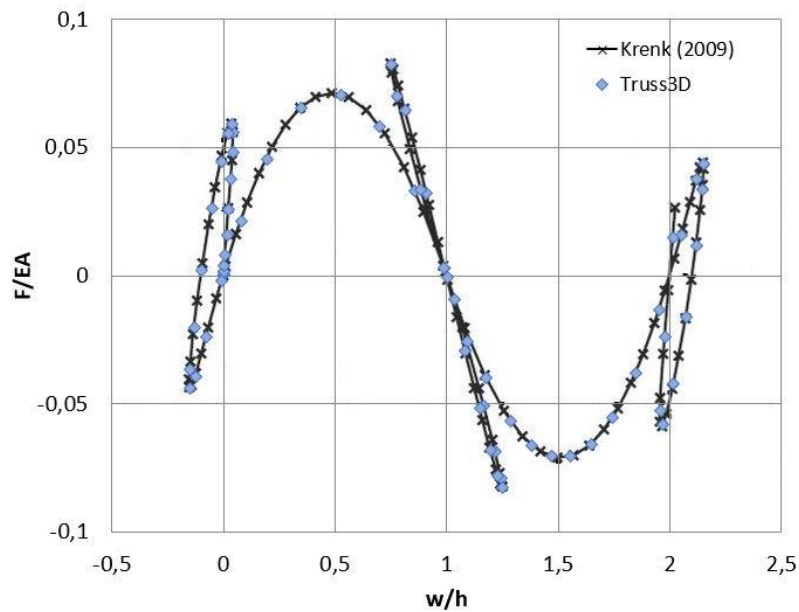


Figura 10. Caminho de equilíbrio referente à direção w

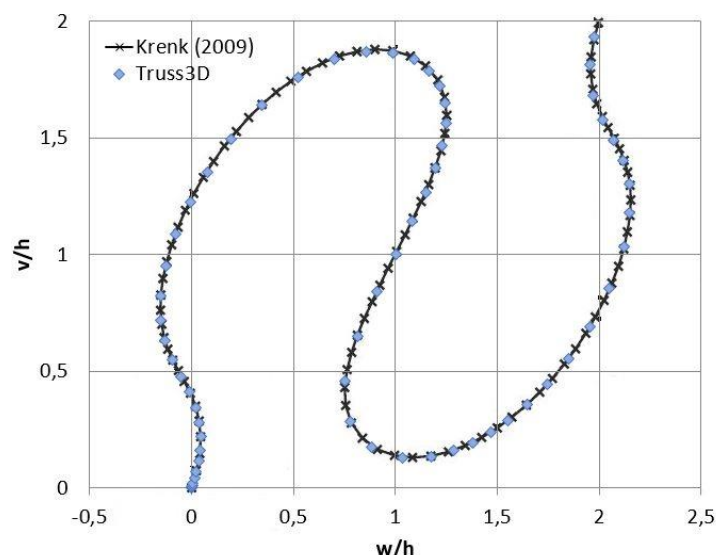


Figura 11. Caminho de equilíbrio (direção w x direção v)

5.2 Domo com 168 barras

A treliça espacial deste exemplo é apresentada na Fig. 12 e suas dimensões na Fig. 13. Ela é composta por 168 barras com rigidez axial $EA = 10^4$ e possui uma carga unitária aplicada em seu ápice. Esta estrutura foi estudada anteriormente por Papadrakakis (1981) e Forde & Stierner (1987), com os quais os resultados obtidos neste estudo serão comparados.

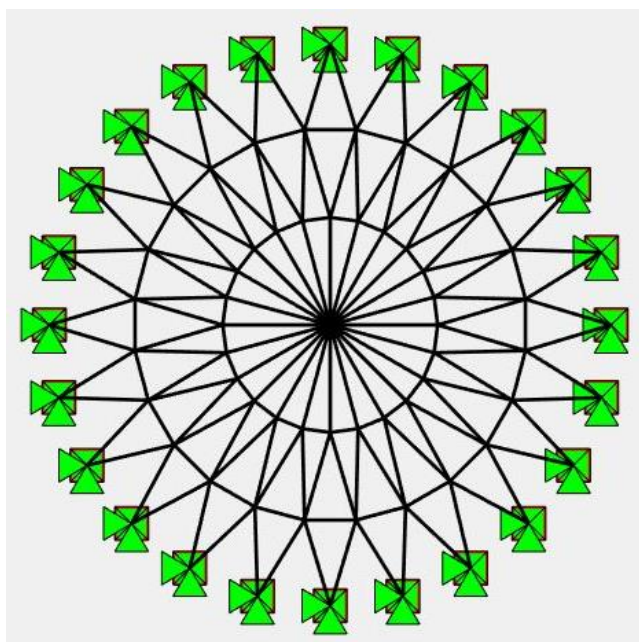


Figura 12. Projeção plana do domo com 168 barras

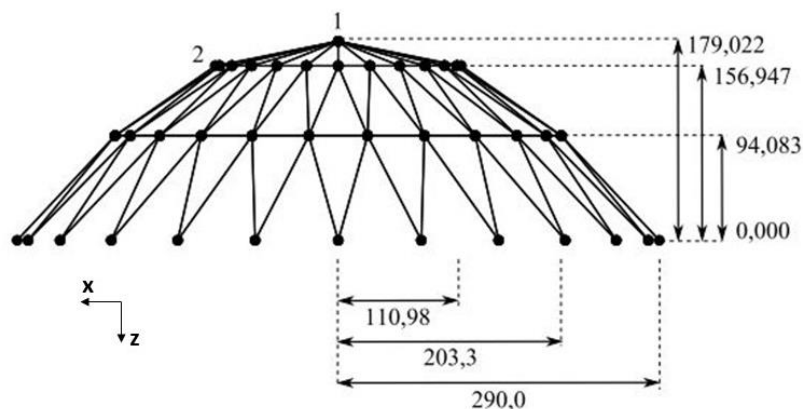


Figura 13. Dimensões do domo com 168 barras

O programa computacional desenvolvido foi executado com 59 incrementos de carga, utilizando $tol = 10^{-4}$, $\Delta L_I = 0,1$ e $I_d = 4$. Os caminhos de equilíbrio obtidos para o deslocamento vertical do nó 1 (Fig. 14), para o deslocamento vertical do nó 2 (Fig. 15) e para o deslocamento horizontal do nó 2 (Fig. 16) estão em concordância com os resultados da literatura.

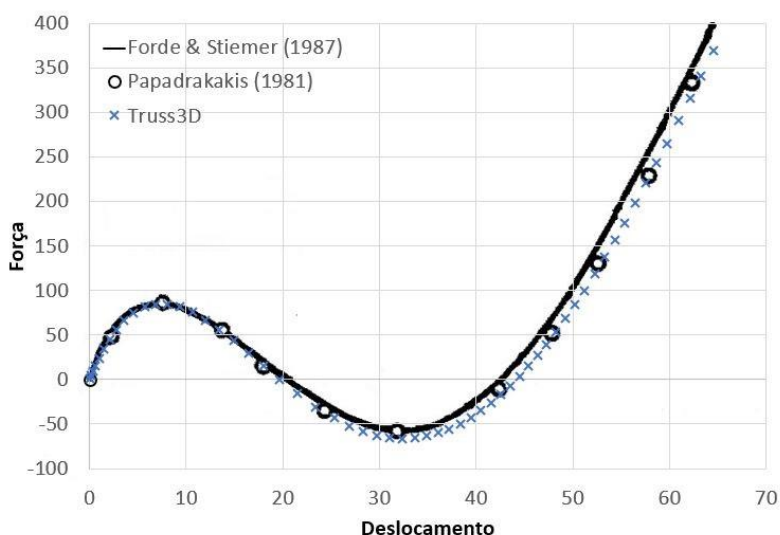


Figura 14. Deslocamento vertical do nó 1

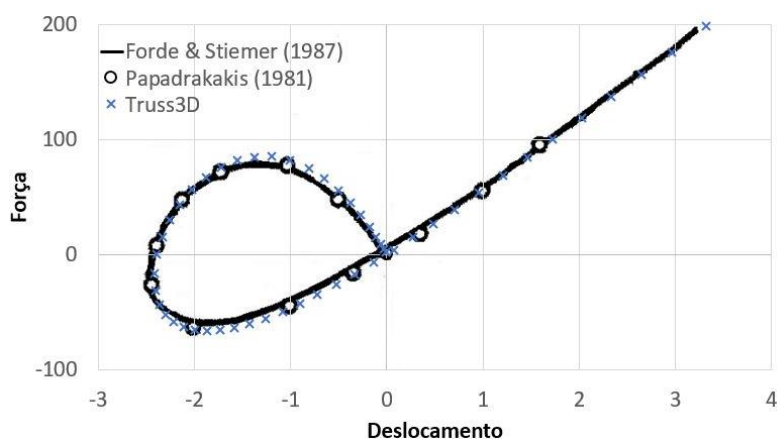


Figura 15. Deslocamento vertical do nó 2

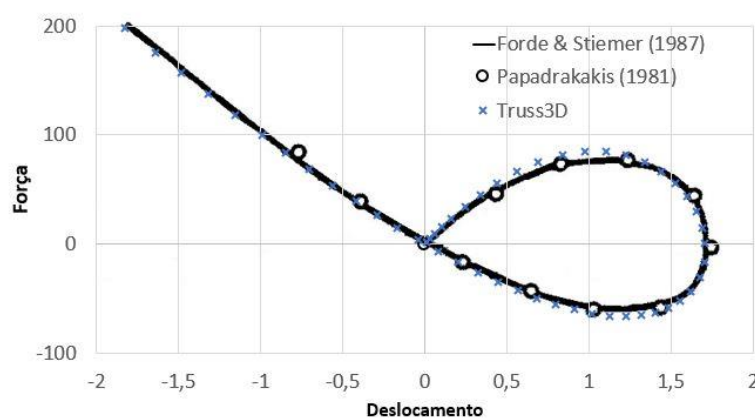


Figura 16. Deslocamento horizontal do nó 2

5.3 Domo com 52 barras

O domo treliçado ilustrado nas Fig. 17 e 18, é composto por 52 barras e 21 nós. Seus elementos possuem módulo de elasticidade $E = 200000$ MPa e consistem em perfis de seção transversal tubular circular de 101,6x4mm. Uma força vertical de referência com intensidade de 1 kN atua em seu ápice (Fig. 19).

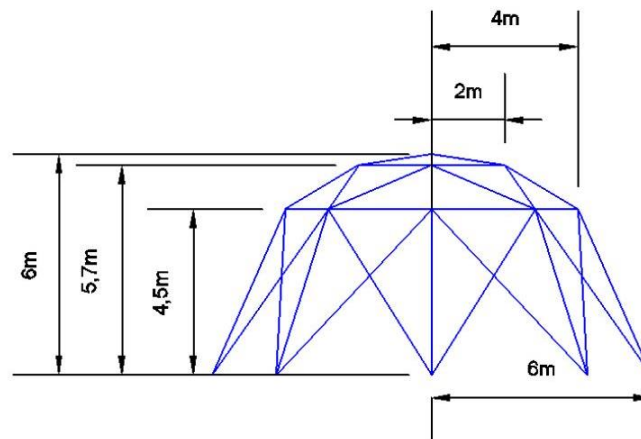


Figura 17. Dimensões do domo com 52 barras

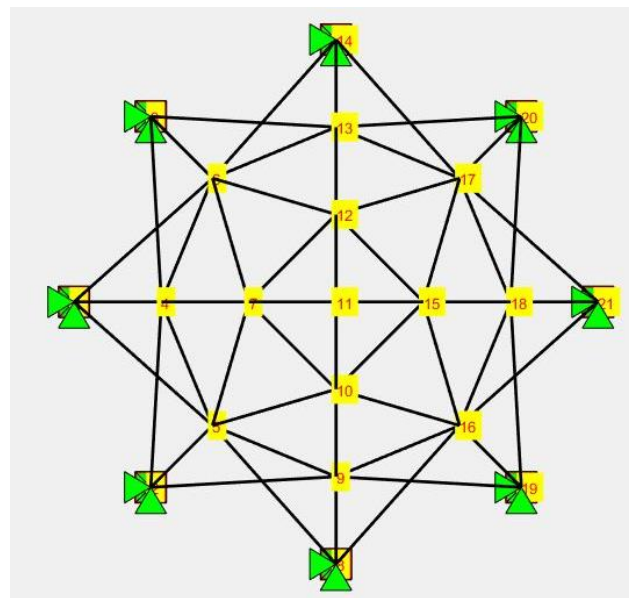


Figura 18. Projeção plana e numeração dos nós do domo com 52 barras

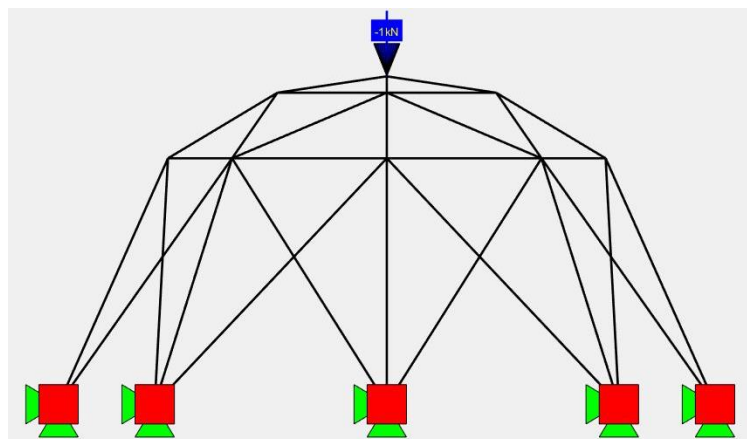


Figura 19. Vista frontal do domo com 52 barras

Para gerar o caminho de equilíbrio da estrutura, a análise foi realizada com 22 incrementos de carga, utilizando $tol = 10^{-3}$, $\Delta L_I = 1$ e $I_d = 4$. A Figura 20 apresenta o gráfico referente ao deslocamento vertical do nó de aplicação da carga.

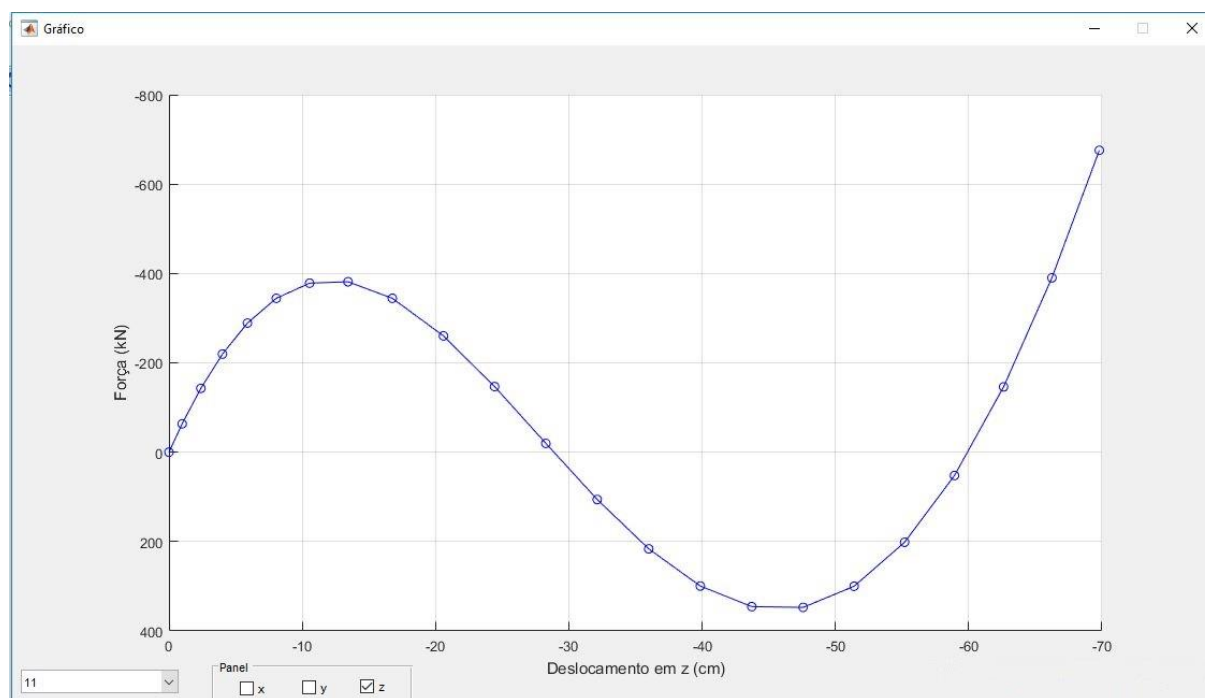


Figura 20. Caminho de equilíbrio do domo com 52 barras

O comportamento do domo pode ser observado nas Fig. 21, 22 e 23, que apresentam a configuração deformada da estrutura no início, meio e fim do caminho de equilíbrio, respectivamente.

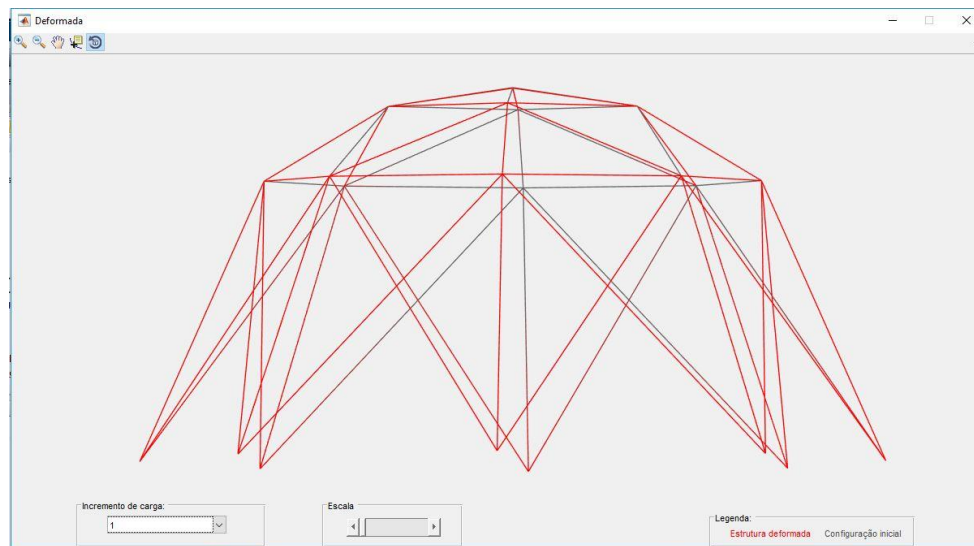


Figura 21. Configuração deformada após 1 incremento de carga

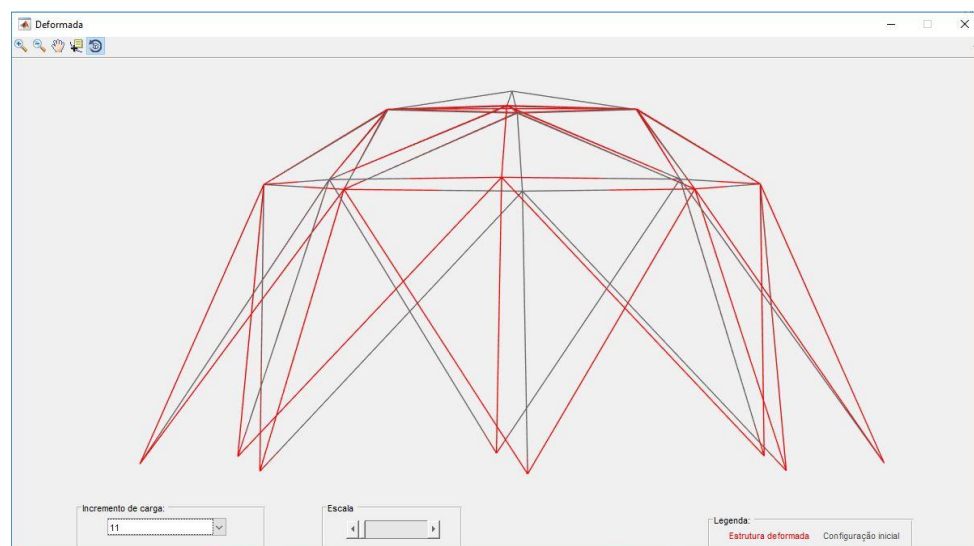


Figura 22. Configuração deformada após 11 incrementos de carga

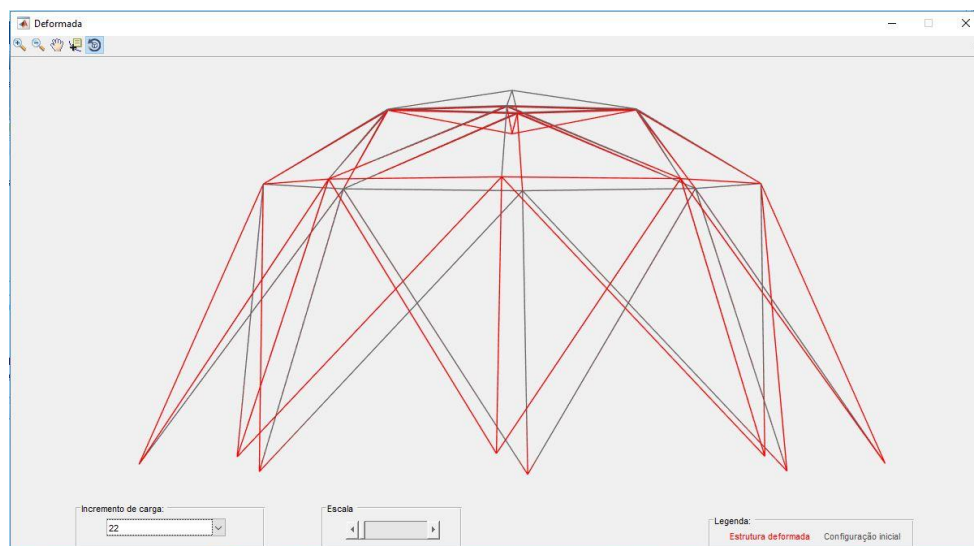


Figura 23. Configuração deformada após 22 incrementos de carga

6 CONCLUSÕES

O programa computacional desenvolvido se mostrou muito útil no processo de modelagem, análise estrutural e visualização de resultados referentes a treliças espaciais. Sua interface gráfica é de utilização intuitiva e apresenta diversas funcionalidades, com destaque para a etapa de pós-processamento, que conta com o traçado de gráficos e estudo da configuração deformada, além de fornecer relatórios sobre os esforços internos, deslocamentos nodais, reações de apoios e iterações.

A consideração da não-linearidade geométrica na etapa de análise permitiu a obtenção de resultados baseado em um comportamento estrutural mais próximo do real. O algoritmo implementado apresentou um bom desempenho quando comparado com os resultados da literatura, comprovando sua capacidade de gerar adequadamente caminhos de equilíbrio complexos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Crisfield, M. A., 1981. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers & Structures*, vol. 13, n. 1–3, pp. 55–62.
- Forde, B. W. R.; Stiemer, S. F., 1987. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, vol. 27, n. 5, pp. 625–630.
- Krenk, S., 2009. *Non-linear modeling of solids and structures*. New York: Cambridge University Press.

- Krenk, S.; Hededal, O., 1995. A dual orthogonality procedure for non-linear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 123, n. 1–4, pp. 95–107.
- Martinelli, L. B.; Alves, E. C., 2017. Dimensionamento otimizado de treliças tubulares Considerando Não-Linearidade Geométrica. *Engenharia Estudo e Pesquisa*, vol. 17, n. 1, pp. 41–53.
- Martinelli, L. B.; Alves, E. C.; Novelli, L.; Azolin, L. G., 2016. Um sistema para análise dinâmica e não linear de treliças espaciais. In: XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília.
- Novelli, L.; Alves, E. C.; Filho, H. G.; Garozi, M. J. P.; Azevedo, M. S., 2015. Ferramenta computacional para o dimensionamento de estruturas tubulares treliçadas. In: XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro.
- Papadrakakis, M., 1981. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. *Computers & Structures*, vol. 14, n. 5–6, pp. 393–402.
- Ramm, E., 1981. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In Wunderlich, W., Stein, E., & Bathe, K. J., eds, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, pp. 63–89. Springer-Verlag.
- Riks, E., 1972. The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 39, pp. 1060–1065.
- Riks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 7, pp. 529–551.
- Wempner, G. A., 1971. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, n. 11, pp. 1581–1599.
- Yang, Y.-B.; Leu, L.-J., 1991. Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, pp. 121–131.